ЭКЗАМЕН ПО КУРСУ «ТОПОЛОГИЯ–3»
НМУ, ВЕСНА 2019 Г.

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Вычислите кольцо целочисленных когомологий 8-мерного многообразия $M = (S^3 \times S^5) \# (S^4 \times S^4)$ (связной суммы произведений сфер $S^3 \times S^5$ и $S^4 \times S^4$). Существуют ли ретракции $M \to S^2$ и $M \to S^4$?
2. Задайте в явном виде образующими и соотношениями кольцо $\mathbb{Z}_2$-когомологий грассманиана $G_3(\mathbb{R}^5)$.
3.
   а) Докажите, что $\mathbb{R}P^{10}$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{14}$ и вложить в $\mathbb{R}^{15}$.
   б) Докажите, что $\mathbb{C}P^4$ нельзя погрузить в $\mathbb{R}^{11}$.
4. Пусть $N \subset \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$ — комплексное 3-мерное подмногообразие, двойственной к первому классу Чженя $c_1(\mathcal{T}(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2)) \in H^2(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2)$. Вычислите характеристические числа
$$\langle c_1^3(N), [N] \rangle, \quad \langle c_1 c_2(N), [N] \rangle, \quad \langle c_3(N), [N] \rangle.$$
5. Вычислите кольцо целочисленных когомологий $H^*(\Omega\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ пространства петель на комплексной проективной плоскости.
6. Вычислите $H^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z}_2)$ и $H^*(K(\mathbb{Z}_2, 3); \mathbb{Z}_2)$ вплоть до размерности 6.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1.
$$H^*(M) \cong \Lambda[a,b] \otimes \mathbb{Z}[c,d]/(c^2 = d^2 = ac = ad = bc = bd = 0,\ ab = cd),$$
$\deg a = 3, \deg b = 5, \deg c = \deg d = 4$. Ретракция на S^4 существует, а на S^2 — нет.

2.
$$H^*(G_3(\mathbb{R}^5)) = H^*(G_2(\mathbb{R}^5)) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]/(w_4^\perp = w_5^\perp = 0) = \\ = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]/(w_1^4 + w_1^2 w_2 + w_2^2 = w_1^3 w_2 = 0).$$

3. а) $w(\mathbb{R}P^{10}) = (1+t)^{11} = (1+t^8)(1+t^2)(1+t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^8 + t^9 + t^{10}$, $w^\perp(\mathbb{R}P^{10}) = 1 + t + t^4 + t^5$, $w_5^\perp(\mathbb{R}P^{10}) \neq 0$.
б) $p(\mathbb{C}P^4) = (1+v^2)^5$, $p^\perp(\mathbb{C}P^4) = \frac{1}{(1+v^2)^5} = 1 - 5v^2 + 15v^4$, $p_2^\perp \neq 0$, значит нормальное расслоение имеет размерность $\geqslant 4$.

4. $c_1^3 = c_1 c_2 = 0$, так как $c_1(N) = 0$. Число c_3 можно вычисилить напрямую, либо воспользовавшись формулой $s_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3 = 3c_3$. Пусть $V = \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$, $\nu = \nu(i\colon N \hookrightarrow V)$ — нормальное расслоение. Имеем
$$\bigl\langle s_3(\mathcal{T}N), [N] \bigr\rangle = \bigl\langle -s_3(\nu) + i^* s_3(\mathcal{T}V), [N] \bigr\rangle = \bigl\langle \bigl(-c_1^3(\mathcal{T}V) + s_3(\mathcal{T}V)\bigr) c_1(\mathcal{T}V), [V] \bigr\rangle = \\ = \bigl\langle \bigl(s_3(\mathcal{T}V) c_1(\mathcal{T}V) - c_1^4(\mathcal{T}V)\bigr), [V] \bigr\rangle = \bigl\langle -c_1^4(\mathcal{T}V), [V] \bigr\rangle = \bigl\langle -(3u+3v)^4, [V] \bigr\rangle = -486.$$
Отсюда $\langle c_3(N), [N] \rangle = -162$.

5. Расслоение $S^1 \to S^5 \to \mathbb{C}P^2$ даёт гомотопическое расслоение $\Omega S^5 \to \Omega\mathbb{C}P^2 \to S^1$, которое тривиально (так как имеет сечение). Поэтому $\Omega\mathbb{C}P^2 \simeq S^1 \times \Omega S^5$ и
$$H^*(\Omega\mathbb{C}P^2) \cong \Lambda[u] \otimes \Gamma[x], \quad \deg u = 1, \deg x = 4,$$
где $H^*(\Omega S^5) \cong \Gamma[x]$ — алгебра разделённых степеней (про это было на лекциях). Тот же изоморфизм можно вывести непосредственно из спектральной последовательности расслоения путей-петель на $\mathbb{C}P^2$.