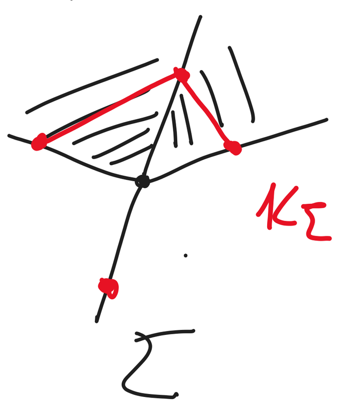
Веер: набор Σ (строго вып., рациональных полиэдральных) конусов в $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, такой, что

а) если $\sigma \in \Sigma$, то все грани σ содержатся в Σ;

б) $\sigma, \sigma' \in \Sigma \Rightarrow \sigma \cap \sigma'$ – грань σ и грань σ'

Пусть Σ – симплиц. веер (произв. веер)

$\Sigma^1 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m : \sigma_i \in \Sigma, \dim \sigma_i = 1\}$



$K_\Sigma = \{ I \subset [m] = \{1, \dots, m\} : \sigma_i, i \in I$ порождают конус в $\Sigma\}$ (+ все грани)

подлежащий симплиц. комплекс

Если σ – конус, то

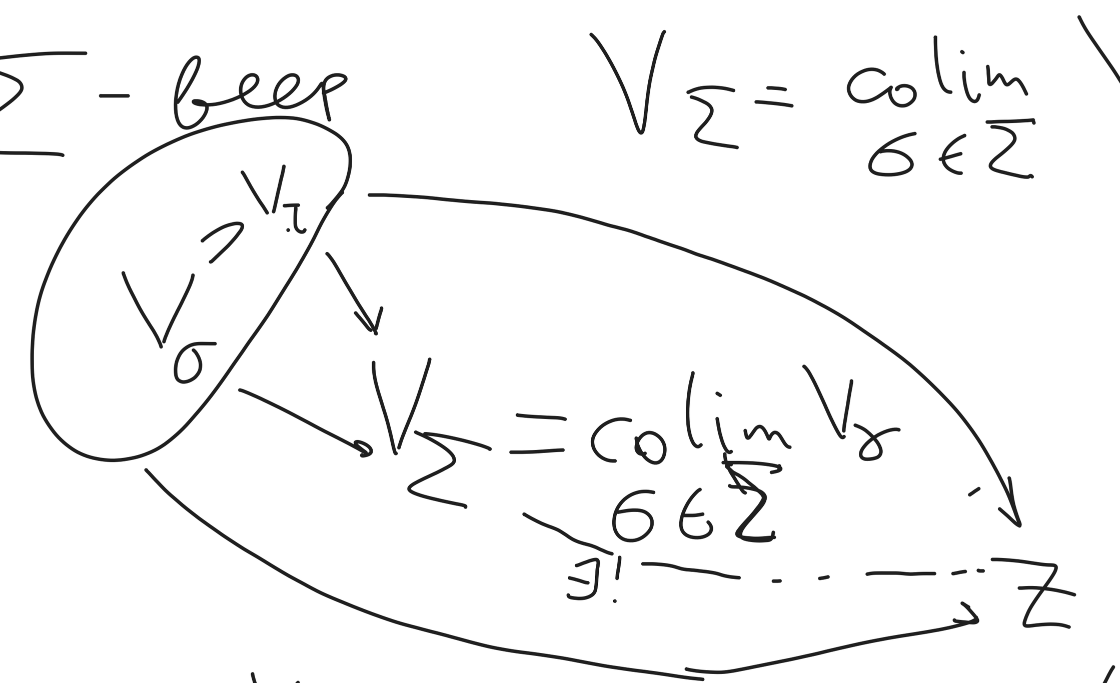
$\Sigma_\sigma = \{$все грани $\sigma\}$

Торические многообразия, соотв. веерам

$\tau \subset \sigma$ – грань $\Rightarrow \sigma^\vee \subset \tau^\vee$ $\quad S_\sigma = N^* \cap \sigma^\vee \subset S_\tau$

$\mathbb{C}[S_\sigma] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$ $\quad V_\tau \to V_\sigma$ – вложение откр. подмн-ва

Σ – веер $\quad V_\Sigma = \operatorname{colim}_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma / \sim$



$\tau = \sigma \cap \sigma'$, $\sigma, \sigma' \in \Sigma$

$v \in V_\tau \subset V_\sigma$

$v' \in V_\tau \subset V_{\sigma'}$ $\quad v \sim v'$

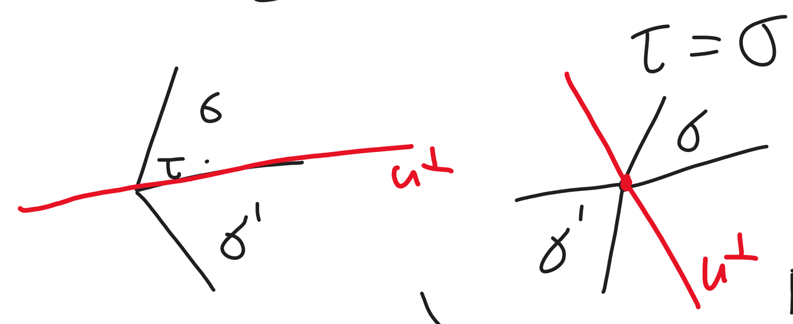
"Схема" V <u>отделима</u>, если $\Delta : V \to V \times V$ имеет замкнутый образ (в топологии Зарисского)

<u>Лемма</u>: если набор конусов σ образует веер, то

$V_\Sigma = \operatorname{colim}_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma$ отделимо

<u>Лемма</u> (separation lemma / лемма об отделимости): пусть σ и σ' – различные конусы, пересекающиеся по грани, $\tau = \sigma \cap \sigma'$. Тогда $\exists\, u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ (общая опорная гиперплоскость),

$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$



Док-во:

$\xi = \sigma - \sigma' = \sigma + (-\sigma') \neq N_{\mathbb{R}}$ (упр.)

Пусть $u^\perp$ – гиперпл., задающая миним. грань ξ

$\xi \cap u^\perp = \xi \cap (-\xi) = (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma)$

$\sigma \subset \xi \Rightarrow u \in \sigma^\vee$; $\quad \tau \subset \xi \cap (-\xi) \Rightarrow \tau \subset \sigma \cap u^\perp$

Пусть $x \in \sigma \cap u^\perp \Rightarrow x \in \sigma' - \sigma \Rightarrow x = y' - y \quad y' \in \sigma', y \in \sigma$

$\Rightarrow \underset{y'}{x + y} \in \sigma \cap \sigma' = \tau \Rightarrow x, y \in \tau \Rightarrow x \in \tau \Rightarrow \sigma \cap u^\perp \subset \tau$ ▨

<u>Лемма</u> Σ – веер, то $V_\Sigma = \operatorname{colim}_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma$ отделимо

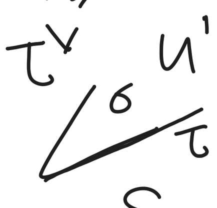
Док-во: отделимость – замкнутость образа $V \to V \times V$

Критерий отделимости: достаточно проверить замкнутость

$V_\tau = V_\sigma \cap V_{\sigma'} \to V_\sigma \times V_{\sigma'} \Leftrightarrow \mathbb{C}[V_\sigma \times V_{\sigma'}] \to \mathbb{C}[V_\tau]$ сюръективен

$\exists\, u \quad u \geq 0$ на σ, $u \leq 0$ на σ' $\quad u^\perp \cap \sigma = \tau$

$u' \in \tau^\vee \quad u'|_\tau \geq 0 \quad \exists\, k \geq 0 \quad u' + ku|_\sigma \geq 0$ (упр.)



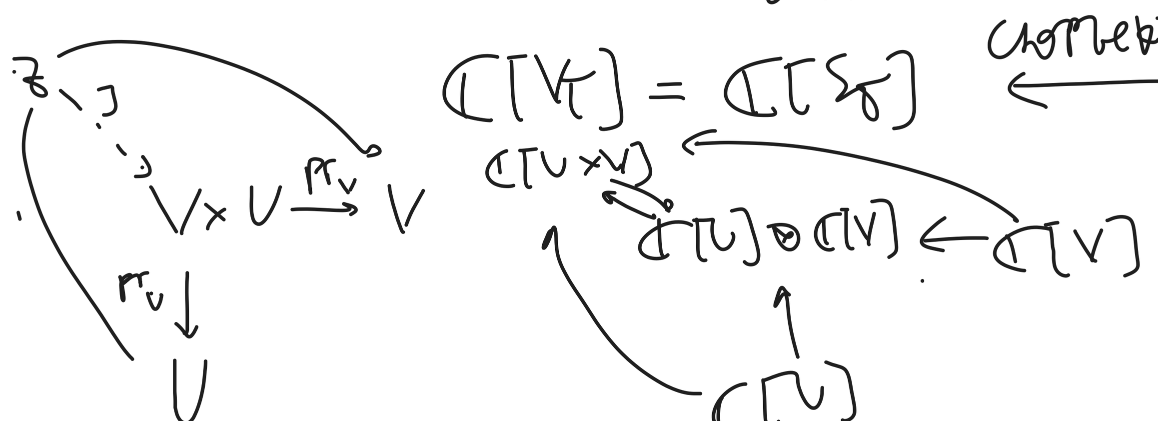
$u' + ku \in \sigma^\vee \quad u' = \underset{S_\sigma}{(u' + ku)} + \underset{S_{\sigma'}}{(-ku)} \in \sigma^\vee \cap (\sigma')^\vee$

Т.е. $\underset{N^* \cap \sigma^\vee}{S_\sigma} \oplus S_{\sigma'} \to \underset{N^* \cap \tau^\vee}{S_\tau}$ сюръективно

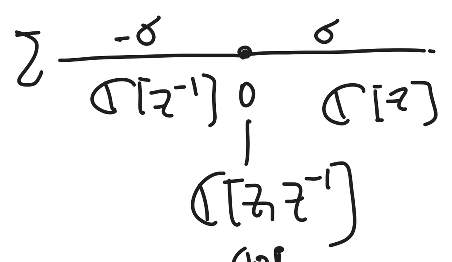
$\mathbb{C}[S_\sigma \oplus S_{\sigma'}] = \underset{\text{полугр. алгебра}}{\mathbb{C}[S_\sigma]} \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma'}] = \mathbb{C}[V_\sigma] \otimes \mathbb{C}[V_{\sigma'}]$

алгебра функций V_σ

$\mathbb{C}[V_\tau] = \mathbb{C}[S_\tau] \xleftarrow{\text{сюръективно}} \mathbb{C}[V_\sigma \times V_{\sigma'}]$ ▨



Пример

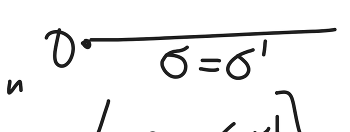


$\mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z, z^{-1}] \leftarrow \mathbb{C}[z^{-1}]$ $\qquad \mathbb{C} \hookleftarrow \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C}[z, z^{-1}] \xleftarrow{\text{сюр}} \mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}[z^{-1}]$ $\quad V_\Sigma = \mathbb{C} \cup_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{C} = \mathbb{C} \sqcup \mathbb{C} / z \sim z^{-1}, z \neq 0 = \mathbb{CP}^1$

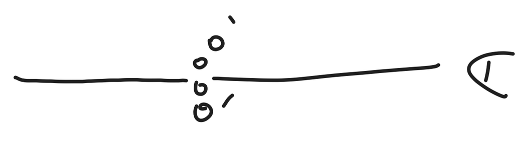
($\mathbb{C}^\times \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ замкнуто)

$\mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z, z^{-1}] \leftarrow \mathbb{C}[z]$ $\qquad \mathbb{C} \hookleftarrow \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$



"Σ" $= \{0, \sigma, \sigma'\}$

$V_{\text{"}\Sigma\text{"}} = \mathbb{C} \cup_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{C} = \mathbb{C} \sqcup \mathbb{C} / z \sim z'$, если $z = z' \neq 0$



$\mathbb{C}[z, z^{-1}] \leftarrow \mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}[z']$

$z \longleftarrow z$

$z \longleftarrow z'$

$(N')^* \subset N^*$ индекс 2 $\qquad N \subset N'$ индекс 2

$V_{\sigma, N} \xleftarrow{/ N'/N} V_{\sigma, N'}$

$\mathbb{C}/x \sim (-x) \qquad \mathbb{C}$