ЭКЗАМЕН ПО КУРСУ «ТОПОЛОГИЯ–2»
НМУ, ОСЕНЬ 2015 Г.

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Пусть $X = S^n \cup e^{n+1}$ — пространство, полученное из сферы S^n, $n \geqslant 1$, приклеиванием одной $(n+1)$-мерной клетки e^{n+1} по отображению $S^n \to S^n$ степени m. Вычислите группы гомологий и когомологий пространства X с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$, где p — простое.

2. а) Пусть X — дополнение к 3 координатным осям в $\mathbb{R}^3$:
$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \big(\{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\} \cup \{x_3 = x_1 = 0\}\big).$$
Опишите гомотопический тип X и вычислите его группы гомологий.

   б) Пусть Y — следующее дополнение к 5 трехмерным плоскостям в $\mathbb{R}^5$:
$$Y = \mathbb{R}^5 \setminus \big(\{x_1 = x_2 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 = 0\} \cup \{x_3 = x_4 = 0\} \cup \\ \cup \{x_4 = x_5 = 0\} \cup \{x_5 = x_1 = 0\}\big).$$
Докажите, что Y гомотопически эквивалентно поверхности рода 5 (сфере с 5 ручками).

3. Рассмотрим композицию отображений
$$S^1 \times S^1 \times S^1 \xrightarrow{q} (S^1 \times S^1 \times S^1)/\operatorname{sk}^2(S^1 \times S^1 \times S^1) = S^3 \xrightarrow{p} S^2,$$
где $\operatorname{sk}^2(S^1 \times S^1 \times S^1)$ обозначает 2-мерный остов 3-мерного тора $S^1 \times S^1 \times S^1$, а $p\colon S^3 \to S^2$ — расслоение Хопфа. Докажите, что эта композиция индуцирует тривиальный гомоморфизм как в гомотопических группах, так и в группах приведённых гомологий, но не гомотопна отображению в точку.

4. Пусть $w\colon S^{k+l-1} \to S^k \vee S^l$ — приклеивающее отображение для $(k+l)$-клетки произведения $S^k \times S^l$ со стандартной клеточной структурой (с 4 клетками). *Произведением Уайтхеда* сфероидов $f\colon S^k \to X$ и $g\colon S^l \to X$ называется сфероид, задаваемый композицией
$$[f, g]_w\colon S^{k+l-1} \xrightarrow{w} S^k \vee S^l \xrightarrow{f \vee g} X,$$
а также его класс в группе $\pi_{k+l-1}(X)$.

   а) Докажите, что $[f, g]_w$ лежит в ядре гомоморфизма Гуревича $h\colon \pi_{k+l-1}(X) \to H_{k+l-1}(X)$.

   б) Докажите, что $[f, g]_w$ лежит в ядре гомоморфизма надстройки $\Sigma\colon \pi_{k+l-1}(X) \to \pi_{k+l}(\Sigma X)$.

5. Опишите кольцо когомологий букета $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty$.

6. Вычислите $H^2(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^4; \mathbb{Z})$ и $H^3(\mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^4; \mathbb{Z})$.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1. Ненулевые группы целочисленных приведённых гомологий и когомологий суть

$$\widetilde{H}_n(X,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_m,\quad \widetilde{H}^{n+1}(X,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_m$$

Ненулевые группы (ко)гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ суть

$$\widetilde{H}_n(X,\mathbb{Z}_p)=\widetilde{H}_{n+1}(X,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p,\quad \widetilde{H}^n(X,\mathbb{Z}_p)=\widetilde{H}^{n+1}(X,\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p,$$

если p делит m; в противном случае все нулевые. Это следует из рассмотрения клеточного цепного комплекса, который имеет вид

$$\ldots\longrightarrow 0\longrightarrow \underset{n+1}{\mathbb{Z}}\xrightarrow{\cdot m}\underset{n}{\mathbb{Z}}\longrightarrow 0\longrightarrow\ldots$$

После тензорного умножения на $\mathbb{Z}_p$ гомоморфизм умножения на m становится нулевым, если p делит m, и изоморфизмом в противном случае.

2. а) Мы имеем

$$X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\cup\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times\cup\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}^\times=\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Пространство X деформационно ретрагируется на 1-остов куба $I^3=D^1\times D^1\times D^1$:

$$X\simeq D^1\times S^0\times S^0\cup S^0\times D^1\times S^0\cup S^0\times S^0\times D^1,$$

где $D^1=[-1,1]$, $S^0=\{-1,1\}$. Существование такой деформационной ретракции нуждается в дополнительном обосновании, так как пара (D^1,S^0) не является деформационным ретрактом пары $(\mathbb{R},\mathbb{R}^\times)$. Её можно построить по частям, как композицию нескольких ретракций, либо сразу задать минимаксной формулой :

$$f(x_1,x_2,x_3)=\Bigl(\frac{x_1}{\max\bigl\{|x_1|,\varepsilon(x_1,x_2,x_3)\bigr\}},\frac{x_2}{\max\bigl\{|x_2|,\varepsilon(x_1,x_2,x_3)\bigr\}},\frac{x_3}{\max\bigl\{|x_3|,\varepsilon(x_1,x_2,x_3)\bigr\}}\Bigr),$$

где

$$\varepsilon(x_1,x_2,x_3)=\min\bigl\{\max\{|x_1|,|x_2|\},\max\{|x_2|,|x_3|\},\max\{|x_3|,|x_1|\}\bigr\}.$$

1-остов куба гомотопически эквивалентен букету 5 окружностей (нужно стянуть любое максимальное дерево, которое содержит 7 рёбер). Таким образом, $H_0=\mathbb{Z}$, $H_1=\mathbb{Z}^5$.

б) Аналогично, имеем

$$Y=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\cup\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\cup\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times\cup\\ \cup\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\cup\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}.$$

Это пространство деформационно ретрагируется на следующий 2-мерный подкомплекс 5-мерного куба I^5:

$$Y'=D^1\times D^1\times S^0\times S^0\times S^0\cup S^0\times D^1\times D^1\times S^0\times S^0\cup S^0\times S^0\times D^1\times D^1\times S^0\cup\\ \cup S^0\times S^0\times S^0\times D^1\times D^1\cup D^1\times S^0\times S^0\times S^0\times D^1.$$

Это Y' — ориентируемая 2-мерная поверхность, склеенная из $8\times 5=40$ квадратов $D^1\times D^1$, которые сходятся по 5 в каждой вершине (так что общее число вершин равно $\frac{40\cdot 4}{5}=32$ — число вершин куба I^5). Так как в каждом ребре сходится по два квадрата, общее число рёбер равно $40\times 2 = 80$. Итак, эйлерова характеристика равна $40 - 80 + 32 = -8$, т. е. мы имеем поверхность рода 5.

3. Если $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — расслоение и $f\colon X \to E$ — такое отображение, что композиция $p\circ f\colon X \to B$ гомотопна отображению в точку, то существует поднятие $\widetilde{f}\colon X \to F$, $i\circ\widetilde{f} = f$. В нашем случае, если $p\circ q$ гомотопно отображению в точку, то получаем поднятие $\widetilde{q}\colon S^1\times S^1\times S^1 \to S^1$, т. е. q пропускается через окружность S^1, что невозможно, так как q индуцирует изоморфизм групп H_3.

4. а) Это следует из того, что w индуцирует нулевое отображение в гомологиях. Более подробно, пусть $\alpha \in \pi_{k+l-1}(S^{k+l-1})$ — образующая. Тогда $h([f,g]_w) = ([f,g]_w)_*(\alpha) = (f\vee g)_* w_*(\alpha) = 0$, так как $w_*\colon H_{k+l-1}(S^{k+l-1}) \to H_{k+l-1}(S^k\vee S^l) = 0$ при $k>1$ и $l>1$. При $k=l=1$ надо воспользоваться тем, что $[f,g]_w$ — коммутатор, а $h\colon \pi_1(X)\to H_1(X)$ — гомоморфизм абелианизации. При $k=1$, $l>1$ нужно убедиться, что степень отображения $S^l \xrightarrow{w} S^1\vee S^l \longrightarrow S^l$ равна нулю.

Можно также доказать, что гомоморфизм Гуревича коммутирует с гомоморфизмом надстройки, и воспользоваться пунктом б).

б) Надо воспользоваться тем, что $\Sigma(X\times Y)\simeq \Sigma X\vee\Sigma Y\vee\Sigma(X\wedge Y)$ для клеточных пространств. Эта задача была в прошлом семестре (см., например, Хатчер, предложение 4.I.1). В частности, $\Sigma(S^k\times S^l)\simeq S^{k+1}\vee S^{l+1}\vee S^{k+l+1}$. Это в означает, что $(k+l+1)$-мерная клетка в надстройке $\Sigma(S^k\times S^l)$ приклеивается по гомотопически тривиальному отображению $\Sigma w\colon S^{k+l}\to S^{k+1}\vee S^{l+1}$. Тогда $\Sigma[f,g]_w = \Sigma(f\vee g)\circ\Sigma w$ также гомотопно отображению в точку.

5. Ответ: $H^*(\mathbb{C}P^\infty\vee\mathbb{C}P^\infty)\cong\mathbb{Z}[v_1,v_2]/(v_1v_2)$, $\deg v_1=\deg v_2=2$.

Мы имеем $H^*(\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty)\cong\mathbb{Z}[v_1,v_2]$. Рассмотрим вложение клеточного подпространства $i\colon\mathbb{C}P_1^\infty\vee\mathbb{C}P_2^\infty\hookrightarrow\mathbb{C}P_1^\infty\times\mathbb{C}P_2^\infty$. Из рассмотрения клеточных коцепей вытекает, что гомоморфизм

$$\begin{array}{ccc}
H^4(\mathbb{C}P_1^\infty\times\mathbb{C}P_2^\infty) & \xrightarrow{i^*} & H^4(\mathbb{C}P_1^\infty\vee\mathbb{C}P_2^\infty)\\
\Big\| & & \Big\| \\
H^4(\mathbb{C}P_1^\infty)\oplus H^2(\mathbb{C}P_1^\infty)\otimes H^2(\mathbb{C}P_2^\infty)\oplus H^4(\mathbb{C}P_2^\infty) & \xrightarrow{i^*} & H^4(\mathbb{C}P_1^\infty)\oplus H^4(\mathbb{C}P_2^\infty)
\end{array}$$

отображает $H^4(\mathbb{C}P_1^\infty)$ и $H^4(\mathbb{C}P_2^\infty)$ тождественно, а группу $H^2(\mathbb{C}P_1^\infty)\otimes H^2(\mathbb{C}P_2^\infty)$, порождённую элементом v_1v_2 в нуль. Поэтому $i^*\colon H^*(\mathbb{C}P^\infty\times\mathbb{C}P^\infty)\to H^*(\mathbb{C}P^\infty\vee\mathbb{C}P^\infty)$ — эпиморфизм, ядро которого есть идеал, порождённый элементом v_1v_2.

6. Ответ: $H^2(\mathbb{R}P^4\times\mathbb{R}P^4;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ и $H^3(\mathbb{R}P^4\times\mathbb{R}P^4;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_2$.

Надо воспользоваться вычислением групп гомологий $H_1(\mathbb{R}P^4)=H_3(\mathbb{R}P^4)=\mathbb{Z}_2$, $H_2(\mathbb{R}P^4)=0$, формулой Кюннета

$$0\to\bigoplus_i H_i(\mathbb{R}P^4)\otimes H_{n-i}(\mathbb{R}P^4)\to H_n(\mathbb{R}P^4\times\mathbb{R}P^4)\to\bigoplus_i \operatorname{Tor}\bigl(H_i(\mathbb{R}P^4),H_{n-i-1}(\mathbb{R}P^4)\bigr)\to 0$$

и формулой универсальных коэффициентов

$$0\to\operatorname{Ext}(H_{n-1}(\mathbb{R}P^4),\mathbb{Z})\to H^n(\mathbb{R}P^4;\mathbb{Z})\to\operatorname{Hom}(H_n(\mathbb{R}P^4),\mathbb{Z})\to 0$$