Панов Тарас Евгеньевич

Тор — $T^n \cong \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n}$ $\qquad S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

Алг. тор $\quad (\mathbb{C}^\times)^n = \underbrace{\mathbb{C}^\times \times \dots \times \mathbb{C}^\times} \qquad \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\mathbb{C}^\times = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 z_2 = 1 \}$

$\mathbb{C}[\mathbb{C}^\times] = \mathbb{C}[z_1, z_2] / {z_1 z_2 = 1} = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$

Опр: торическое мн-зие — алгебраическое мн-зие V (над $\mathbb{C}$), содержащее ал. тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ в качестве открытого по Зарисскому подмн-ва таким образом, что действие $(\mathbb{C}^\times)^n$ на себе продолжается до действия на V.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^\times)^n \times (\mathbb{C}^\times)^n & \longrightarrow & (\mathbb{C}^\times)^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C}^\times)^n \times V & \longrightarrow & V \end{array} \qquad (t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$$

V - действие $(\mathbb{C}^\times)^n$ на V

Пример 0 $\quad V = (\mathbb{C}^\times)^n$ — торическое мн-зие

Пример 1 $\quad V = \mathbb{C}^n \qquad (\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
$\qquad t_1 \dots t_n \quad z_1 \dots z_n$

Пример 2 $\quad V = \mathbb{C}P^n \qquad (\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$
$[z_0 : \dots : z_n] \qquad (t_1, \dots, t_n), [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \longmapsto [z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_n z_n]$

$n=2$

Орбиты: 3 неподв. точки $[1:0:0], [0:1:0], [0:0:1]$
(0-мерные орбиты) $\qquad [0:t_1:0]$

3 одномерные орбиты $\quad \{[0:z_1:z_2]\}, \{[z_0:0:z_2]\}, \{[z_0:z_1:0]\}$
$z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$

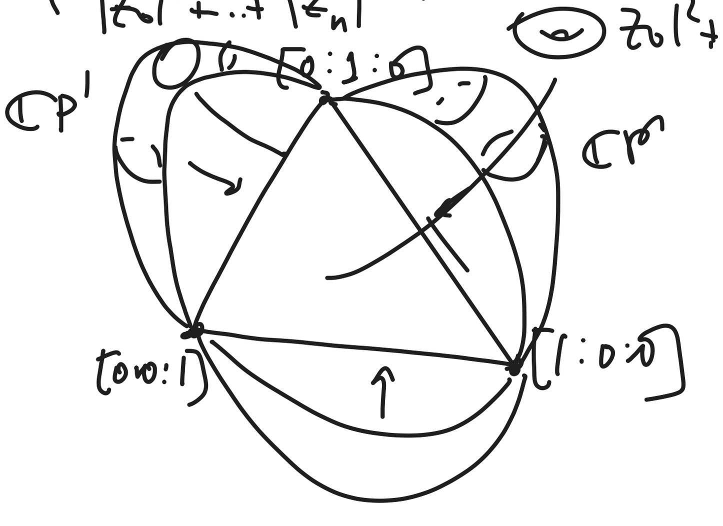
1 двумерная орбита $\quad \{[z_0:z_1:z_2]\} \cong (\mathbb{C}^\times)^2$
$z_0 \neq 0, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$

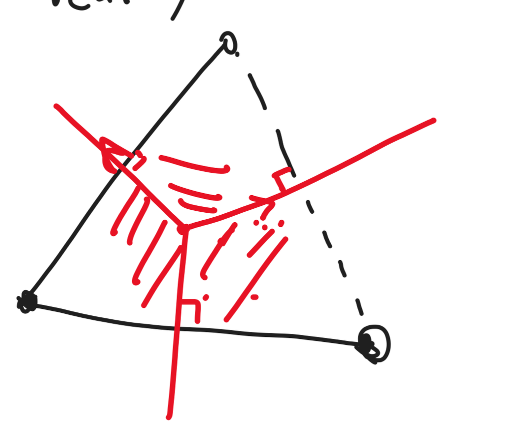
$\mathbb{C}P^n \xrightarrow{\pi} \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$[z_0 : z_1 : z_2 : \dots : z_n] \longmapsto \left(\frac{|z_0|^2}{|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2}, \dots, \frac{|z_n|^2}{|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2} \right)$

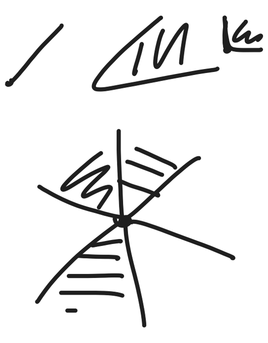
$n = 2$

$U_0 = ([z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 : z_0 \neq 0)$



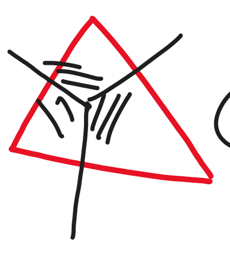


/ Конусы $\longleftrightarrow$ аффинные торические мн-зия



Веера $\longleftrightarrow$ торические мн-зия

нормальные веера многогранников $\longleftrightarrow$ проективные торические мн-зия



регулярные (неособые) веера $\longleftrightarrow$ неособые мн-зия

симплициальные веера $\qquad$ торические орбифолды

Конусы и веера /

N — решётка ранга n $\quad (N \cong \mathbb{Z}^n)$

$N_\mathbb{R} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ - объемлющее пр-во

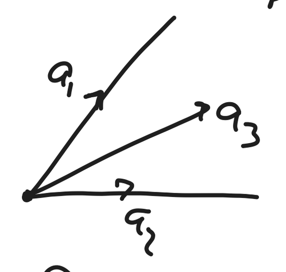
$\mathbb{C}^\times_N = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^\times$ - алг. тор $\cong (\mathbb{C}^\times)^n$

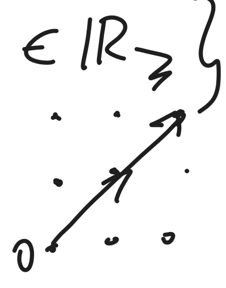
$T_N = N \otimes_\mathbb{Z} S^1$ - комп. тор $\qquad \mathrm{Lie}\, T_N = N_\mathbb{R}$

(Выпуклый полиэдральный) конус в $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$

$\sigma = \mathbb{R}_\geq \langle a_1, \dots, a_k \rangle = \{ \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k : \mu_i \in \mathbb{R}_\geq \}$
неотр. вещ. числа

$a_1, \dots, a_k$ — образующие конус

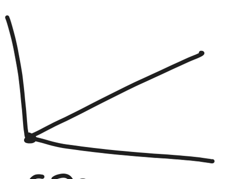




Конус наз. рациональным, если его образующие можно выбрать из N

Для рац. конуса однозначно опр-н набор примитивных образующих $a_1, \dots, a_k \in N$ $\quad a_i \neq l \hat{a}_i$, где $l \in \mathbb{Z}_{l>1}$ $\quad \hat{a}_i \in N$

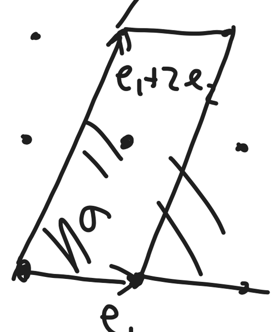
Конус σ наз. строго выпуклым, если он не содержит прямой
$\Updownarrow$
σ имеет единств. вершину



Далее все конусы рациональны и строго выпуклы

Конус наз симплициальным, если он порождён частью базиса $N_\mathbb{R}$

наз регулярным (неособым), если он порождён частью базиса N



$xy = z^2$

$\sigma = \mathbb{R}_\geq \langle e_1, e_1 + 2e_2 \rangle$ — симплиц. но не регулярный

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq \pm 1$