

Πρώτο $U(\Sigma)$ η δεύτερη είναι η G
 Σ παρ. βέρ $\in N/\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in N$ ^{ηριθμ.}
^{ορίζονται}
Προϋποθέσεις: $\mathbb{R} < \lambda_1, \dots, \lambda_m > \geq N/\mathbb{R}$

$\Downarrow$ (задача)

В V_Σ есть торические моменты, т.е. $V_\Sigma \neq V_\Sigma \times \mathbb{C}^x$

$$\Lambda: \mathbb{Z}^m \rightarrow N, \exp \lambda_i \mapsto \lambda_i \xrightarrow{(y \cdot \lambda)} \Rightarrow \Lambda \otimes \mathbb{C}^x: (\mathbb{C}^x)^m \rightarrow \mathbb{C}_N^x \text{ корректно}$$

$$\text{Опр: } G = G(\Sigma) = \ker(\Lambda \otimes \mathbb{C}^x) \subset (\mathbb{C}^x)^m$$

$$1 \rightarrow G \rightarrow (\mathbb{C}^x)^m \xrightarrow{\exp \Lambda} \mathbb{C}_N^x \rightarrow 1$$

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_1^{\lambda_1}, \dots, z_m^{\lambda_m}, \dots, z_1^{\lambda_m}, \dots, z_m^{\lambda_1})$$

$$G = \left\{ (z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{C}^x)^m : \prod_{i=1}^m z_i^{\langle \lambda_i, u \rangle} = 1 \quad \forall u \in N^* \right\}$$

$$G \cong (\mathbb{C}^x)^{m-n} \times (\text{коричневая группа}) \cong N/I_m \cdot \Lambda$$

$$\Sigma \text{ содержит } n \text{ независимых } n\text{-кортежей} \Rightarrow G \cong (\mathbb{C}^x)^{m-n}$$

$$\sigma \in \Sigma \quad g(\sigma) = (i_1, \dots, i_k) \subset [m], \text{ если } \sigma = \mathbb{R}_{>0} \langle \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k} \rangle$$

$$z^\sigma = \prod_{j \in g(\sigma)} z_j$$

$$\text{Опр: } U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus \left\{ z \in \mathbb{C}^m : z^\sigma = 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma \right\}$$

$$U(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma)$$

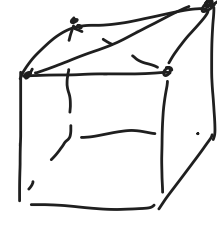
$$U_\sigma = \{ z \in \mathbb{C}^m : z^\sigma \neq 0 \} = \{ z \in \mathbb{C}^m : z_j \neq 0 \text{ при } j \notin g(\sigma) \}$$

$$(\mathbb{C}, \mathbb{C}^x)^{g(\sigma)} \cong \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^x)^{n-k}$$

$$\text{Задача: } U(\Sigma) = U(K_\Sigma)$$

$$\text{где } K_\Sigma = \{ I : I \subset g(\sigma) \text{ для некоторого } \sigma \in \Sigma \}$$

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \{ z : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0, \{i_1, \dots, i_k\} \notin K \}$$



$$U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m \text{ как } (\mathbb{C}^x)^m \text{ инвар. подмножество}$$

Торические моменты как факторы

$$\text{Теорема (Kock) } \mathbb{R} \langle \lambda_1, \dots, \lambda_m \rangle = N/\mathbb{R}$$

$$\text{а) } V_\Sigma \cong U(\Sigma)/G \text{ (камеральные факторы)}$$

$$\delta) V_\Sigma \cong U(\Sigma)/G \text{ (ном. факторы)} \Leftrightarrow \Sigma \text{ - симплис. бёр}$$

$$\text{Док-во: сначала докажем, что } \forall \sigma \in \Sigma \quad V_\sigma \cong U(\sigma)/G$$

$$\mathbb{C}[U(\sigma)] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m, z_j^{-1} : j \notin g(\sigma)]$$

$$\text{нормальная } \prod_{i=1}^m z_i^{k_i}, \text{ где } k_i \geq 0 \text{ или } i \in g(\sigma)$$

$$\prod_{i=1}^m z_i^{u_i} \text{ инвариантен относительно } G \Leftrightarrow \text{линейная комбинация}$$

$$\langle u, \lambda_i \rangle \geq 0 \text{ или } i \in g(\sigma) \quad \text{где некоторый } u \in N^*$$

$$\text{вспомогат. } \sigma^\vee \subset N^* \Rightarrow$$

$$\mathbb{C}[U(\sigma)]^G \cong \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap N^*] = A_\sigma = \mathbb{C}[V_\sigma]$$

$$\prod_{i=1}^m z_i^{u_i} \mapsto \chi^u \quad \text{и так, } U(\sigma)/G \cong V_\sigma$$

$$\text{Нужно проверить, что } U(\sigma)/G \cong V_\sigma \text{ эквивалентно } U(\Sigma)/G \cong V_\Sigma$$

$$\text{т.е. } \forall \tau \text{ части } \tau \subset \sigma \text{ надо проверить } \mathbb{C}[U(\sigma)]^G \rightarrow \mathbb{C}[U(\tau)]^G$$

$$\cong \downarrow \quad \cong \downarrow$$

$$\tau = \sigma \cap u^\perp \quad u \in \sigma^\vee \cap N^* \quad \mathbb{C}[V_\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[V_\tau]$$

$$z(u) = \prod_{i=1}^m z_i^{u_i}$$

$$\text{Покажем } \langle u, \lambda_i \rangle > 0 \text{ или } i \in g(\sigma) \setminus g(\tau)$$

$$\langle u, \lambda_i \rangle = 0 \text{ или } i \in g(\tau)$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}[U(\tau)] = \mathbb{C}[U(\sigma)]_{z(u)} \Rightarrow \mathbb{C}[U(\tau)]^G = \mathbb{C}[U(\sigma)]_{z(u)}^G$$

$$\mathbb{C}[V_\tau] = \mathbb{C}[V_\sigma]_{\chi^u} \quad \text{Действие } \mathbb{C}[U(\sigma)]^G \rightarrow \mathbb{C}[U(\sigma)]_{z(u)}^G$$

$$\downarrow \quad \downarrow \cong$$

$$U(\Sigma)/G \cong V_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma \quad \mathbb{C}[V_\sigma] \rightarrow \mathbb{C}[V_\sigma]_{\chi^u}$$

а) докажем

Для дока-во δ) нужно проверить, что

Σ - симплис. $\Leftrightarrow$ все G -орбиты замкнуты

$$\Leftrightarrow \text{пусть } \Sigma \text{ - симплис. бёр, рассмотрим } Gz \text{ где } z \in U(\Sigma)$$

$$\text{пусть } \{w^{(k)} : k=1, 2, \dots\} \text{ - послед. точек в } Gz, \exists \lim_{k \rightarrow \infty} w^{(k)} = w$$

$$\Rightarrow w \in Gz$$

$$w^{(k)} = g^{(k)} z \quad g^{(k)} \in G, \text{ докажем, что } \exists \lim_{k \rightarrow \infty} g^{(k)} = g$$

$$\text{Тогда } \lim_{k \rightarrow \infty} w^{(k)} = g z \in Gz$$

$$g^{(k)} = (g_1^{(k)}, \dots, g_m^{(k)}) = (e^{\alpha_1^{(k)} + i\beta_1^{(k)}}, \dots, e^{\alpha_m^{(k)} + i\beta_m^{(k)}}) \in G \subset (\mathbb{C}^x)^m$$

$$\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)} \in \mathbb{R} \quad e^{i\beta_j^{(k)}} \in S^1 \text{ компактна}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} e^{i\beta_j^{(k)}} = e^{i\beta_j} \text{ (переход к подпослед-ти)}$$

$$\text{Рассм. } e^{\alpha_j^{(k)}} \text{ можно считать, что}$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j^{(k)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$$

Рассм

$$I_+ = \{j : \alpha_j \rightarrow +\infty\} \subset [m] \quad I_- = \{j : \alpha_j \rightarrow -\infty\} \subset [m]$$

$$\{w^{(k)} = g^{(k)} z\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} w = (w_1, \dots, w_m) \in U(\Sigma)$$

$$\Rightarrow z_j = 0 \text{ или } j \in I_+ \text{ и } w_j = 0 \text{ или } j \in I_-$$

$$z, w \in U(\Sigma) = U(K_\Sigma) \Rightarrow I_+, I_- \in K_\Sigma, I_+ \cap I_- = \emptyset$$

$$\text{Пусть } \sigma_+ \text{-кортеж } \subset g(\sigma_+) = I_+, \sigma_- \text{-кортеж } \subset g(\sigma_-) = I_-$$

$$\sigma_+ \cap \sigma_- = \{0\} \Rightarrow u \in N^* : \langle u, \lambda \rangle > 0 \quad \forall \lambda \neq 0 \in \sigma_+$$

$$\langle u, \lambda \rangle < 0 \quad \forall \lambda \neq 0 \in \sigma_-$$

$$G = \left\{ z \in (\mathbb{C}^x)^m : \prod_{i=1}^m z_i^{\langle \lambda_i, u \rangle} = 1 \quad \forall u \in N^* \right\}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j^{(k)} \langle \lambda_j, u \rangle = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \geq 0 \Rightarrow I_+ = I_- = \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j^{(k)} = \alpha_j \in \mathbb{R} \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle \lambda_j, u \rangle = 0$$

а-но для β_j

$$\Rightarrow (e^{\alpha_1 + i\beta_1}, \dots, e^{\alpha_m + i\beta_m}) = \lim_{k \rightarrow \infty} g^{(k)}$$

а

Предложение: а) если Σ - симплис. бёр, то

G -действие на $U(\Sigma)$ почти свободно

(т.е. все стабилизаторы конечны)

б) если Σ неосбдн, то $G \not\subset U(\Sigma)$ свободно

Док-во: стабилизатор точки $z \in \mathbb{C}^m$ отн-но

$$\text{действ. } (\mathbb{C}^x)^n \text{ есть}$$

$$(\mathbb{C}^x)^{\omega(z)} = \{ (t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^x)^m : t_i = 1, \text{ если } z_i \neq 0 \}$$

$$\omega(z) = \{ i \in [m] : z_i \neq 0 \}$$

$$\text{Стабилизатор } G_z = (\mathbb{C}^x)^{\omega(z)} \cap G$$

$$G = \ker(\exp \Lambda: (\mathbb{C}^x)^m \rightarrow \mathbb{C}_N^x)$$

$$\Rightarrow G_z = \ker \left((\mathbb{C}^x)^{\omega(z)} \hookrightarrow (\mathbb{C}^x)^m \rightarrow \mathbb{C}_N^x \right)$$

и подгруппа его подр.

$$\mathbb{Z}^{\omega(z)} \hookrightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\Lambda} N$$

- гомоморфизм, если Σ - симплис. бёр

$$\omega(z) \in K_\Sigma \Rightarrow \omega(z) = g(\sigma) \quad \sigma \text{ - симплис. кортеж}$$

$$\lambda_i : i \in g(\sigma) \text{ линейно независимы}$$

$$\Rightarrow G_z \text{ конечна}$$

$$\text{если } \Sigma \text{ неосбдн, то } \{ \lambda_i : i \in g(\sigma) \} \text{ - часть } N$$

$$\Rightarrow G_z = \{1\}$$

□

