Экспоненциальные действия, двойственность Гейла и момент-угол-многообразия

Т. Е. Панов

МГУ & НИУ ВШЭ

Конференция “Алгебраическая топология, гиперболическая геометрия и компьютерный анализ данных”

ФКН НИУ ВШЭ 27–29 ноября 2024

Конфигурации векторов и экспоненциальные действия

$V \cong \mathbb{R}^k$ – k-мерное векторное пространство
$\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ конфигурация из m векторов в V^*.
Допускаются повторения, но всегда $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ порождает V^*.

Экспоненциальное действие V на $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) &\mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \left(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle} x_1, \ldots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle} x_m\right). \end{aligned}$$

Классическая динамическая система, восходящая к Пуанкаре.
Линейные свойства конфигурации Γ определяют топологию слоения пространства $\mathbb{R}^m$ орбитами действия.

Приложения

Экспоненциальные действия $V \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ и их голоморфные аналоги возникают в ряде важных констукций алгебраической геометрии и топологии:

- пространства листов голоморфных слоений, пересечения вещественных и эрмитовых квадрик (топология и голоморфная динамика)
- фактор-конструкция торических многообразий (торическая геометрия)
- гладкие и комплексно-аналитические структуры на момент-угол-многообразиях и их частичных факторах (комплексная геометрия и торическая топология)

Пример

Рассмотрим два действия $V = \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$:

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^v x_1, e^v x_2), \tag{1}$$

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^v x_1, e^{-v} x_2). \tag{2}$$

$0 \in \mathbb{R}^2$ является неподвижной точкой,
и оба действия свободны на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Пространство орбит $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}$ действия (1) есть окружность (гладкое многообразие).

Пространство орбит $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}$ действия (2) нехаусдорфово.

Действие (1) собственно, (2) — нет.

Невырожденные листы (свободные орбиты)

Рассмотрим инвариантные открытые подмножества $U \subset \mathbb{R}^m$, состоящие из невырожденных листов слоения, т. е. для которых ограничение действия $V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ на U свободно.

Предложение

Орбита $V\boldsymbol{x}$ точки $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ под действием $V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ свободна тогда и только тогда, когда подмножество $\{\gamma_i \colon x_i \neq 0\} \subset \Gamma$ порождает пространство V^*.

Доказательство.

Пусть орбита $V\boldsymbol{x}$ несвободна, т. е. существует такой $\boldsymbol{v} \neq 0$, что

$$(x_1 e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle}, \ldots, x_m e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle}) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Тогда $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ при $x_i \neq 0$, т. е. векторы γ_i, для которых $x_i \neq 0$, не порождают V^*. Обратное утверждение аналогично. $\square$

Рассмотрим $[m] = \{1, \ldots, m\}$. Для каждого подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset [m]$ положим

$$\Gamma_I := \{\gamma_i \colon i \in I\} \subseteq \Gamma.$$

Положим $\widehat{I} := [m] \setminus I$ и

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subset [m] \colon \Gamma_{\widehat{I}} \text{ порождает } V^*\}.$$

Предложение

$\mathcal{K}(\Gamma)$ — симплициальный комплекс размерности $m - k - 1$, и все максимальные симплексы имеют такую размерность.

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$ задаёт дополнение набора координатных подпространств в $\mathbb{R}^m$:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_p\}\notin\mathcal{K}} \{\boldsymbol{x}\colon x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 0\}.$$

Например, если $\mathcal{K} = \{\varnothing\}$, то $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{R}^\times)^m$, где $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Если $\mathcal{K}$ состоит из всех собственных подмножеств в $[m]$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Предложение

Пусть

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subset [m]\colon \Gamma_{\widehat{I}} \text{ порождает } V^*\}.$$

Тогда для любого подкомплекса $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\Gamma)$ ограничение экспоненциального действия $V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ на $U(\mathcal{K})$ свободно.

Таким образом, $U(\mathcal{K})$ состоит из невырожденных листов слоения орбитами действия $V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ для любого $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\Gamma)$.

Линейная двойственность Гейла

$\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ задаёт линейное отображение $\varGamma\colon \mathbb{R}^m \to V^*$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto \gamma_i$. Положим $W := \operatorname{Ker} \varGamma$ и рассмотрим двойственные точные последовательности:

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varGamma} V^* \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\varGamma^*} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} W^* \longrightarrow 0,$$

где $\varGamma^* \boldsymbol{v} = (\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle, \dots, \langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle)$. Положим $\boldsymbol{a}_i := A(\boldsymbol{e}_i)$.

Конфигурация векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ в W^* называется двойственной по Гейлу к $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$. Двойственная к A есть Γ.

Выбрав базисы в V и W, зададим отображение $\varGamma$ матрицей размера $k \times m$ со столбцами $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, а A матрицей размера $(m-k) \times m$ со столбцами $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$. Тогда $A\varGamma^* = 0$, т. е. строки A образуют базис в пространстве линейных соотношений между $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Собственные действия

Непрерывное действие $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g\,x$ топологической группы G на топологическом пространстве X собственно, если отображение

$$h\colon G \times X \to X \times X, \qquad (g,x) \mapsto (g\,x, x)$$

собственно, т. е. $h^{-1}(C)$ компактно для компактного $C \subseteq X \times X$.

Собственность — ключевое свойство для действий некомпактных групп:

- орбиты собственного действия G на X замкнуты, стабилизаторы компактны, а пространство орбит X/G хаусдорфово;
- пространство орбит M/G гладкого, свободного и собственного действия группы Ли G на гладком многообразии M имеет единственную гладкую структуру, для которой проекция $M \to M/G$ является гладкой субмерсией.

Симплициальные конусы и веера

Предложение

Для $I \subset [m]$

$$\mathrm{A}_I \text{ линейно независима в } W^* \iff \Gamma_{\widehat{I}} \text{ порождает } V^*.$$

Симплициальный конус σ в W^* — линейные комбинации набора линейно независимых векторов с неотрицательными коэффициентами.
Симплициальный веер — конечный набор $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ симплициальных конусов, где грань каждого конуса из Σ лежит в Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них.

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ — образующие одномерных конусов (рёбер) веера Σ.
Подлежащий симплициальный комплекс

$$\mathcal{K}_\Sigma = \{I \subset [m] \colon \operatorname{cone}(\boldsymbol{a}_i \colon i \in I) \in \Sigma\}.$$

Симплициальный веер Σ задаётся двумя данными:

- симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$;
- конфигурация векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ в W^* такая, что для $I \in \mathcal{K}$ набор $\mathrm{A}_I = \{\boldsymbol{a}_i \colon i \in I\}$ линейно независим.

Обратно, набор конусов $\{\operatorname{cone} \mathrm{A}_I \colon I \in \mathcal{K}\}$ «склеивается» в веер Σ, если любые два конуса $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ и $\operatorname{cone} \mathrm{A}_J$ пересекаются по общей грани.
В этом случае скажем, что данные $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ задают веер Σ.

Имеется следующий критерий в терминах двойственности Гейла.

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$,
$\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ — пара двойственных по Гейлу конфигураций.
Следующие условия эквивалентны:

а) *Данные $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ задают веер Σ;*

б) $\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\mathrm{A}_I) \cap \operatorname{relint}\operatorname{cone}(\mathrm{A}_J) = \varnothing$ *для любых* $I, J \in \mathcal{K}$, $I \neq J$;

в) $\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$ *для любых* $I, J \in \mathcal{K}$.

Для экпонециального действия

$$V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \bigl(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle} x_1, \ldots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle} x_m\bigr).$$

имеем:

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ — пара двойственных по Гейлу конфигураций в V^* и W^*. Тогда

1) *действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ свободно тогда и только тогда, когда A_I линейно независима для любого $I \in \mathcal{K}$;*
2) *действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ собственно тогда и только тогда, когда данные $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ задают веер Σ.*
3) *пространство орбит $U(\mathcal{K})/V$ собственного действия компактно тогда и только тогда, когда веер Σ полный, т. е. $|\Sigma| = W^*$.*

Полиэдральные произведения

$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})=\{(X_1,A_1),\ldots,(X_m,A_m)\}$ — последовательность пар пространств, $A_i\subset X_i$.
$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]=\{1,2,\ldots,m\}$, $\qquad \varnothing\in\mathcal{K}$.

Для $I=\{i_1,\ldots,i_k\}\subset[m]$ положим

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I=Y_1\times\cdots\times Y_m,\qquad \text{где } Y_i=\begin{cases}X_i & \text{при } i\in I,\\ A_i & \text{при } i\notin I.\end{cases}$$

Полиэдральное произведение

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}\Bigl(\prod_{i\in I}X_i\times\prod_{j\notin I}A_j\Bigr)\subset\prod_{i=1}^m X_i.$$

Имеем $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}=\prod_{i=1}^m A_i$ для $\mathcal{K}=\{\varnothing\}$ и $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}=\prod_{i=1}^m X_i$, когда $\mathcal{K}$ — полный симплекс $\Delta[m]$ на m вершинах.

Пример

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_p\}\notin\mathcal{K}} \{\boldsymbol{x} \colon x_{i_1} = \cdots = x_{i_p} = 0\} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times)^{\mathcal{K}},$$

где $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Пример

Пусть $(X, A) = (D^1, S^0)$, где $D^1 = [-1, 1]$ — отрезок, $S^0 = \{1, -1\}$ — его граница. Вещественный момент-угол-комплекс

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Это кубический подкомплекс в m-кубе $(D^1)^m = [-1, 1]^m$.

Если $\mathcal{K}$ — m отдельных точек, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — 1-мерный остов куба $[-1, 1]^m$.

Если $\mathcal{K} = \partial\Delta[m]$, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = \partial[-1, 1]^m$.

Теорема

Пусть $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ *— экспоненциальное действие, задаваемое полным симплициальным веером* $\Sigma = \{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$. *Тогда*

$$U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{R}_{\mathcal{K}}.$$

Следствие

Пусть $\mathcal{K}$ *— подлежащий комплекс полного симплициального веера (звёздчатая триангуляция сферы). Тогда*

1) *вещественный момент-угол-комплекс* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ *имеет структуру гладкого многообразия;*
2) $U(\mathcal{K})$ *и* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ *имеют одинаковый гомотопический тип.*

Нормальные вееры и пересечения квадрик

Простой многогранник

$$P = \{\boldsymbol{w} \in W\colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w}\rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

Нормальный веер Σ_P:

- нормали $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ — образующие одномерных конусов;
- $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I \in \Sigma_P$, если гиперграни с нормалями $\boldsymbol{a}_i$, $i \in I$, имеют непустое пересечение.

Не любой полный симплициальный веер является нормальным веером многогранника!

Теорема

Пусть $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ *и* $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ *— двойственные по Гейлу конфигурации. Пусть* $\Sigma = \{\operatorname{cone} \mathrm{A}_I : I \in \mathcal{K}\}$ *— полный веер. Следующие условия эквивалентны:*

а) Σ *является нормальным веером многогранника;*

б) $\bigcap_{I \in \mathcal{K}} \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \neq \varnothing$.

При этом если $\delta \in \bigcap_{I \in \mathcal{K}} \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \neq \varnothing$, *то* Σ *является нормальным веером многогранника*

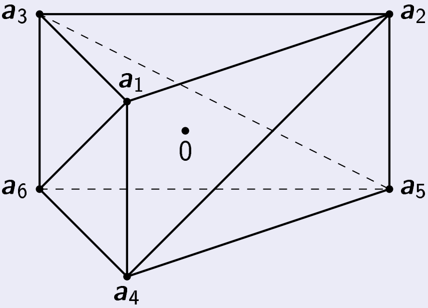
$$P = \{\boldsymbol{w} \in W : \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m\},$$

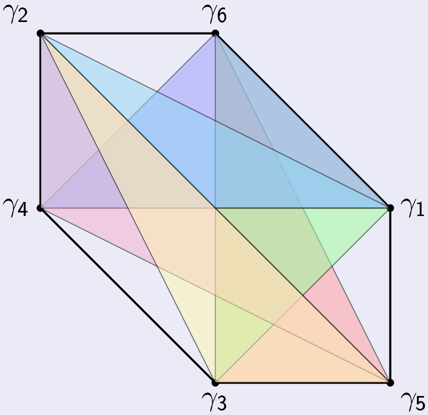
где $\delta = b_1\gamma_1 + \ldots + b_m\gamma_m$.

Т. е. данные $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ задают веер Σ, если двойственные по Гейлу конусы $\operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$, $I \in \mathcal{K}$, имеют попарные непустые пересечения, и задают нормальный веер, если их совокупное пересечение непусто.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varGamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$





Пересечения квадрик

$$\mu_\Gamma \colon \mathbb{R}^m \to V^*, \quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_1^2\gamma_1 + \cdots + x_m^2\gamma_m.$$

Теорема

Пусть $\Sigma = \{\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I \colon I \in \mathcal{K}\}$ *— нормальный веер многогранника* P, $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ *— двойственная по Гейлу конфигурация.* *Положим* $\delta = \sum_{i=1}^m b_i\gamma_i$. *Тогда*

- $\delta \in \bigcap_{I\in\mathcal{K}} \mathrm{relint}\,\mathrm{cone}\,\Gamma_{\widehat{I}}$;
- $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) \subset U(\mathcal{K})$;
- δ *— регулярное значение отображения* μ_Γ;
- *экспоненциальное действие* $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ *свободно и собственно, а пространство орбит* $U(\mathcal{K}_P)/V$ *диффеоморфно множеству уровня* $\mu_\Gamma^{-1}(\delta)$, *которое есть пересечение* k *квадрик:*

$$U(\mathcal{K}_P)/V \cong \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \colon \gamma_1 x_1^2 + \cdots + \gamma_m x_m^2 = \delta\}.$$

Голоморфные экспоненциальные действия

$V \cong \mathbb{C}^\ell$ комплексное пространство (снабдим $V \cong \mathbb{R}^k$ комплексной структурой при условии, что $k = 2\ell$ чётно).
$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ конфигурация векторов в V^*.

Голоморфное экспоненциальное действие V на $\mathbb{C}^m$

$$V \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$$
$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{z} = \big(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle} z_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle} z_m\big).$$

Если голоморфное действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ свободно и собственно (условие веера), то пространство орбит $U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2, S^1)^\mathcal{K}$ является комплексно-аналитическим многообразием (комплексное момент-угол-многообразие).

Получаем новое семейство некэлеровых комплексных многообразий, обобщающее серии многообразий Хопфа и Калаби–Экманна.

Ссылки

[1] Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] Taras Panov, Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky. *Complex geometry of moment-angle manifolds*. Math. Zeitschrift 284 (2016), no. 1, 309–333.

[3] Taras Panov. *Exponential actions defined by vector configurations, Gale duality, and moment-angle manifolds*. Preprint (2024), arXiv:2411.03366.