$$\mathcal{Z}_P = T^m \times P/_{\approx} \xrightarrow{p_\Lambda} T^n \times P/_{\sim} = M^{2n}$$

$(t_1,x)\sim(t_2,x)$ — момент-угол-многообразие

$t_1 t_2^{-1} \subset \prod_{j=1}^{k} T_{i_j}$

$S^1 \cong T_{i_j}$ – (i_j)-я коорд. подгрупп. T^m

$(t_1,x)\sim(t_2,x)$ $x\in F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}$

$t_1 t_2^{-1} \in \prod_{j=1}^{k} T(\lambda_{i_j})$

$S^1 \cong T(\lambda_{i_j}) = \mathrm{Stab}\, D_{i_j}$ – инв. дивизор

λ_{i_j} – прим. обр. 1-конуса

Утв: p_Λ – главное расслоение со слоем $\mathrm{Ker}(\Lambda: T^m \to T^n) \cong T^{m-n}$

$\Lambda: T^m \to T^n = N\otimes S^1$

$e_i \mapsto \lambda_i$ $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ – обр. конусов

$\Lambda: \mathbb{Z}^m \to N$

$\mathcal{Z}_P = T^m\times P^n/_{\sim}$ – м-у-многообразие $T^m \curvearrowright \mathcal{Z}_P$

$p: \mathcal{Z}_P \to P = \mathcal{Z}_P/T^m$

v – вершина $\rightsquigarrow I^n_v \subset P$ n-мерный куб

$=P^n$ $p^{-1}(I_v)\cong (D^2)^n\times(S^1)^{m-n}$

$P^n = \bigcup_{v\in P} I_v$ $\mathcal{Z}_P = \bigcup_{\substack{\text{верш.}\\ v\in P^n}} (D^2)^n\times(S^1)^{m-n}$

Пусть теперь K – симплиц. комплекс на $[m]=\{1,2,\ldots,m\}$ $\varnothing\in K$

(например, $K=\partial P^*$)

$I=\{i_1\ldots i_k\}\in K$ – симплекс (грань) $(F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}\neq\varnothing$ в $P)$

$$T^m \curvearrowright \mathcal{Z}_K = \bigcup_{I\in K} \underbrace{(D^2)^I\times(S^1)^{[m]\setminus I}}_{\shortparallel} \subset (D^2)^m$$ момент-угол-комплекс

$D^2=\{z\in\mathbb{C}: |z|\leq 1\}$ $\{(z_1,\ldots,z_m)\in(D^2)^m : |z_i|=1$ если $i\notin I\}$

Примеры: 1. $K = \cdot_1\ \cdot_2$ $\mathcal{Z}_K = \underset{\{1\}}{D^2\times S^1}\cup\underset{\{2\}}{S^1\times D^2}\,(\cup S^1\times S^1) = \partial((D^2)^2)\cong S^3$

$P=I$ $S^3\cong\mathcal{Z}_P\to\mathbb{CP}^1=M^2$ рассл. Хопфа $S^3\cong\mathcal{Z}_P \xrightarrow{/T^1} M^2 \xrightarrow{/T^1} P=I$

2. $K = \triangle = \partial\Delta^2$ $\mathcal{Z}_K = \underbrace{D^2\times D^2\times S^1}_{\{12\}}\cup\underbrace{D^2\times S^1\times D^2}_{\{13\}}\cup\underbrace{S^1\times D^2\times D^2}_{\{23\}}\cong S^5$

$P=\Delta^2$ $S^5\cong\mathcal{Z}_P\to\mathbb{CP}^2=M^2$

3. $K = \square$ $\mathcal{Z}_K = \underset{1\ 2}{D^2\times D^2}\times S^1\times S^1\cup\underbrace{S^1\times D^2\times D^2\times S^1}_{23}\cup\ldots =$ $\boxed{\begin{matrix}\mathcal{Z}_{K_1 * K_2}\cong\mathcal{Z}_{K_1}\times\mathcal{Z}_{K_2}\\ \mathcal{Z}_{P_1\times P_2}\cong\mathcal{Z}_{P_1}\times\mathcal{Z}_{P_2}\end{matrix}}$

$m=4$, $n=2$ $\cong(\underset{1}{D^2}\times\underset{3}{S^1}\cup\underset{1}{S^1}\times\underset{3}{D^2})\times(\underset{2}{D^2}\times\underset{4}{S^1}\cup\underset{2}{S^1}\times\underset{4}{D^2})\cong S^3\times S^3$

$P=\square$ $\mathcal{Z}_P\cong S^3\times S^3 \longrightarrow M^4$ $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1\cong H_0$ $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$

$T^4\curvearrowright$ $T^2\curvearrowright$ $\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2\cong H_1$ $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$

$T^{m-n} = \mathrm{Ker}(T^m\xrightarrow{p_\Lambda}T^n)$ $\mathbb{Z}^m\to\mathbb{Z}^n$ $m=4$, $n=2$

4. $K = $ (пятиугольник) $T^5\curvearrowright\mathcal{Z}_K\cong(S^3\times S^4)^{\#5}$ (св. сумма 5 $S^3\times S^4$)

$\downarrow T^3$

$P=$ $T^2\curvearrowright M^4\cong\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2\#\overline{\mathbb{CP}}^2$

5. $K = \cdot_1\ \cdot_2\ \cdot_3$ $\mathcal{Z}_K = (\underset{1}{D^2}\times S^1\times S^1)\times(S^1\times\underset{2}{D^2}\times S^1)\cup(S^1\times S^1\times\underset{3}{D^2})\cong S^3\vee S^3\vee S^3\vee S^4\vee S^4$ (задача)

не соотв. P

Утв: $|K|\cong S^{n-1} \Rightarrow \mathcal{Z}_K$ – топологич. мн-вие

$\mathcal{Z}_K = \bigcup_{I\in I}(D^2)^I\times(S^1)^{[m]\setminus I}\subset(D^2)^m$ T D^2 D 1

$T^m \curvearrowright$

Эквивариантные когомологии

X – клет. пр-во G – комп. топологич. группа (или группа Ли)

$G\curvearrowright X$ $X/G \rightsquigarrow X'/G$ $X\simeq X'$ На X' G-действие свободно

$EG\to BG$ универсальное главное G-расслоение

$EG\simeq pt$ $G\curvearrowright EG$ свободно $EG/G =: BG$ классифицирующее пр-во

$G=O(n)$ $BO(n) = \bigcup_N Gr_n(\mathbb{R}^N) = Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$

$EO(n) = \bigcup_N V_n(\mathbb{R}^N)$ – мн-вие Штифеля

произв. комп. группа Ли $G\subset O(n)$

$EO(n)/O(n) = BO(n)$ $EO(n)/G = BG$

$G=S^1=O(2)=U(1)$ $S^\infty = \{(z_1,\ldots,z_N,0,\ldots)\in\mathbb{C}^\infty : \sum|z_i|^2=1\}$

$\boxed{\begin{matrix}S^\infty\\ \downarrow\\ \mathbb{CP}^\infty\end{matrix}}$ $= \bigcup_n S^{2n+1}$ $S^1\curvearrowright S^\infty$ $t\cdot(z_1,\ldots,z_N,0,\ldots) = (tz_1,\ldots,tz_N,0,\ldots)$

$=\bigcup_n\mathbb{CP}^n$ $S^\infty = ES^1\to BS^1=\mathbb{CP}^\infty$

T^m $ET^m=(S^\infty)^m\longrightarrow BT^m=(\mathbb{CP}^\infty)^m$

универсальное T^m-расслоение

$G\curvearrowright X$ $EG\to BG$ унив. G-расслоение

$X\rightsquigarrow X' = EG\times X\simeq X$

$G\curvearrowright EG\times X$ $g\cdot(e,x)=(eg^{-1},gx)$ левое G-действие на $EG\times X$

свободно

$EG\times_G X = EG\times X/_{\sim}$ $(eg,x)\sim(e,gx)$ $\forall g\in G$

$\shortparallel$

$B_G X$ конструкция Бореля

$$\begin{tikzcd} EG\times_G X \arrow[d] \arrow[dr] & \\ BG=EG/G & X/G \end{tikzcd}$$

лок. трив. расслоение со слоем X (ассоциированное с $EG\to BG$)

Опр: $H^n_G(X) := H^n(EG\times_G X)$

– группы G-эквивариантных когомологий G-пр-ва X

$T^m\curvearrowright\mathcal{Z}_K$ $H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_K)\cong\mathbb{Z}[K]$

Опр: пусть K – симплиц. комплекс на $[m]=\{1,2,\ldots,m\}$

$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]/I_K$, $\deg v_i=2$

где I_K – идеал, порождённый мономами $v_{i_1}\ldots v_{i_k}$: $\{i_1,\ldots,i_k\}\notin K$,

наз. кольцом граней (кольцом Стенли–Райснера)

Примеры: $\triangle = K$ $\mathbb{Z}[K]=\mathbb{Z}[v_1,v_2,v_3]/(v_1v_2v_3)$

$\mathbb{Z}[K]=\mathbb{Z}[v_1,v_2,v_3,v_4]/(v_1v_4,\ v_2v_3v_4)$ (образующие идеала – минимальные не грани)

Задача (Теорема Брунса–Губеладзе)

$\mathbb{Z}[K_1]\cong\mathbb{Z}[K_2]$ (изом. колец) $\Longrightarrow$ $K_1\cong K_2$ (изоморфизм)

Теорема $H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_K)\cong\mathbb{Z}[K]$

Конструкция (полиэдральное произведение)

K на $[m]$ $((X_1,A_1),\ldots,(X_m,A_m)) = (\underline{X},\underline{A})$ m пар клет. пр-в $A_i\subset X_i$

$I=\{i_1,\ldots,i_k\}\in[m]$ $(\underline{X},\underline{A})^I = \prod_{i=1}^m Y_i$, где $Y_i = \begin{cases}X_i, & \text{если } i\in I\\ A_i, & \text{если } i\notin I\end{cases}$

$I\subset J$ $(\underline{X},\underline{A})^I\subset(\underline{X},\underline{A})^J$

полиэдр. произв. $(\underline{X},\underline{A})^K = \mathrm{colim}_{I\in K}(\underline{X},\underline{A})^I = \bigcup_{I\in K}(\underline{X},\underline{A})^I\subset\prod_{i=1}^m X_i$

Примеры: 1. $(\underline{X},\underline{A})=(D^2,S^1)\Rightarrow(\underline{X},\underline{A})^K=(D^2,S^1)^K=\mathcal{Z}_K$ момент-угол-комплекс

2. $(\mathbb{C},\mathbb{C}^\times)^K = \bigcup_{I\in K}(\mathbb{C},\mathbb{C}^\times)^I = \bigcup_{I\in K}(\mathbb{C})^I\times(\mathbb{C}^\times)^{[m]\setminus I}$ Spec $A(\sigma)$ $\sigma=\mathbb{R}_{\geq}\langle e_{i_1},\ldots,e_{i_k}\rangle$

(задача 1.8) $I=\{i_1\ldots i_k\}$

$= \mathbb{C}^m\setminus\bigcup_{I\notin K}(z_{i_1}=\ldots=z_{i_k}=0) =: U(K)$

$\mathcal{Z}_K=(D^2,S^1)^K\hookrightarrow(\mathbb{C},\mathbb{C}^\times)^K=U(K)\xrightarrow[?]{\simeq}(D^2,S^1)^K$

T^m-эквивариантное вложение

Задача: $\exists$ эквивар. деформ. ретракция $U(K)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{Z}_K$

Например $K=\triangle$ $U(K)=\mathbb{C}^3\setminus(z_1=z_2=z_3=0)\longrightarrow S^5\cong\mathcal{Z}_K$

3. $A_i=pt$ $(\underline{X},pt)^K =: \underline{X}^K$ "полиэдральная степень"

$K=m$ точек $\{\varnothing,\{1\},\ldots,\{m\}\}$ $\Rightarrow(\underline{X},pt)^K = \underset{\{1\}}{X_1\times pt\times\ldots\times pt}\cup\underset{\{2\}}{pt\times X_2\times\ldots\times pt}\cup\ldots\cup pt\times pt\times\ldots\times X_m = X_1\vee X_2\vee\ldots\vee X_m$

$K=2^{[m]}=\Delta^{m-1}\Rightarrow(\underline{X},pt)^K = X_1\times\ldots\times X_m$

Предложение: $ET^m\times_{T^m}\mathcal{Z}_K\simeq(\mathbb{CP}^\infty,pt)^K = \bigcup_{I\in K}(\mathbb{CP}^\infty)^I$

Док-во:

$ET^m\times_{T^m}\mathcal{Z}_K = ET^m\times_{T^m}\Big(\bigcup_{I\in K}(D^2)^I\times(S^1)^{[m]\setminus I}\Big) =$

$= \bigcup_{I\in K}\Big(ET^m\times_{T^m}\big((D^2)^I\times(S^1)^{[m]\setminus I}\big)\Big) =$

$\Big(= (ES^1\times_{S^1}D^2,\ ES^1\times_{S^1}S^1)^K\Big) =$

$= \bigcup_{I\in K}\Big(\underbrace{ET^I\times_{T^I}(D^2)^I}_{\simeq BT^I}\Big)\times\Big(\underbrace{ET^{[m]\setminus I}\times_{T^{[m]\setminus I}}T^{[m]\setminus I}}_{\simeq pt}\Big)$

$\simeq\bigcup_{I\in K}BT^I\times pt = \bigcup_{I\in K}(\mathbb{CP}^\infty)^I = (\mathbb{CP}^\infty,pt)^I$ ∎

$$\begin{tikzcd} S(E)=S^\infty \arrow[r, hook] \arrow[d, "S^1"] & E \arrow[d, "D^2"] \\ \mathbb{CP}^\infty \arrow[r, hook] & \mathbb{CP}^\infty \end{tikzcd}$$

$ES^1\times_{S^1}D^2\to\mathbb{CP}^\infty$ S^∞ $\mathbb{CP}^{n-1}$ $\mathbb{CP}^n$

$$\begin{tikzcd} ES^1\times_{S^1}D^2 \arrow[r] & \mathbb{CP}^\infty=BS^1 \\ S^\infty\simeq ES^1\times_{S^1}S^1 \arrow[u, hook] \arrow[r] & pt \arrow[u, hook] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r] & D^2 \\ \mathbb{C}^\times \arrow[r] & S^1 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Утв: $\exists$ гомотопическ. расслое

$\mathcal{Z}_K\longrightarrow(\mathbb{CP}^\infty,pt)^K\longrightarrow(\mathbb{CP}^\infty)^m$

Док-во: $\mathcal{Z}_K\longrightarrow ET^m\times_{T^m}\mathcal{Z}_K\longrightarrow BT^m$ ∎

Пример: $K = \cdot\ \cdot$ $S^3 = \mathrm{hofib}\,(\mathbb{CP}^\infty\vee\mathbb{CP}^\infty\hookrightarrow\mathbb{CP}^\infty\times\mathbb{CP}^\infty)$

$\cong S(E\eta\oplus E\eta)$