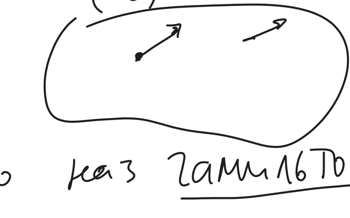
Симплектическая редукция

Симплектическое мн-зие (W,ω) - гладкое W,
ω замкнутая невырожд. 2-форма $\omega\in\Omega^2(W)$
($\Rightarrow \dim W=2k$)

Пусть на W действует (компактный) тор T,
сохраняя симпл. форму $W\xrightarrow{\cdot t}W$ $D(\cdot t): T_xW\to T_{t\cdot x}W$
$D(\cdot t)^*\omega=\omega$



$\mathrm{Lie}\,T=\mathfrak{t}\cong\mathbb{R}^\ell$
$v\in\mathfrak{t}$ X_v - T-инвар. вект. поле
$\omega(X_v,-)$ - замкнутая 1-форма

Опр. Действие T на W, сохраняющее ω наз. гамильтоновым,
если $\omega(X_v,-)$ точна $\forall v\in\mathfrak{t}$

В этом случае $\exists H_v: W\to\mathbb{R}$: $dH_v(Y)=\omega(X_v,Y)$
$\forall$ вект. поле Y на W
H_v наз. гамильтонианом

$\{e_i\}$ - базис в $\mathfrak{t}$ с соотв. H_{e_i}

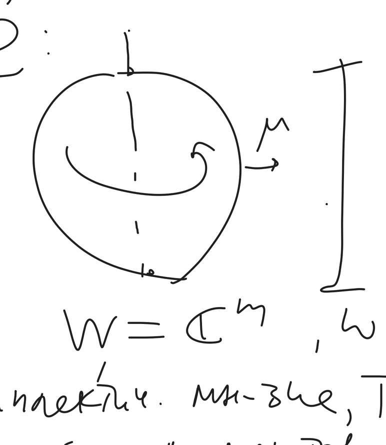
Отображение моментов

$$\mu: W\to\mathfrak{t}^*,\quad (x,v)\mapsto H_v(x)$$

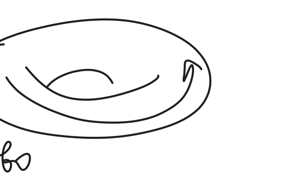
(определено с точностью до сдвига в $\mathfrak{t}^*$)

Теорема (Атья, Гийемин-Стенберг): если μ собственно (например, если W компактно), то $\mu(W)$ выпуклый,
причём если W - компактно, то
$$\mu(W)=\mathrm{conv}(x\in W^T\text{- неподв. точки})\text{ - выпуклый многогранник}$$

Пример:



$S^1\curvearrowright S^2$
гамильтоново



$S^1\curvearrowright T^2$
не гамильтоново

Пример: $W=\mathbb{C}^m$, $\omega=i\sum_{k=1}^m dz_k\wedge d\bar z_k=2\sum_{k=1}^m dx_k\wedge dy_k$
симплектич. мн-зие, $T^m\curvearrowright\mathbb{C}^m$ $d\bar z_k=dx_k-i\,dy_k$

$S^1\curvearrowright\mathbb{C}$ (x,y) $(-y,x)$
$-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$
$2\,dx\wedge dy$

Задача: отобр. моментов
$\mu:\mathbb{C}^m\to\mathbb{R}^m$, $\mu(z_1,\dots,z_m)=(|z_1|^2,\dots,|z_m|^2)$
$\mu(\mathbb{C}^m)=\mathbb{R}^m_{\geqslant}$

Конструкция (симплектическая редукция)
$T\curvearrowright W$ гамильтоново, пусть $\mu: W\to\mathfrak{t}^*$ собственно
Выберем регулярное значение $u\in\mathfrak{t}^*$,
т.е. $D\mu: T_xW\to\mathfrak{t}^*$ сюръективен $\forall x\in\mu^{-1}(u)$
Тогда $\mu^{-1}(u)$ - гладкое T-инвар. подмн-зие в W

Задача: действие T на $\mu^{-1}(u)\subset W$ почти свободно (т.е. стабилизаторы конечны)

Предположим, что $T\curvearrowright\mu^{-1}(u)$ свободно
$\omega|_{\mu^{-1}(u)}$ - вырождено, но $\exists$ невырожд. (симпл.) ω' на $\mu^{-1}(u)/T$:

$i:\mu^{-1}(u)\to W$
$p:\mu^{-1}(u)\to\mu^{-1}(u)/T=:M$

$$\boxed{p^*\omega'=i^*\omega}$$

$$(W,\omega)\rightsquigarrow(M=\mu^{-1}(u)/T,\ \omega')=W/\!/T$$
$T\curvearrowright$ симпл. редукция
симпл. фактор

Торический случай

$N\cong\mathbb{Z}^n$ $T_N=N\otimes S^1$, $\mathbb{C}^\times_N=N\times\mathbb{C}^\times$
Σ полный неособый веер в $N_\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^n$, $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in N$ образующие

$$1\to K\to\mathbb{T}^m\xrightarrow{\exp\Lambda}T_N\to1\qquad \Lambda:\mathbb{Z}^m\to N,\ e_i\mapsto\lambda_i$$

$K\cong T^{m-n}$, т.к. Σ неособый полный
$K\subset\mathbb{T}^m\curvearrowright\mathbb{C}^m$ гамильтоново действие

$$\mu_\Sigma:\mathbb{C}^m\xrightarrow{\mu}\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathfrak{k}^*$$
$(z_1,\dots,z_m)\mapsto(|z_1|^2,\dots,|z_m|^2)$
двойственно к $K\subset\mathbb{C}^m$

$$0\to\mathfrak{k}=V\xrightarrow{\Gamma^t}\mathbb{R}^m\xrightarrow{\Lambda}N_\mathbb{R}\to0\qquad V\cong\mathbb{R}^{m-n}$$
$e_i\mapsto\lambda_i$

$$0\to N^*_\mathbb{R}\xrightarrow{\Lambda^*}\mathbb{R}^m\xrightarrow{\Gamma}V^*=\mathfrak{k}^*\to0$$
$u\mapsto(\langle u,\lambda_1\rangle,\dots,\langle u,\lambda_m\rangle)$
$e_i\mapsto\gamma_i$

$\Gamma=(\gamma_1\dots\gamma_m)$ - двойственная по Гейлу конфигурация векторов в V^*
$(m-n)\times m$ - матрица $\Gamma=(\gamma_{jk})$

$\Lambda\cdot\Gamma^t=0$

$$\mu_\Sigma:\mathbb{C}^m\to\mathfrak{k}^*\cong\mathbb{R}^{m-n}$$
$$(z_1,\dots,z_m)\longmapsto\Big(\sum_{k=1}^m\gamma_{1k}|z_k|^2,\dots,\sum_{k=1}^m\gamma_{m-n,k}|z_k|^2\Big)$$
$$=(\gamma_1|z_1|^2+\dots+\gamma_m|z_m|^2)$$

λ_1 λ_2 λ_m

$\delta=(\delta_1,\dots,\delta_{m-n})\in\mathfrak{k}^*$ - регул. значение

$$\mu^{-1}(\delta)=\Big\{(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{C}^m:\ \sum_{k=1}^m\gamma_k|z_k|^2=\delta\quad \sum_{k=1}^m\gamma_{jk}|z_k|^2=\delta_j,\ j=1,\dots,m-n\Big\}$$

Пусть теперь $\Sigma=\Sigma_P$, - норм. веер для мн-ка
$$P=\{u\in N^*_\mathbb{R}:\langle\lambda_i,u\rangle+b_i\geqslant0,\ i=1,\dots,m\}\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$$
Положим $\delta=\Gamma b\in\mathfrak{k}^*$ $\delta=b_1\gamma_1+\dots+b_m\gamma_m$

Предложение: $\delta=\Gamma b$ - регул. значение для μ_Σ

(Задача): обозн. $\mu^{-1}(\delta)=:\mathcal{Z}_P$ - момент-угол-многообразие
(пересечение $(m-n)$ квадрик)
$\{z\in\mathbb{C}^m:\ \sum_{k=1}^m\gamma_k(|z_k|^2-b_k)=0\}$

$\forall z\in\mathcal{Z}_P$ это пересечение невырожденно, т.е.
градиенты квадрик лин. незав. в каждой точке $z\in\mathcal{Z}_P$
$\Uparrow$
P - простой

$\square$

$(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\overset{\text{д.Г.}}{\longleftrightarrow}(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$

$\Sigma_P\to U(\mathcal{K}_P)=\mathbb{C}^m\setminus\bigcup_{F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}=\varnothing}\{z_{i_1}=\dots=z_{i_k}=0\}$
$\cup$
$\Sigma_P\to\mathcal{Z}_P=\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ - момент-угол-мн-зие

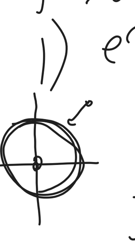
$U(\mathcal{K}_P)/G=V_{\Sigma_P}$
ал. фактор-конструкция

$\mathcal{Z}_P=\mu^{-1}(\delta)/K$
симпл. редукция

Теорема: пусть P-многогранник в $N^*_\mathbb{R}$, причём Σ_P - неособый рац. веер (такие мн-ки наз. Дельзановыми)
Тогда вложение $\mathcal{Z}_P=\mu_\Sigma^{-1}(\Gamma b)\hookrightarrow U(\Sigma_P)$
индуцирует диффеоморфизм
$$\mathbb{C}^m/\!/K=\mathcal{Z}_P/K\cong U(\Sigma_P)/G$$

$H^2(V_\Sigma;\mathbb{R})=\mathfrak{k}^*$
$[\omega]=\sum_{i=1}^m b_i\gamma_i$

Док-во: $f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{R}$
$$f(z)=\|\mu_\Sigma(z)-\Gamma b\|^2$$
$f\geqslant0$ и достигает минимума на $\mathcal{Z}_P=\mu_\Sigma^{-1}(\Gamma b)$
1) единств. крит. точками f являются точки вел. $z\in\mathcal{Z}_P$
2) $\forall z\in U(\mathcal{Z}_P)$ градиентная траектория из z упирается в $\mathcal{Z}_P$



3) любая градиентная траектория содержится в G-орбите $\Rightarrow$ любая G-орбита пересекает $\mathcal{Z}_P$
4) любая G-орбита пересекает $\mathcal{Z}_P$ по единств. K-орбите

$\square$

$Gz\cap\mathcal{Z}_P=K\cdot z$
$\Downarrow$
$$\mathcal{Z}_P=U(\Sigma_P)/(G/K)$$

$(\mathbb{C}^\times)^{m-n}$
$G/K\cong\mathbb{R}^{m-n}$
T^{m-n}