ЭКЗАМЕН ПО КУРСУ «ТОПОЛОГИЯ–1»
НМУ, ВЕСНА 2015 Г.

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Пусть Z — пространство, получаемое из Y приклеиванием n-мерной клетки при помощи отображения $f\colon S^{n-1}\to Y$:
$$Z = Y \cup_f D^n = Y \sqcup D^n/\sim,$$
где $y \sim s$, если $y = f(s)$ и $s \in S^{n-1} = \partial D^n$, т.е. точки граничной сферы $S^{n-1} \subset D^n$ приклеиваются к их образам в Y при отображении f. Докажите, что если Y хаусдорфово, то Z также хаусдорфово.
2. а) Докажите, что не существует ретракции полнотория $D^2 \times S^1$ на его граничный тор $S^1 \times S^1$.
   б) Докажите, что не существует ретракции листа Мёбиуса M на его граничную окружность S^1.
3. Найдите фундаментальную группу k-мерного остова n-мерного симплекса $\varDelta^n$ при $n \geqslant k \geqslant 1$.
4. Найдите $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \varOmega\mathbb{R}P^2 \vee \varOmega\mathbb{R}P^3)$.
5. Пусть $X = D^3 \vee D^3$ — букет двух трёхмерных шаров (склеенных в точках их границ). Докажите, что любое непрерывное отображение $X \to X$ имеет неподвижную точку.
6. Пусть $f\colon X \vee X \to X$ — отображение «складывания», при котором каждое слагаемое букета отображается тождественно.
   а) Найдите гомотопический слой отображения $f\colon \mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$.
   б) Выразите гомотопический слой отображения $f\colon X \vee X \to X$ через известные вам операции над топологическими пространствами.

РЕШЕНИЯ

1. Прежде всего заметим, что $f(S^{n-1}) \subset Y$ замкнуто, так как S^{n-1} компактно, а Y хаусдорфово. Представим Z в виде объединения непересекающихся подмножеств
$$Z = (Y \setminus f(S^{n-1})) \sqcup f(S^{n-1}) \sqcup (D^n \setminus S^{n-1}),$$
из которых первое и третье открыты, а второе замкнуто.

   Пусть $z_1, z_2 \in Z$ — две различные точки. Предположим сначала, что ни одна из них не попала в $f(S^{n-1})$. Если $z_1 \in (Y \setminus f(S^{n-1}))$, то в качестве U_1 возьмём любое открытое множество, содержащее z_1, целиком лежащее в Y и не пересекающее $f(S^{n-1})$. Если $z_1 \in (D^n \setminus S^{n-1})$, то в качестве U_1 возьмём любое открытое множество, содержащее z_1, целиком лежащее в D^n и не пересекающее S^{n-1}. Аналогично определим U_2. Если же z_1 и z_2 попали в одно множество ($Y \setminus f(S^{n-1})$ или $D^n \setminus S^{n-1}$), то окрестности U_1 и U_2 нужно дополнительно выбрать непересекающимися (Y и D^n хаусдорфовы).

   Осталось рассмотреть случай, когда одна из точек z_1, z_2 попала в $f(S^{n-1})$. Тогда обе точки лежат либо в образе пространства Y, либо в образе пространства D^n при отображении проекции на фактор-пространство $Y \sqcup D^n \to Z = Y \sqcup D^n/\sim$. Непересекающиеся окрестности точек z_1, z_2 получаются из рассмотрения их непересекающихся окрестностей в Y или D^n.

2. а) Ретракция $S^1 \times S^1 \xrightarrow{i} D^2 \times S^1 \xrightarrow{r} S^1 \times S^1$ даёт гомоморфизмы фундаментальных групп $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, композиция которых тождественна, что невозможно.

   б) Ретракция $S^1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{r} S^1$ даёт гомоморфизмы фундаментальных групп $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, композиция которых тождественна, что невозможно.

3. При $k = 1$ — свободная группа с $C^2_{n+1} - n$ образующими, при $k > 1$ — нулевая. При $k = 1$ нужно построить максимальное дерево в полном графе с $n + 1$ вершиной и стянуть его. При $k > 1$ аккуратно воспользоваться теоремой о клеточной аппроксимации.

4. $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \Omega\mathbb{R}P^2 \vee \Omega\mathbb{R}P^3) = \pi_1(\mathbb{R}P^2) * \pi_1(\Omega\mathbb{R}P^2) * \pi_1(\Omega\mathbb{R}P^3) =$
$= \pi_1(\mathbb{R}P^2) * \pi_2(\mathbb{R}P^2) * \pi_2(\mathbb{R}P^3) = \pi_1(\mathbb{R}P^2) * \pi_2(S^2) * \pi_2(S^3) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$.

5. Заметим, что имеется ретракция $D^3 \vee D^3 \xrightarrow{i} D^3 \xrightarrow{r} D^3 \vee D^3$ (нужно поместить букет внутрь шара вдвое большего радиуса). Поэтому если отображение $f\colon D^3 \vee D^3 \to D^3 \vee D^3$ не имеет неподвижных точек, то отображение $i \circ f \circ r\colon D^3 \to D^3$ также не имеет неподвижных точек. Однако это невозможно согласно 3-мерной теореме Брауэра. 2-мерную теорему Брауэра мы доказали на лекциях, используя $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. 3-мерная теорема Брауэра доказывается аналогично, используя $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ (это мы также вывели на лекциях).

6. Ответ в а) — S^2, а в б) — $\Sigma\Omega X$. Из определения следует, что гомотопический слой отображения $f\colon X \to X \vee X$ есть пространство F, входящее в декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & PX \arrow[d] \\ X \vee X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

где $PX \to X$ — расслоение путей. Мы имеем $F \simeq PX \cup_{\Omega X} PX \simeq \Sigma\Omega X$.