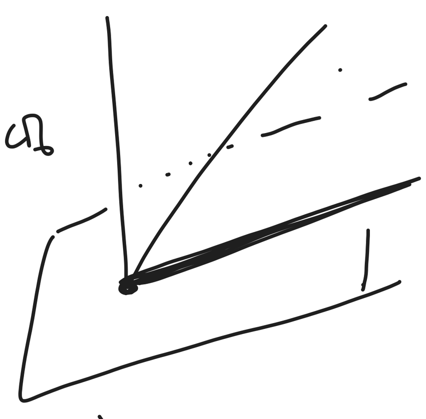
http:/ higeom.math.msu.su/people/taras/russian.html
Учебные материалы

$N \cong \mathbb{Z}^n$, $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{C}_N^\times = N \otimes \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$

$\sigma = \mathbb{R}_{\geq}\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $a_i \in N_{\mathbb{R}}$

σ <u>рациональный</u>, если $a_i \in N$
<u>регулярный</u>, если $\exists\, a_1, \dots, a_k$ – часть базиса N
<u>строго выпуклый</u>, если σ не содержит прямой

<u>Грань</u> конуса σ – пересечение $\sigma \cap u^\perp$, где
$u^\perp$ – <u>опорная гиперплоскость</u>



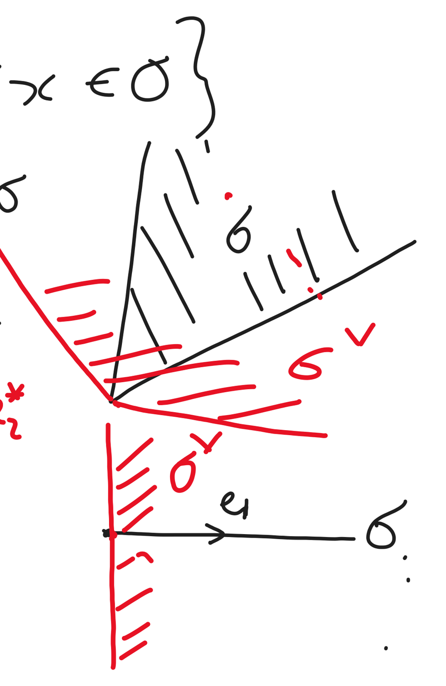
$u^\perp = \{x \in N_{\mathbb{R}} : \langle u, x\rangle = 0\}$ – гиперплоскость
$u \in N^*_{\mathbb{R}}$, $u \neq 0$, <u>опорная</u>, если $\sigma \subset u^\perp_{\geq}$
$\langle u, x\rangle \geq 0$

$\sigma \cap (-\sigma)$ – наименьшая грань
$\sigma \cap (-\sigma) = 0 \iff \sigma$ строго выпуклый (задача)
Пусть $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ – конус. <u>Двойственный конус</u>

$$\sigma^\vee = \{u \subset (N_{\mathbb{R}})^* : \langle u, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \sigma\}$$

$\Updownarrow$ $u^\perp$ – опорная для σ

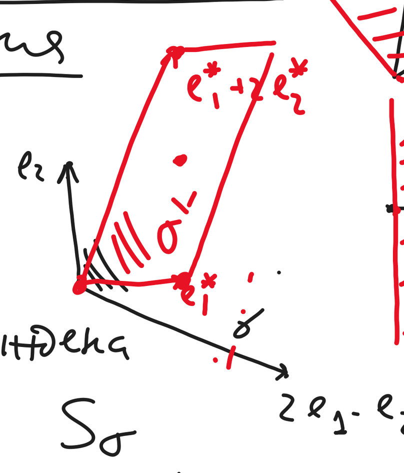
$(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$, $\sigma^\vee$ – строго вып $\iff \dim\sigma = n = \dim N_{\mathbb{R}}$
(задачи)



<u>Аффинные торические мн-зия</u>

$\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \quad \sigma^\vee \subset N^*_{\mathbb{R}}$

$S_\sigma = \sigma^\vee \cap N^*$ – полугруппа по сложению
конечно порождена (задача)



A_σ – полугрупповая $\mathbb{C}$-алгебра, соотв. S_σ
$A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma]$, порождена χ^u, где $u \in S_\sigma$, $\chi^{u_1+u_2} = \chi^{u_1}\cdot\chi^{u_2}$
конечно порожденная коммут. $\mathbb{C}$-алгебра, $\chi^0 = 1$

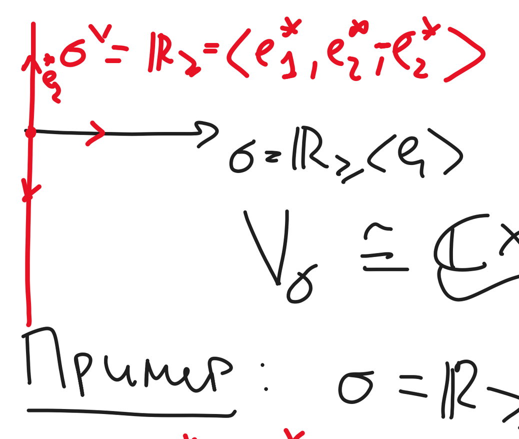
$V_\sigma = \operatorname{Spec}\underbrace{\mathbb{C}[S_\sigma]}_{A_\sigma}$ – аффинное алг. мн-зие, соотв A_σ

$A_\sigma = \mathbb{C}[V_\sigma]$ – алгебра регул. ф-ций на V_σ
$A_\sigma = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]/I$ $\quad V_\sigma$ – мн-во общих нулей мн-в из идеала I
Макс. идеалы (точки) соотв. морфизмам $A_\sigma \xrightarrow[\text{алгебр}]{} \mathbb{C}$
$S_\sigma \xrightarrow[\text{полугрупп}]{} \mathbb{C}_m$
$\mathbb{C}_m$ – мультиплик. полугруппа компл. чисел

$$\operatorname{Hom}_{Alg}(\mathbb{C}[S_\sigma], \mathbb{C}) = \operatorname{Hom}_{Sg}(S_\sigma, \mathbb{C}_m)$$

<u>Пример</u>: $N = \mathbb{Z}^n$, $\sigma = \mathbb{R}_{\geq}\langle e_1, \dots, e_k\rangle$ $\quad 0 \leq k \leq n$

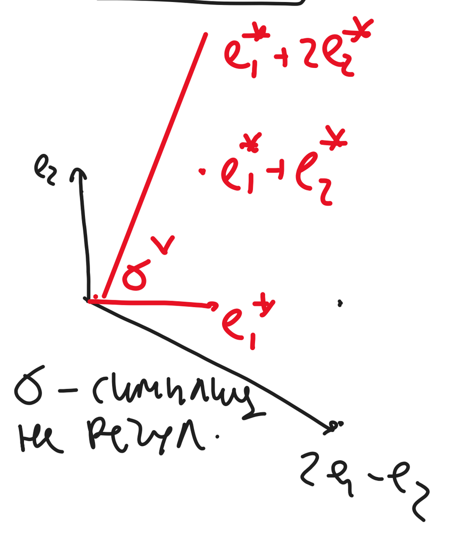
$S_\sigma = \sigma^\vee \cap N^* = \mathbb{Z}_{\geq}\langle e_1^*, \dots, e_k^*, \pm e_{k+1}^*, \dots, \pm e_n^*\rangle$ $\quad$ https://ya.ru/



$A_\sigma \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, x_{k+1}^{-1}, \dots, x_n^{-1}]$
$x_1 = \chi^{e_1^*}, \dots, x_n = \chi^{e_n^*}$

$V_\sigma \cong \underbrace{\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}_{k} \times \underbrace{\mathbb{C}^\times \times \dots \times \mathbb{C}^\times}_{n-k}$ $\quad$ $n=k$ $\; V_\sigma = \mathbb{C}^n$
$k=0$ $\; V_\sigma = (\mathbb{C}^\times)^n$

<u>Пример</u>: $\sigma = \mathbb{R}_{\geq}\langle e_2, 2e_1 - e_2\rangle$ в $\mathbb{R}^2$ $\quad N = \mathbb{Z}^2$

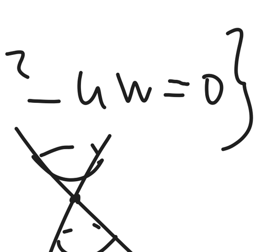


$S_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2$ порожд. $e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*$

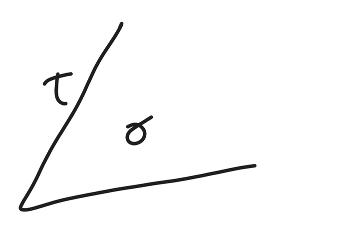
$A_\sigma = \mathbb{C}[\overset{u}{x}, \overset{v}{xy}, \overset{w}{xy^2}] = \dfrac{\mathbb{C}[u, v, w]}{v^2 - uw}$

$x = \chi^{e_1^*}$, $y = \chi^{e_2^*}$

$V_\sigma \cong \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 : v^2 - uw = 0\}$ квадр. конус
(особое мн-зие)



$\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow \sigma^\vee \subset N^*_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow S_\sigma = \sigma^\vee \cap N^*_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma] \rightsquigarrow V_\sigma = \operatorname{Spec} A_\sigma$
Почему V_σ – торическое мн-зие?
Пусть $\tau \subset \sigma$ – грань $\Rightarrow \sigma^\vee \subset \tau^\vee$
$\sigma^\vee = \{u \in N^*_{\mathbb{R}} : \langle u, x\rangle \geq 0 \;\; \forall x \in \sigma\}$



$S_\sigma \subset S_\tau$ $\quad \underset{A_\sigma}{\mathbb{C}[S_\sigma]} \longrightarrow \underset{A_\tau}{\mathbb{C}[S_\tau]}$ $\quad V_\tau \to V_\sigma$
вложение открытого по Зарисскому подмн-ва
(<u>Задача</u>, указание $\tau = \sigma \cap u^\perp$)

<u>Пример-конструкция</u>
$\tau = \{0\}$ $\quad \sigma = \mathbb{R}_{\geq}\langle e_1, \dots, e_n\rangle$ $\quad \tau^\vee = (N_{\mathbb{R}})^*$
$\mathbb{C}[S_\sigma] = A_\sigma = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$

$$V_\tau = (\mathbb{C}^\times)^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n = V_\sigma$$

Ан-но, если $\tau = \{0\}$, σ – любой (строго выпуклый!)

$V_\tau = \underset{\text{алг. тор}}{(\mathbb{C}^\times)_N} \xhookrightarrow[\text{откр.}]{} V_\sigma$

Действие $\quad \mathbb{C}_N^\times \times V_\sigma \longrightarrow V_\sigma$

$\overset{(t_1, \dots, t_n)}{t} \in \underset{N \otimes \mathbb{C}^\times}{\mathbb{C}_N^\times} \longleftrightarrow N^* \to \mathbb{C}^\times$ $\quad \operatorname{Hom}(N^*, \mathbb{C}^\times)$

$N^* \ni u = (u_1, \dots, u_n) \longmapsto t_1^{u_1} \cdots t_n^{u_n} = t(u) \in \mathbb{C}^\times$

$x \in V_\sigma \longleftrightarrow A_\sigma = \mathbb{C}[S_\sigma] \xrightarrow[\text{алгебр.}]{} \mathbb{C} \longleftrightarrow S_\sigma \xrightarrow[\text{полугрупп}]{} \mathbb{C}_m$ $\quad u \longmapsto x(u)$

$t \cdot x$ соотв. гомоморфизму $\quad S_\sigma \to \mathbb{C}_m$
$u \to t(u)x(u)$

$\mathbb{C}_N^\times \times V_\sigma \to V_\sigma \longleftrightarrow \underset{\text{алгебра функций } V_\sigma}{A_\sigma} \longrightarrow \underset{\text{алгебра функций на торе}}{A_\sigma \otimes \mathbb{C}[N^*]}$

$$\chi^u \longrightarrow \chi^u \otimes \chi^u$$

$\mathbb{C}_N^* \times V_\sigma \to V_\sigma$
$\quad\cup \qquad\quad \cup$
$\mathbb{C}_N^* \times \mathbb{C}_N^* \to \mathbb{C}_N^*$

$u \in \underset{\sigma^\vee \cap N^*}{S_\sigma} \subset N^*$

$\longleftrightarrow$

$S_\sigma \subset N^*$
$\; u \qquad u$

$$\begin{array}{ccc}
\chi^u \otimes \chi^u & \longleftarrow & \chi^u \\
A_\sigma \otimes \mathbb{C}[N^*] & \longleftarrow & A_\sigma \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{C}[N^*] \otimes \mathbb{C}[N^*] & \longleftarrow & \mathbb{C}[N^*] \\
\chi^u \otimes \chi^u & \longleftarrow & \chi^u \in A_\sigma
\end{array}$$