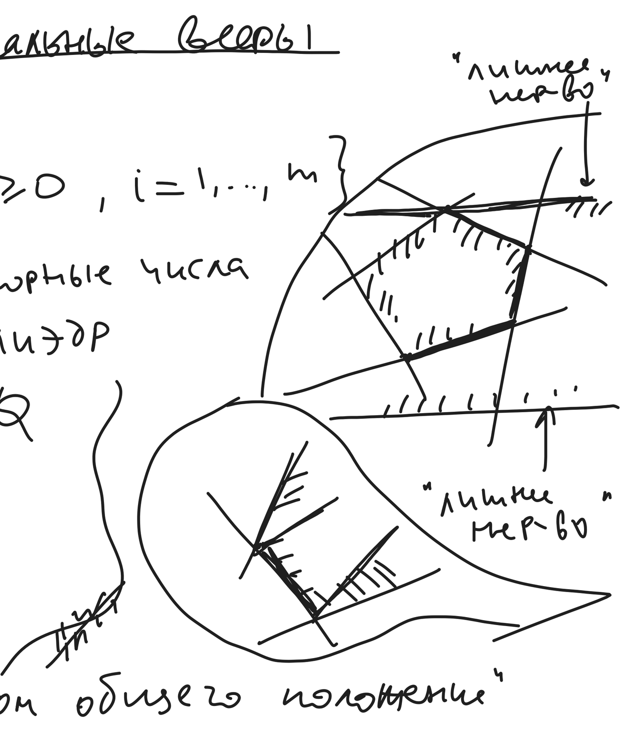
<u>Многогранники и нормальные веера</u>

<u>(Выпуклый) полиэдр</u>:

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x\rangle + b_i \geq 0,\ i = 1,\dots,m\}$

$a_i \in (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ - опорные числа

<u>Многогранник</u> - ограниченный полиэдр



<u>Теорема</u> (Минковский): вып. мн-во Q явл. многогранником $\Leftrightarrow$

$Q = \mathrm{conv}(a_1, \dots, a_l)$

$a_j \in \mathbb{R}^n$

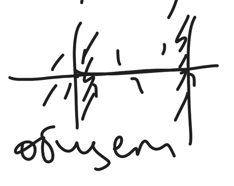
Что является "многогранником общего положения"

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x\rangle + b_i \geq 0,\ i = 1,\dots,m\}$

P наз <u>простым</u> (simple), если <u>ограничивающие</u> его гиперпл-ти находятся в общем положении в каждой точке P

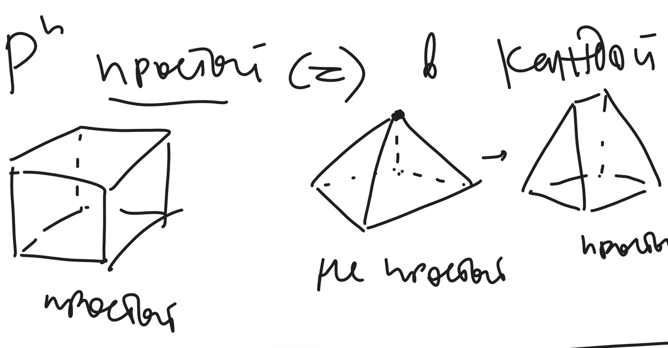
$F_i = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i x\rangle + b_i = 0\}$

<u>Задача</u>: (Пусть $\dim P = \dim \mathbb{R}^n = n$) F_i - гипергрань (грань коразмерности 1) $\Leftrightarrow$ i-е нер-во нельзя выбросить



P <u>простой</u> $\Leftrightarrow$ его гиперграни находятся в общем положении в каждой вершине

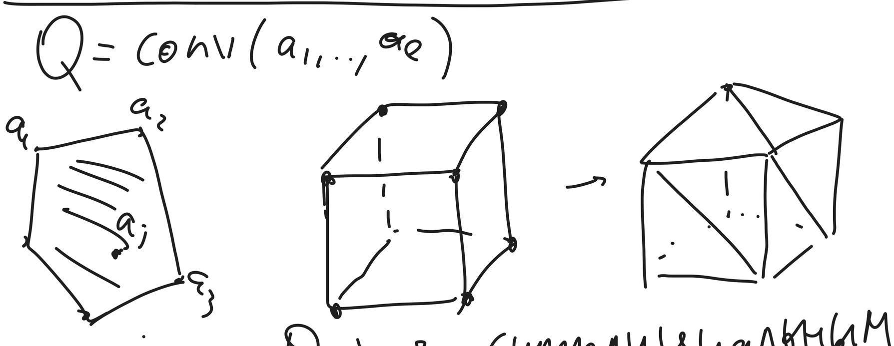
P^n <u>простой</u> $\Leftrightarrow$ в каждой вершине n гиперграней



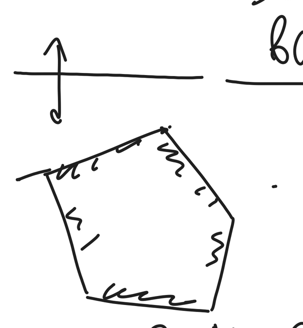
$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle + b_i \geq 0,\ i = 1..m\}$

$a_i + \varepsilon_i$, $b_i + \delta_i$ $\Rightarrow$ P станет простым

$Q = \mathrm{conv}(a_1, \dots, a_l)$



Вып. мн-к Q наз <u>симплициальным</u>, если все его (собственные) грани - симплексы



$M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$

Пусть $P \subset M_{\mathbb{R}}$ вып. мн-к (или любое выпуклое тело)

<u>Полярное мн-во</u>

$P^* = \{u \in M^*_{\mathbb{R}} : \langle u, x\rangle + 1 \geq 0\}$ (вместо $\langle u, x\rangle \leq 1$)

<u>Утв.</u> (задача):

а) Пусть $P = \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle a_i, x\rangle + b_i \geq 0,\ i = 1,\dots,m\}$ — вып мн-к (ограничен)

Тогда P^* явл. вып. многогранником $\Leftrightarrow$ $0 \in \mathrm{int}\, P \Leftrightarrow b_i > 0$ (внутр.)

б) $(P^*)^* = \mathrm{conv}(P, 0)$. Т.е. $P \subset (P^*)^*$ и $(P^*)^* = P \Leftrightarrow 0 \in P$

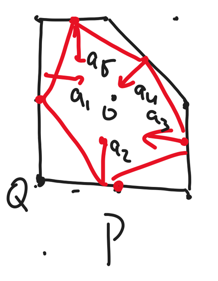
в) Пусть $Q = \mathrm{conv}(a_1, \dots, a_m) \subset M^*_{\mathbb{R}}$ $a_i \in M^*_{\mathbb{R}}$

Тогда $Q^* = \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle a_i, x\rangle + 1 \geq 0\}$

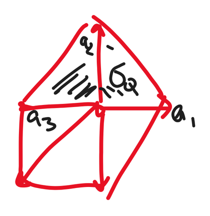
г) Пусть $P = \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle a_i, x\rangle + 1 \geq 0,\ i = 1..m\}$

Тогда $P^* = \mathrm{conv}(a_1, \dots, a_m)$

Нер-во $\langle a_i, x\rangle + 1 \geq 0$ лишнее $\Leftrightarrow$ $a_i \in \mathrm{conv}(a_j : j \neq i)$



$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 & e_1 = a_1 \\ y + 1 \geq 0 & e_2 = a_2 \\ -x + 1 \geq 0 & -e_1 = a_3 \quad P^* = \mathrm{conv}(e_1, e_2, -e_1, -e_2, -e_1 - e_2) \\ -y + 1 \geq 0 & -e_2 = a_5 \\ -x - y + 1 \geq 0 & -e_1 - e_2 = a_4 \end{cases}$$



<u>Нормальные веера</u>

$P = \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle a_i, x\rangle + b_i \geq 0 \quad i = 1 \dots m\}$

Для простоты считаем $\dim P = \dim M_{\mathbb{R}} = n$ и нет лишних нер-в

Тогда $F_i = P \cap \{x : \langle a_i, x\rangle + b_i = 0\}$ - гипергрань, $i = 1,\dots,m$

Пусть Q - произвольная грань P

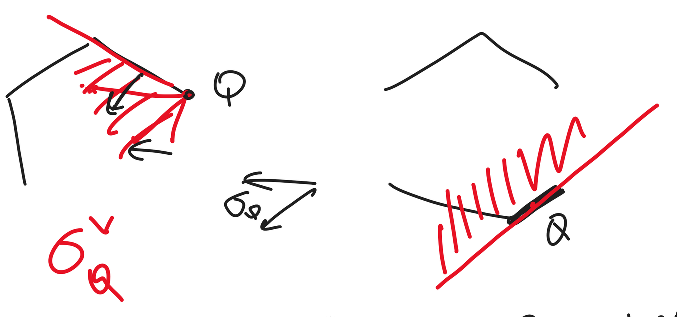
Положим

$\sigma_Q = \{u \in M^*_{\mathbb{R}} : \langle u, x'\rangle \leq \langle u, x\rangle \quad \forall x' \in Q,\ x \in P\}$

$\langle u, x - x'\rangle \geq 0$

$\sigma_Q^\vee$ порожден всеми векторами из Q в P

"конус при грани Q"



Скажем, что вектор a_i <u>нормален</u> к грани Q, если $Q \subset F_i = \{x \in M_{\mathbb{R}} : (a_i, x) + b_i = 0\}$

<u>Задача</u>: σ_Q порождён векторами a_i, для которых a_i нормально к Q

<u>Задача</u>: $\Sigma_P = \{\sigma_Q : Q \subset P \text{ - грань}\}$ - полный веер в $N_{\mathbb{R}} = M^*_{\mathbb{R}}$

Причём Σ_P симплициален $\Leftrightarrow$ P простой

<u>Задача</u>: $0 \in \mathrm{int}\, P \Rightarrow \Sigma_P$ состоит из конусов над гранями P^* (полярного мн-ка)