

Геометрия и топология комплексных многообразий с действием тора

Т. Е. Панов

МИАН, МГУ, НИУ ВШЭ

VI Конференция математических центров России

Казань, 17–22 августа 2026

Конфигурации векторов и экспоненциальные действия

$V \cong \mathbb{R}^k$ – k -мерное векторное пространство

$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ **конфигурация** из m векторов в V^* .

Допускаются повторения, но всегда $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождает V^* .

Экспоненциальное действие V на $\mathbb{R}^m$:

$$V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = (e^{\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle} x_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle} x_m).$$

Классическая динамическая система, восходящая к Пуанкаре.

Линейные свойства конфигурации Γ определяют топологию слоения пространства $\mathbb{R}^m$ орбитами действия.

Экспоненциальные действия $V \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и их голоморфные аналоги возникают в ряде важных констукций алгебраической геометрии и топологии:

- пространства листов голоморфных слоений, пересечения вещественных и эрмитовых квадрик
(топология и голоморфная динамика)
- фактор-конструкция торических многообразий
(торическая геометрия)
- гладкие и комплексно-аналитические структуры на момент-угол-многообразиях и их частичных факторах
(комплексная геометрия и торическая топология)

Линейная двойственность Гейла

$\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ задаёт линейное отображение $\Gamma: \mathbb{R}^m \rightarrow V^*$, $e_i \mapsto \gamma_i$. Положим $W := \text{Ker } \Gamma$ и рассмотрим двойственные точные последовательности:

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Gamma} V^* \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\Gamma^*} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} W^* \longrightarrow 0,$$

где $\Gamma^* \mathbf{v} = (\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle, \dots, \langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle)$. Положим $\mathbf{a}_i := A(e_i)$.

Конфигурация векторов $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ в W^* называется **двойственной по Гейлу** к $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$. Двойственная к A есть Γ .

Выбрав базисы в V и W , зададим отображение Γ матрицей размера $k \times m$ со столбцами $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, а A матрицей размера $(m - k) \times m$ со столбцами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Тогда $A\Gamma^* = 0$, т.е. строки A образуют базис в пространстве линейных соотношений между $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Когда действие свободно и собственнo: условие веера

Для $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m] = \{1, 2, \dots, m\}$, подконфигурация $A_I = \{\mathbf{a}_i : i \in I\}$ лин. независима $\iff \Gamma_{\hat{I}} = \{\gamma_i : i \notin I\}$ порождает V^* .

Комплекс независимостей

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subset [m] : A_I \text{ лин. независима}\} = \{I \subset [m] : \Gamma_{\hat{I}} \text{ порождает } V^*\}.$$

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m] = \{1, \dots, m\}$ задаёт **дополнение набора координатных подпространств**:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_p\} \notin \mathcal{K}} \{\mathbf{x} : x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 0\}.$$

Предложение

Для любого подкомплекса $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\Gamma)$ ограничение экспоненциального действия $V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ на $U(\mathcal{K})$ свободно.

Пример

Рассмотрим два действия $V = \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$:

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^v x_1, e^v x_2), \quad (1)$$

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^v x_1, e^{-v} x_2). \quad (2)$$

$0 \in \mathbb{R}^2$ является неподвижной точкой,
и оба действия **свободны** на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Пространство орбит $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}$ действия (1) есть окружность
(гладкое многообразие).

Пространство орбит $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}$ действия (2) нехаусдорфово.

Действие (1) **собственно**, (2) — нет.

Собственные действия

Непрерывное действие $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$ топологической группы G на топологическом пространстве X **собственно**, если отображение

$$h: G \times X \rightarrow X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

собственно, т. е. $h^{-1}(C)$ компактно для компактного $C \subset X \times X$.

Собственность — ключевое свойство для действий некомпактных групп:

- орбиты собственного действия G на X замкнуты, стабилизаторы компактны, а пространство орбит X/G хаусдорфово;
- пространство орбит M/G гладкого, свободного и собственного действия группы Ли G на гладком многообразии M имеет единственную гладкую структуру, для которой проекция $M \rightarrow M/G$ является гладкой субмерсией.

Симплициальный веер Σ задаётся двумя данными:

- симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$;
- конфигурация векторов $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ в W^* такая, что для $I \in \mathcal{K}$ набор $A_I = \{a_i : i \in I\}$ линейно независим.

Обратно, набор конусов $\{\text{cone } A_I : I \in \mathcal{K}\}$ «склеивается» в веер Σ , если любые два конуса $\text{cone } A_I$ и $\text{cone } A_J$ пересекаются по общей грани. Тогда $\{\mathcal{K}, A\}$ — **триангулированная конфигурация** (или **задаёт веер** Σ).

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, а $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ и $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ — пара двойственных по Гейлу конфигураций.

Следующие условия эквивалентны:

- $\{\mathcal{K}, A\}$ — триангулированная конфигурация (задаёт веер);
- $\text{relint cone}(A_I) \cap \text{relint cone}(A_J) = \emptyset$ для любых $I, J \in \mathcal{K}$, $I \neq J$;
- $\text{relint cone}(\Gamma_{\hat{I}}) \cap \text{relint cone}(\Gamma_{\hat{J}}) \neq \emptyset$ для любых $I, J \in \mathcal{K}$.

Для экспоненциального действия

$$V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = (e^{\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle} x_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle} x_m).$$

имеем:

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$,
 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ и $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ — пара двойственных по Гейлу конфигураций в V^* и W^* . Тогда

- 1) действие $V \times U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K})$ свободно тогда и только тогда, когда A_I линейно независима для любого $I \in \mathcal{K}$;
- 2) действие $V \times U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K})$ собственно тогда и только тогда, когда данные $\{\mathcal{K}, A\}$ задают веер Σ .
- 3) пространство орбит $U(\mathcal{K})/V$ собственного действия компактно тогда и только тогда, когда веер Σ полный, т. е. $|\Sigma| = W^*$.

Момент-угол-комплекс

$\mathcal{K}$ — абстрактный симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$
 $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}$ — **симплекс (грань)**; всегда $\emptyset \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим m -мерный единичный полидиск:

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leq 1 \text{ при } i = 1, \dots, m\}.$$

Момент-угол-комплекс

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := (\mathbb{D}, \mathbb{S})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{D} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{S} \right) \subset \mathbb{D}^m,$$

где $\mathbb{S}$ — граница единичного диска $\mathbb{D}$.

На $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ имеется естественное действие тора T^m .

Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение сферы (например, граница симплициального многогранника), то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — топологическое многообразие, **момент-угол-многообразие**.

Пример

1. $\mathcal{K} =$  (граница треугольника). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{D} \times \mathbb{S} \times \mathbb{D}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}) = \partial(\mathbb{D}^3) \cong S^5.$$

2. $\mathcal{K} =$  (граница квадрата). Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^3 \times S^3$.

3. $\mathcal{K} =$  Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong (S^3 \times S^4) \# \dots \# (S^3 \times S^4)$ (5 слагаемых).

4. $\mathcal{K} =$  (три отдельные вершины). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{D} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{D}) \simeq S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$$

(не многообразие).

Определим открытое подмножество $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$ аналогично:

$$U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) := (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{C} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{C}^\times \right), \quad \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ — торическое многообразие, соответствующее вееру

$$\Sigma_{\mathcal{K}} = \{\mathbb{R}_{\geqslant} \langle \mathbf{e}_i : i \in I \rangle : I \in \mathcal{K}\},$$

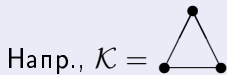
где $\mathbf{e}_i$ обозначает i -й стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^m$.

Теорема

$$a) \quad U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$$

(дополнение набора координатных подпространств);

$$6) \quad T^m\text{-эквивариантная деформационная ретракция } U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$



Напр., $\mathcal{K} =$  Тогда $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z_1 = z_2 = z_3 = 0\} \xrightarrow{\simeq} S^5 = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$

Теорема

Пусть $V \times U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \rightarrow U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ — экспоненциальное действие

$$(\mathbf{v}, z) \mapsto \mathbf{v} \cdot z = (e^{\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle} z_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle} z_m),$$

задаваемое полным симплициальным веером $\Sigma = \{\mathcal{K}, A\}$. Тогда

$$U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}},$$

т. е. факторпространство собственного экспоненциального действия T^m -эквиариантно гомеоморфно момент-угол-комплексу.

Следствие

Пусть $\mathcal{K}$ — подлежащий комплекс полного симплициального веера (*звёздчатая триангуляция сферы*). Тогда

- 1) момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}, \mathbb{S})^{\mathcal{K}}$ имеет структуру гладкого многообразия;
- 2) $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ имеют одинаковый гомотопический тип.

Голоморфные экспоненциальные действия

$\tilde{V} = (V, \mathcal{J}) \cong \mathbb{C}^\ell$, где $\mathcal{J}: V \rightarrow V$ — комплексная структура на $V \cong \mathbb{R}^{m-n}$ (предполагаем, что $m - n = 2\ell$ чётно).

$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ — конфигурация векторов в $\tilde{V}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\tilde{V}, \mathbb{C})$.
Комплексное билинейное спаривание $\tilde{V}^* \times \tilde{V} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle \gamma, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \gamma, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}} - i \langle \gamma, \mathcal{J} \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Голоморфное экспоненциальное действие $\tilde{V}$ на $\mathbb{C}^m$

$$\begin{aligned} \tilde{V} \times \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ (\mathbf{v}, \mathbf{z}) &\mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = (e^{\langle \gamma_1, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}} z_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{C}}} z_m). \end{aligned}$$

Ограничивая на $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$, получаем голоморфное действие комплексно-аналитической подгруппы

$$H = \{(e^{\langle \gamma_1, v \rangle_{\mathbb{C}}}, \dots, e^{\langle \gamma_m, v \rangle_{\mathbb{C}}}) : v \in \tilde{V}\} \subset (\mathbb{C}^{\times})^m$$

на

$$U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_p\} \notin \mathcal{K}} \{z : z_{i_1} = \dots = z_{i_p} = 0\}$$

Теорема

- (1) Голоморфное экспоненциальное действие $H \cong \mathbb{C}^{\ell}$ на $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$ свободно и собственнo тогда и только тогда, когда данные $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ задают симплициальный веер $\Sigma = A(\Sigma_{\mathcal{K}})$ в W^* .
- (2) Если веер Σ полный ($|\Sigma| = W^*$), то факторпространство $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/H$ эквивариантно гомеоморфно момент-угол-комплексу $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Таким образом, момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}, \mathbb{S})^{\mathcal{K}}$ наделяется структурой компактного комплексного многообразия, причём тор T^m действует голоморфными преобразованиями.

Пример (голоморфные торы)

Действие $H \cong \mathbb{C}$ на $\mathbb{C}^2$ задаётся конфигурацией $\{\gamma_1, \gamma_2\}$:

$$H = \{(e^{\gamma_1 v} z_1, e^{\gamma_2 v} z_2) : v \in \mathbb{C}\}, \quad (z_1, z_2) \mapsto (e^{\gamma_1 v} z_1, e^{\gamma_2 v} z_2).$$

Пусть $\mathcal{K} = \{\emptyset\}$ на $\{1, 2\}$, т.е. $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}^\times)^2$. Если $\mathbb{R}\langle\gamma_1, \gamma_2\rangle = \mathbb{R}^2$, то ограничение действия на $(\mathbb{C}^\times)^2$ свободно и собственнo. Факторпр-во

$$(\mathbb{C}^\times)^2 / \tilde{V} \cong \mathbb{C} / (\mathbb{Z}\langle\gamma_1, \gamma_2\rangle) \cong T^2$$

есть одномерный комплексный тор.

Более общо, пусть $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ — вещественный базис в $\tilde{V} \cong \mathbb{C}^\ell$. Тогда A — конфигурация из m нулей в $W^* = \{0\}$, $\mathcal{K} = \{\emptyset\}$ на $[m] = [2\ell]$ и $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}^\times)^m$. Фактор $(\mathbb{C}^\times)^m / H \cong \tilde{V} / \Lambda \cong T^{2\ell}$ есть голоморфный тор. Любой тор получается таким образом.

Предложение

Комплексное момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/H$ не кэлерово, если оно не является голоморфным тором.

Иррациональные торические многообразия

Пространство V **рационально** по отношению к $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, если

$$L = \{v \in V: \langle \gamma_k, v \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для } k = 1, \dots, m\}.$$

— решётка полного ранга в V ; тогда $L^* = \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle \subset V^*$.

Двойственная по Гейлу рациональная конфигурация векторов $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ порождает решётку $N = M^*$ в W^* .

Алгебраический тор $\mathbb{C}_L^\times = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times = V_{\mathbb{C}} / (2\pi i L)$ вкладывается в $(\mathbb{C}^\times)^m$ как замкнутая алгебраическая подгруппа

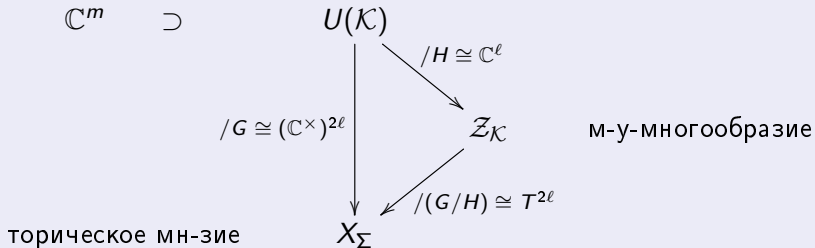
$$G = \exp \Gamma_{\mathbb{C}}^*(V_{\mathbb{C}}) = \exp(\text{Ker } A_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^m \rightarrow W_{\mathbb{C}}^*)$$

$$= \left\{ (t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m: \prod_{i=1}^m t_i^{\langle a_i, w \rangle} = 1, \quad w \in M \right\}.$$

Веер $\Sigma = A(\Sigma_{\mathcal{K}})$ рационален и задаёт **торическое многообразие**

$$X_{\Sigma} = U(\mathcal{K})/G = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}/F.$$

Рациональный случай:



Малая деформация векторной конфигурации A разрушает рациональность веера $\Sigma = \{K, A\}$, подгруппа $G \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ перестаёт быть замкнутой, замкнутые голоморфные торы в слоях расслоения $\mathcal{Z}_K \rightarrow \mathcal{X}_\Sigma$ «размыкаются», и расслоение превращается в **голоморфное слоение** $\mathcal{F}$ многообразия $\mathcal{Z}_K$ с листьями $F = G/H$.

Пары $(\mathcal{Z}_K, \mathcal{F})$ из комплексного многообразия и голоморфного слоения моделируют **иррациональные деформации** торических многообразий.

Базисные когомологии де Рама и Дольбо слоения $(\mathcal{Z}_K, \mathcal{F})$ описываются так же, как и когомологии торического многообразия $X_\Sigma = \mathcal{Z}_K/F$ в рациональном случае:

Теорема (Исида–Крутовский–П)

Имеет место изоморфизм алгебр:

$$H_{\text{bas}, \bar{\partial}}^{*,*}(\mathcal{Z}_K, \mathcal{F}) \cong \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/(I_K + J_\Sigma),$$

где $v_i \in H_{\text{bas}, \bar{\partial}}^{1,1}(\mathcal{Z}_K, \mathcal{F})$, $i = 1, \dots, m$,

I_K — идеал Стенли–Райснера, порождённый мономами

$$v_{i_1} \cdots v_{i_k}, \quad \text{где } \{i_1, \dots, i_k\} \notin K,$$

J_Σ — идеал, порождённый линейными формами

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{w} \rangle v_i, \quad \mathbf{w} \in W.$$

В рациональном случае член E_3 спектральной последовательности Бореля голоморфного главного расслоения $\mathcal{Z}_K \rightarrow X_\Sigma$ со слоем $F \cong T^{2\ell}$ даёт дга-модель для когомологий Дольбо $H_{\bar{\partial}}^{*,*}(\mathcal{Z}_K)$:

$$(H_{\bar{\partial}}^{*,*}(F) \otimes H_{\bar{\partial}}^{*,*}(X_\Sigma), d),$$

где $H_{\bar{\partial}}^{*,*}(X_\Sigma) \cong \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/(I_K + J_\Sigma)$ (Данилов),

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(F) = \Lambda(\tilde{V} \oplus \bar{\tilde{V}}) = \Lambda[\xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell]$$

$$\xi_j \in H_{\bar{\partial}}^{1,0}(F) = \tilde{V}, \eta_j \in H_{\bar{\partial}}^{0,1}(F) = \bar{\tilde{V}}, dv_j = d\eta_j = 0, d\xi_j = c(\xi_j),$$

$c: H_{\bar{\partial}}^{1,0}(F) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X_\Sigma)$ — отображение первого голоморфного класса Чженя (трангрессия). Аналогично, в иррациональном случае имеем:

Теорема (П–Устиновский, Крутовский–П)

Алгебра когомологий Дольбо многообразия $\mathcal{Z}_K$ есть

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(\mathcal{Z}_K) \cong H(\Lambda(\tilde{V} \oplus \bar{\tilde{V}}) \otimes H_{\text{bas}, \bar{\partial}}^{*,*}(\mathcal{Z}_K, \mathcal{F}), d),$$

где $d(\bar{\tilde{V}}) = 0$ и $d: \tilde{V} \rightarrow H_{\text{bas}, \bar{\partial}}^{1,1}(\mathcal{Z}_K, \mathcal{F})$ — класс Чженя слоения.

- [1] Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [2] Taras Panov, Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky. *Complex geometry of moment-angle manifolds*. Math. Zeitschrift 284 (2016), no. 1, 309–333.
- [3] Hiroaki Ishida, Roman Krutowski and Taras Panov. *Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds*. Internat. Math. Research Notices 2022 (2022), no. 7, 5541–5563.
- [4] Taras Panov. *Exponential actions defined by vector configurations, Gale duality, and moment-angle manifolds*. Bulletin of the London Mathematical Society 57 (2025), no. 9, 2571–2629.