$\mathcal{Z}_K = \bigcup_{I \in I} (D^2, S^1)^I = \bigcup_{I \in K} (D^2)^I \times (S^1)^{[m] \setminus I}$

$(\mathbb{C}P^\infty, pt)^K = \bigcup_{I \in K} (\mathbb{C}P^\infty)^I \subset (\mathbb{C}P^\infty)^m = (BS^1)^m = BT^m$

Предложение: $ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{C}P^\infty, pt)^K$

Док-во. $ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K = (ES^1 \times_{S^1} D^2, ES^1 \times_{S^1} S^1)^K \longrightarrow$

$\xrightarrow{\simeq} (\mathbb{C}P^\infty, pt)^K$

Теорема: $H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_K) \cong \mathbb{Z}[K]$ $\left( = \dfrac{\mathbb{Z}[v_1, \dots v_m]}{(v_{i_1} \cdots v_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \notin K)} \right)$

Док-во: $H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_K) = H^*(ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K) =$

$= H^*((\mathbb{C}P^\infty, pt)^K)$

$(\mathbb{C}P^\infty, pt)^K \hookrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^m$ клет. подпр-во

$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^m) \longrightarrow H^*((\mathbb{C}P^\infty, pt)^K)$ сюръекция

$\quad \parallel$

$\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$

$\alpha_i > 0$ $\quad v_{i_1}^{\alpha_1} \cdots v_{i_k}^{\alpha_k} \longmapsto 0$, если $\{i_1 \dots i_k\} \notin K$

Т.е. $H^*((\mathbb{C}P^\infty, pt)^K) \cong \dfrac{\mathbb{Z}[v_1 \dots v_m]}{(v_{i_1} \dots v_{i_k} : \{i_1 \dots i_k\} \notin K)} = \mathbb{Z}[K]$ ☐

Пример: $K = \underset{1}{\cdot} \;\; \underset{2}{\cdot}$ $\quad \mathcal{Z}_K = S^3$

$S^3 \longrightarrow ET^2 \times_{T^2} S^3 \longrightarrow BT^2 = (\mathbb{C}P^\infty)^2$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$

$S^3 \longrightarrow (\mathbb{C}P^\infty, pt)^K = \mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$

$H^*_{T^2}(S^3) = H^*(\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty) = \dfrac{\mathbb{Z}[v_1, v_2]}{(v_1 v_2)}$

Задача:
hofibre
$(\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty)$
"fold map"
$X \vee X \to X$

---

$K = \partial P^*$

$\mathcal{Z}_P \longrightarrow M_P^{2n} = \mathcal{Z}_P / T^{m-n}$ $\quad \underset{\text{свобод}}{T^{m-n}} \subset T^m \curvearrowright \mathcal{Z}_K$

$T^n \curvearrowright$ $\quad T^n = T^m / T^{m-n} \curvearrowright$

Следствие: $H^*_{T^n}(M_P^{2n}) (= H^*_{(\mathbb{C}^\times)^n}(M_P^{2n})) \cong \mathbb{Z}[P]$

$\mathbb{Z}[P] = \dfrac{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}{(v_{i_1} \cdots v_{i_k} : F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing)}$

Док-во:

$ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_P = (ET^n \times ET^{m-n}) \times_{T^n \times T^{m-n}} \mathcal{Z}_P) =$

$= ET^n \times_{T^n} (ET^{m-n} \times_{T^{m-n}} \mathcal{Z}_P) \simeq ET^n \times_{T^n} (\mathcal{Z}_P / T^{m-n})$ ☐

Теорема: $H^*(M^{2n}) = \dfrac{\mathbb{Z}[v_1 \dots v_m]}{I + J} = \dfrac{\mathbb{Z}[P]}{J}$ $\quad \deg v_i = 2$

где $J = p^* H^{>0}(BT^n)$ $\quad M^{2n} \to ET^n \times_{T^n} M^{2n} \xrightarrow{p} BT^n$

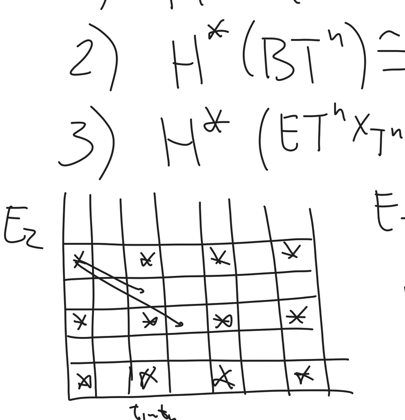
Док-во. рассм. спектр. посл-ть для

1) $H^{odd}(M^{2n}) = 0$ (т.к. там клетки только в чётных разм.)

2) $H^*(BT^n) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ В частности, $H^{odd}(BT^n) = 0$

3) $H^*(ET^n \times_{T^n} M^{2n}) \cong \mathbb{Z}[P]$

$E_2$



$t_1 \dots t_n$

$E_2 = H^*(M^{2n}) \otimes H^*(BT^n) = E_\infty$ (вырождается)

$p^* : H^*(BT^n) \longrightarrow H^*(ET^n \times_{T^n} M^{2n})$ инъективно

$H^*(M^{2n}) = \dfrac{H^*(ET^n \times_{T^n} M^{2n})}{p^* H^{>0}(BT^n)}$ ☐

$p^* : H^*(BT^n) \xrightarrow{B\Lambda^*} H^*(BT^m) \longrightarrow H^*(ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_P) = \mathbb{Z}[P]$

$\Lambda : T^m \to T^n$, $\quad \Lambda : \mathbb{Z}^m \to N$

$e_i \longmapsto \lambda_i$ обр. $1$-конус

$u \in H^2(BT^n) = N$

$p^*(u) = \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_i, u \rangle v_i$ $\quad \Lambda = n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_i & \end{pmatrix}$ хар. матрица

$J = (\lambda_{p1} v_1 + \dots + \lambda_{pm} v_m, \; p = 1, \dots, n)$

---

## Алгебраическая фактор-конструкция

$G$ аффинная ал. группа ($G \times G \to G$ алг.) $\curvearrowright X$ ал. мн-зии
(например, $G \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ тор)

Ал. мн-зие $Y$ наз. категорным фактор-пр-вом действия $G$ на $X$, если $\exists$ морфизм $\pi : X \to Y$, постоянный на орбитах и обладающий универс. св-вом

$X \xrightarrow{\varphi} Z$ пост. на орбитах

$\pi \downarrow \quad \exists! \hat{\varphi}$

$Y$

$Y = X /\!/ G$ – обозначение

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ – аффинное $\quad A = \mathbb{C}[X]$

$\mathbb{C}[X]^G$ – алгебра $G$-инвар. ф-ций $\quad f(g \cdot x) = f(x) \; \forall g$

Если $G$ – редуктивная группа (например, тор), то $\mathbb{C}[X]^G$ кон. порожд.

и тогда $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]^G = X /\!/ G$ (универс. св-во для $\pi : X \to X /\!/ G$ двойствен к $\mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$)

сюръективен и индуцирует 1-1 соответствие

замкнутые орбиты $\longleftrightarrow$ точки $X /\!/ G$ $\quad \pi^{-1}(x)$ содержит единств. замкн. орбиту

В частности, если все $G$-орбиты замкнуты, то

$X /\!/ G = X / G$ "геометрический фактор"

Пример: $\mathbb{C}^\times$ действует на $\mathbb{C} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[z]$ умножением на скаляры

2 орбиты $\underset{\text{замкн.}}{\{0\}}$ и $\underset{\text{незамкнута}}{\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}}$

$\mathbb{C} /\!/ \mathbb{C}^\times = \operatorname{Spec} (\underbrace{\mathbb{C}[z]^{\mathbb{C}^\times}}_{\mathbb{C}}) = pt$ точка $\quad \mathbb{C} / \mathbb{C}^\times$ нехаусдорфово из 2 точек

Аналогично $\quad \mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^n = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ диагонально

$\mathbb{C}^n / \mathbb{C}^\times = \operatorname{Spec} \mathbb{C} =$ точка

Пусть теперь $X$ не обязательно аффинно

Пусть $\pi : X \to Y$ постоянен на $G$-орбитах

и $\exists$ аффинное покрытие $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$ :

$\pi^{-1}(V_\alpha) \subset X$ аффинные и $V_\alpha = \pi^{-1}(V_\alpha) /\!/ G$ категорный фактор

т.е. $\pi|_{\pi^{-1}(V_\alpha)} : \pi^{-1}(V_\alpha) \to V_\alpha$ двойствен к $\mathbb{C}[\pi^{-1}(V_\alpha)]^G \subset \mathbb{C}[\pi^{-1}(V_\alpha)]$

Тогда $Y = X /\!/ G$ – категорный фактор

Пример: пусть $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^2 \setminus 0$ диагонально

$\mathbb{C}^2 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[z_0, z_1]$, $\quad \mathbb{C}^2 \setminus 0 = U_0 \cup U_1$, где

$U_0 = \mathbb{C}^2 \setminus (z_0 = 0) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1])$

$U_1 = \mathbb{C}^2 \setminus (z_1 = 0) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[z_0, z_1^{\pm 1}])$

$U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^2 \setminus (z_0 z_1 = 0) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1^{\pm 1}])$

$\mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[\frac{z_1}{z_0}]$, $\quad \mathbb{C}[z_0, z_1^{\pm 1}] = \mathbb{C}[\frac{z_0}{z_1}]$,

$\mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1^{\pm 1}]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[(z_1/z_0)^{\pm 1}]$

$V_0 = U_0 /\!/ \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}$, $V_1 = U_0 /\!/ \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}$, склеиваются по

$V_0 \cap V_1 = (U_0 \cap U_1) /\!/ \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}^\times$

Все $\mathbb{C}^\times$-орбиты в $\mathbb{C}^2 / 0$ замкнуты и

$(\mathbb{C}^2 \setminus 0) /\!/ \mathbb{C}^\times = (\mathbb{C}^2 \setminus 0) / \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}P^1$

Аналогично, $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0) / \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}P^n$

Пример: $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^2 \setminus 0$ $\quad \underset{\text{гипер.}}{\lambda \cdot (z_0, z_1) = (\lambda z_0, \lambda^{-1} z_1)}$

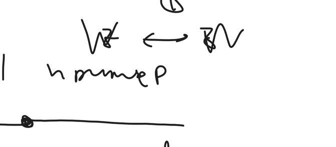
$\mathbb{C}^2 \setminus 0 = U_0 \cup U_1$

$\mathbb{C}[z_0^{\pm}, z_1]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[z_0 z_1]$, $\mathbb{C}[z_0, z_1^{\pm}]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[z_0 z_1]$, $\mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1^{\pm 1}]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[(z_0 z_1)^{\pm 1}]$

$\mathbb{C} \cup_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{C} = \mathbb{C}_{w_1} \sqcup \mathbb{C}_{w_2} / w_1 \sim w_2$ если $w_1 = w_2 \neq 0$ неотделимо

$w \leftrightarrow 1/w$

1 пример



$\mathbb{C}P^1$ хаус

2 пример



не хаус