

Комплексная геометрия многообразий с действием тора

Т. Е. Панов

механико-математический факультет МГУ

8-я Международная молодежная летняя школа-конференция
по геометрическим методам математической физики
Красновидово, 2 июля 2021 г.

Момент-угол-комплекс (полиэдральное произведение)

\mathcal{K} — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$
 $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}$ — **симплекс**; всегда $\emptyset \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим m -единичный полидиск:

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leq 1 \text{ при } i = 1, \dots, m\}.$$

Момент-угол-комплекс


$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{D} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{S} \right) \subset \mathbb{D}^m,$$

где \mathbb{S} — граница единичного диска \mathbb{D} .


На $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ действует тор T^m .


Если \mathcal{K} — симплициальное разбиение сферы (например, граница симплициального многогранника), то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — топологическое многообразие, **момент-угол-многообразие**.


Пример

1. $\mathcal{K} =$  (граница треугольника). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{D} \times \mathbb{S} \times \mathbb{D}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}) = \partial(\mathbb{D}^3) \cong S^5.$$

2. $\mathcal{K} =$  (граница квадрата). Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^3 \times S^3$.

3. $\mathcal{K} =$  Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong (S^3 \times S^4) \# \dots \# (S^3 \times S^4)$ (5 экземпляров).

4. $\mathcal{K} =$  (три точки). Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{D} \times \mathbb{S}) \cup (\mathbb{S} \times \mathbb{S} \times \mathbb{D}) \simeq S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4$$

(не многообразии).

Аналогично определим открытое подмногообразие $U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$:

$$U(\mathcal{K}) := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{C} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{C}^\times \right), \quad \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Тогда $U(\mathcal{K})$ — торическое многообразие, соответствующее вееру

$$\Sigma_{\mathcal{K}} = \{ \mathbb{R}_{\geq 0} \langle \mathbf{e}_i : i \in I \rangle : I \in \mathcal{K} \},$$

где \mathbf{e}_i обозначает i -й стандартный базисный вектор в \mathbb{R}^m .

Теорема

$$a) \quad U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$$

(дополнение набора координатных подпространств);

$$b) \quad \text{Существует деформационная ретракция } U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$

Например, $\mathcal{K} = \triangle$ $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z_1 = z_2 = z_3 = 0\} \xrightarrow{\simeq} S^5 = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$

Комплексные структуры на момент-угол-многообразиях

Общий подход: реализовать деформационную ретракцию $U(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ как проекцию на пространство орбит голоморфного, свободного и собственного действия комплексно-аналитической подгруппы $H \subset (\mathbb{C}^\times)^m$, т. е. $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})/H$. Тем самым $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ наделяется структурой комплексного многообразия.

Пусть \mathcal{K} — триангуляция сферы, т. е. $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$. $|\mathcal{K}| \subset \mathbb{R}^n$ называется **звёздчатой** триангуляцией сферы, если существует такая точка $x \notin |\mathcal{K}|$, что любой луч из x пересекает $|\mathcal{K}|$ в единственной точке.

Выпуклая триангуляция \mathcal{K}_P является звёздчатой, но не наоборот!

\mathcal{K} является звёздчатой триангуляцией сферы тогда и только тогда, когда \mathcal{K} происходит из **полного симплициального веера** Σ .

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ — образующие 1-мерных конусов веера Σ .

$$q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{a}_i.$$

Положим $\mathbb{R}_{>}^m = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_i > 0\}$ и определим

$$R := \exp(\text{Ker } q) = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_{>}^m : \prod_{i=1}^m y_i^{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u} \rangle} = 1 \text{ для всех } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\},$$

$R \subset \mathbb{R}_{>}^m$ действует на $U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$ по координатам.

Теорема

Пусть Σ — полный симплициальный веер в \mathbb{R}^n с m одномерными конусами, и пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ соответствующий симплициальный комплекс. Тогда

- $R \cong \mathbb{R}^{m-n}$ действует на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственнo, так что $U(\mathcal{K})/R$ является гладким $(m+n)$ -мерным многообразием;
- $U(\mathcal{K})/R$ гомеоморфно $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ (T^m -эквиариантно).

Предположим, что $m - n$ чётно. Положим $\ell = \frac{m-n}{2}$.

Выберем линейное $\psi: \mathbb{C}^\ell \rightarrow \mathbb{C}^m$, удовлетворяющее двум условиям:

- а) $\text{Re} \circ \psi: \mathbb{C}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^m$ инъективно;
- б) $q \circ \text{Re} \circ \psi = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{C}^\ell & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}^m & \xrightarrow{\text{Re}} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{q} & \mathbb{R}^n \\
 & & \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} \\
 & & (\mathbb{C}^\times)^m & \xrightarrow{|\cdot|} & \mathbb{R}_{>}^m & \xrightarrow{\text{exp } q} & \mathbb{R}_{>}^n
 \end{array}$$

Теперь положим

$$H = \text{exp } \psi(\mathbb{C}^\ell) = \{ (e^{\langle \psi_1, \mathbf{w} \rangle}, \dots, e^{\langle \psi_m, \mathbf{w} \rangle}) \in (\mathbb{C}^\times)^m \},$$

где $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$.

Тогда $H \cong \mathbb{C}^\ell$ — комплексно-аналитическая (но не алгебраическая) подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^m$. Она действует на $U(\mathcal{K})$ голоморфно.

Пример (голоморфные торы)

Пусть \mathcal{K} — пустой комплекс на 2 элементах (две прозрачные вершины).
Имеем $n = 0$, $m = 2$, $\ell = 1$, и $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow 0$ — нулевое отображение.

Пусть $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ задано как $z \mapsto (z, \alpha z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда

$$H = \{(e^z, e^{\alpha z})\} \subset (\mathbb{C}^\times)^2.$$

Условие б) выше пустое, а условие а) эквивалентно $\alpha \notin \mathbb{R}$. Тогда $\exp \psi: H \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^2$ — вложение и $(\mathbb{C}^\times)^2/H$ есть комплексный тор $T_{\mathbb{C}}^1$ с параметром $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(\mathbb{C}^\times)^2/H \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \alpha\mathbb{Z}) = T_{\mathbb{C}}^1(\alpha).$$

Аналогично, если \mathcal{K} — пустой комплекс на 2ℓ элементах (т.е. $n = 0$, $m = 2\ell$), то любой комплексный тор $T_{\mathbb{C}}^\ell$ представляется как фактормногообразие $(\mathbb{C}^\times)^{2\ell}/H$.

Теорема (П.–Устиновский)

Пусть Σ — полный симплициальный веер в \mathbb{R}^n с m одномерными конусами, и пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ соответствующий симплициальный комплекс. Предположим, что $m - n = 2\ell$. Тогда

- а) голоморфное действие группы $H \cong \mathbb{C}^\ell$ на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственнo, тем самым на факторпространстве $U(\mathcal{K})/H$ задаётся структура компактного комплексного многообразия размерности $(m - \ell)$;
- б) имеется T^m -эквивариантный диффеоморфизм $U(\mathcal{K})/H \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, задающий комплексную структуру на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, в которой тор T^m действует голоморфными преобразованиями.

Обратно, пусть $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ допускает T^m -инвариантную комплексную структуру. Тогда действие T^m продолжается до голоморфного действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Подгруппа глобальных стабилизаторов

$$H = \{g \in (\mathbb{C}^\times)^m : g \cdot x = x \text{ для всех } x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\}.$$

$\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ — комплексное подпространство в $\text{Lie}(\mathbb{C}^\times)^m = \mathbb{C}^m$, причём

- a) $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{C}^m \xrightarrow{\text{Re}} \mathbb{R}^m$ инъективно;
- (b) $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m / \text{Re}(\mathfrak{h})$ переводит координатный веер $\Sigma_{\mathcal{K}}$ в полный веер $q(\Sigma_{\mathcal{K}})$ в $\mathbb{R}^m / \text{Re}(\mathfrak{h})$.

Теорема (Исида)

Любое комплексное момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ биголоморфно фактормногообразию $U(\mathcal{K})/H$.

Итак, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ допускает комплексную структуру $\Leftrightarrow \mathcal{K}$ происходит из полного симплицального веера (т. е. является звёздчатой сферой).

Пример (многообразия Хопфа)

Σ — полный веер в \mathbb{R}^n , конусы которого порождены собственными подмножествами векторов $e_1, \dots, e_n, -e_1 - \dots - e_n$.

Добавим 'пустой' 1-конус, чтобы $m - n$ стало чётным: $m = n + 2$, $\ell = 1$. Тогда $q: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ задаётся матрицей $(0 \ E \ -1)$, где E — единичная $n \times n$ -матрица, а $0, 1$ — столбцы из нулей и единиц.

Тогда $\mathcal{K} = \partial\Delta^n$ с $n + 1$ вершинами и 1 призрачной вершиной, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^1 \times S^{2n+1}$ и $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$.

Положим $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n+2}$, $z \mapsto (z, \alpha z, \dots, \alpha z)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда

$$H = \{(e^z, e^{\alpha z}, \dots, e^{\alpha z}) : z \in \mathbb{C}\} \subset (\mathbb{C}^\times)^{n+2},$$

и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ приобретает комплексную структуру как фактор $U(\mathcal{K})/H$:

$$\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \{(t, \mathbf{w}) \sim (e^z t, e^{\alpha z} \mathbf{w})\} \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \{\mathbf{w} \sim e^{2\pi i \alpha} \mathbf{w}\},$$

где $t \in \mathbb{C}^\times$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Это — **многообразие Хопфа**.

Голоморфное слоение на Z_K

Определим подалгебру Ли и соответствующую подгруппу Ли

$$\mathfrak{k} = \operatorname{Re}(\mathfrak{h}) \subset \mathbb{R}^m = \operatorname{Lie}(T^m), \quad K = \exp(\mathfrak{k}) \subset T^m.$$

Действие $K \subset T^m$ на $Z_K = U(K)/H$ почти свободно. Получаем голоморфное слоение \mathcal{F} на Z_K орбитами действия $K \cong K_{\mathbb{C}}/H$.

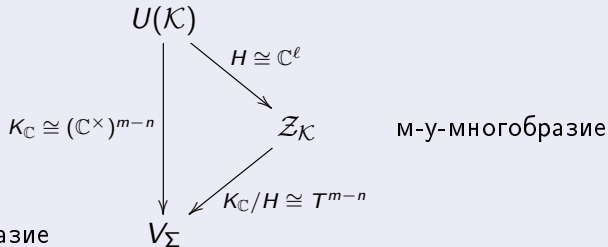
Если подпространство $\mathfrak{k} \subset \mathbb{R}^m$ рационально, то K является подтором в T^m , и полный симплициальный веер $\Sigma := q(\Sigma_K)$ является рациональным. Рациональный веер Σ определяет торическое многообразие

$$V_{\Sigma} = Z_K/K = U(K)/K_{\mathbb{C}}.$$

Голоморфное слоение на Z_K орбитами действия K превращается в голоморфное **расслоение Зейфорта** над торическим орбиобразом V_{Σ} со слоем компактный комплексный тор $K_{\mathbb{C}}/H \cong T^{m-n}$.

Рациональный случай:

$\mathbb{C}^m \supset$



Иррациональный случай:

Имеем $U(K) \xrightarrow{H} Z_K$,

и голоморфное слоение \mathcal{F} на Z_K орбитами действия $K \subset T^m$.

Голоморфное слоение (Z_K, \mathcal{F}) моделирует иррациональные («некоммутативные») торические многообразия в смысле [Katzarkov, Lupercio, Meersseman, Verjovsky] (arXiv:1308.2774) and [Ratiu, Zung] (arXiv:1705.11110).

Когомологии де Рама и Дольбо

Кольцо граней (кольцо Стенли–Райснера)

$$\mathbb{C}[\mathcal{K}] := \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m] / I_{\mathcal{K}} = \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m] / (v_{i_1} \cdots v_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}),$$

где $\mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]$ — алгебра многочленов, $\deg v_i = 2$, а $I_{\mathcal{K}}$ — идеал Стенли–Райснера.

Предложение

Кольцо T^m -эquivariantных когомологий

$$H_{T^m}^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H_{T^m}^*(U(\mathcal{K})) \cong \mathbb{C}[\mathcal{K}].$$

Торическое многообразие V_Σ является кэлеровым (эквивалентно, проективным или симплектическим) \Leftrightarrow веер Σ является нормальным веером неособого простого многогранника с вершинами в решётке.

Теорема (Данилов)

Кольцо когомологий Дольбо многообразия V_Σ есть

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(V_\Sigma) \cong \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m] / (I_\Sigma + J_\Sigma),$$

где $v_i \in H_{\bar{\partial}}^{1,1}(V_\Sigma)$, I_Σ — идеал Стенли–Райснера,

J_Σ — идеал, порождённый линейными формами $\sum_{k=1}^m \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{u} \rangle v_k$,

$\mathbf{a}_k = q(\mathbf{e}_k)$ — образующие 1-мерных конусов Σ , $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^m / \mathfrak{k})^*$.

Ненулевые числа Ходжа суть $h^{p,p}(V_\Sigma) = h_p$,

где $h(\Sigma) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ — **h -вектор** веера Σ .

Теорема (Бухштабер–П.)

Кольцо когомологий де Рама момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ есть

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{C}[\mathcal{K}], \mathbb{C}) \\ &\cong H(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{C}[\mathcal{K}], d) \quad du_i = v_i, \quad dv_i = 0 \\ &\cong H(\Lambda[t_1, \dots, t_{m-n}] \otimes H^*(V_{\Sigma}), d) \quad \Lambda[t_1, \dots, t_{m-n}] = H^*(K) \\ &\cong \bigoplus_{I \subset [m]} \tilde{H}^{*-|I|-1}(\mathcal{K}_I). \end{aligned}$$

Теорема (П.-Устиновский)

Пусть Σ — рациональный веер, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\mathcal{K}} V_{\Sigma}$ — голоморфное расслоение на торе. Тогда кольцо когомологий Дольбо многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ есть

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H(\Lambda[\xi_1, \dots, \xi_{\ell}, \eta_1, \dots, \eta_{\ell}] \otimes H_{\bar{\partial}}^{*,*}(V_{\Sigma}), d),$$

где $\Lambda[\xi_1, \dots, \xi_{\ell}, \eta_1, \dots, \eta_{\ell}] = H_{\bar{\partial}}^{*,*}(K)$, $\xi_j \in H_{\bar{\partial}}^{1,0}(K)$, $\eta_j \in H_{\bar{\partial}}^{0,1}(K)$,
 $dv_j = d\eta_j = 0$, $d\xi_j = c(\xi_j)$,

$c: H_{\bar{\partial}}^{1,0}(K) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{1,1}(V_{\Sigma})$ — отображение первого класса Чженя.

Следствие

- Спектральная последовательность Бореля голоморфного расслоения $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\mathcal{K}} V_{\Sigma}$ (сходящаяся к когомологиям Дольбо многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$) вырождается в члене E_3 .
- Спектральная последовательность Фрёлихера (с $E_1 = H_{\bar{\partial}}^{*,*}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, сходящаяся к $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$) вырождается в члене E_2 .

Трансверсально кэлеровы формы и аналитические подмножества

Комплексная структура на \mathcal{Z}_K задаётся двумя данными:

- полным симплициальным веером Σ с образующими $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$;
- ℓ -мерной голоморфной подгруппой $H \subset (\mathbb{C}^\times)^m$.

Если эти данные *общего положения* (в частности, веер Σ не является рациональным), то нет голоморфного главного расслоения $\mathcal{Z}_K \rightarrow V_\Sigma$ над торическим многообразием V_Σ .

Вместо этого имеется ℓ -мерное *слоение* \mathcal{F} , которое может допускать **трансверсально кэлерову форму** $\omega_{\mathcal{F}}$. Эту форму можно использовать для описания подмногообразий и аналитических подмножеств в \mathcal{Z}_K .

(1, 1)-форма $\omega_{\mathcal{F}}$ на комплексном многообразии $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ **транскверсально кэлерава** по отношению к слоению \mathcal{F} , если

- а) $\omega_{\mathcal{F}}$ замкнута, т. е. $d\omega_{\mathcal{F}} = 0$;
- б) $\omega_{\mathcal{F}}$ неотрицательна, и её нулевые подпространства совпадают с касательными к слоению \mathcal{F} .

Полный симплициальный веер Σ в \mathbb{R}^n **слабо нормален**, если существует (необязательно простой) n -мерный многогранник P , такой что Σ симплициальным подразбиением его нормального веера Σ_P .

Теорема (Вербицкий–П.–Устиновский)

Пусть Σ — слабо нормальный веер. Тогда на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})/H$ существует точная (1, 1)-форма $\omega_{\mathcal{F}}$, которая транскверсально кэлерава для слоения \mathcal{F} на плотном открытом подмножестве $(\mathbb{C}^{\times})^m/H \subset U(\mathcal{K})/H$.

Если транскверсально кэлерава форма существует на всём $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, то Σ является нормальным веером простого многогранника [Исида], а $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ задаётся пересечением эрмитовых квадрик.

Для каждого $J \subset [m]$ определено **координатное подмногообразие** в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J} = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} : z_i = 0 \text{ при } i \notin J\}.$$

Замыкание любой $(\mathbb{C}^\times)^m$ -орбиты в $U(\mathcal{K})$ имеет вид $U(\mathcal{K}_J)$ (в частности, плотная орбита соответствует $J = [m]$). Аналогично, замыкание любой $(\mathbb{C}^\times)^m/H$ -орбиты в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong U(\mathcal{K})/H$ имеет вид $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$.

Теорема (Вербицкий–П.–Устиновский)

Предположим, что комплексная структура на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})/C$ задаётся данными общего положения. Тогда любой дивизор на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является объединением координатных дивизоров.

Если веер Σ является слабо нормальным, то любое компактное неприводимое аналитическое подмножество $Y \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ положительной размерности является координатным подмногообразием.

Следствие

В общем положении на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ нет непостоянных мероморфных функций (т. е. его алгебраическая размерность равна нулю).

Базисные кохомологии

M — многообразии с действием связной группы Ли G , $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$.

$$\Omega(M)_{\text{bas}, G} = \{\omega \in \Omega(M) : \iota_{\xi}\omega = L_{\xi}\omega = 0 \text{ для любого } \xi \in \mathfrak{g}\},$$

$H_{\text{bas}, G}^*(M) = H(\Omega(M)_{\text{bas}, G}, d)$ — базисные кохомологии M .

$S(\mathfrak{g}^*)$ — симметрическая алгебра на \mathfrak{g}^* с образующими степени 2.

Модель Картана

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M)) = ((S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(M))^{\mathfrak{g}}, d_{\mathfrak{g}}),$$

где $(S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(M))^{\mathfrak{g}}$ обозначает подалгебру \mathfrak{g} -инвариантов.

Элемент $\omega \in \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$ есть « \mathfrak{g} -эквивариантное полиномиальное отображение из \mathfrak{g} в $\Omega(M)$ ». Дифференциал $d_{\mathfrak{g}}$ задаётся как

$$d_{\mathfrak{g}}(\omega)(\xi) = d(\omega(\xi)) - \iota_{\xi}(\omega(\xi)).$$

Теорема

$$H_{\text{bas}, G}^*(M) \cong H(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}(\Omega(M)), d_{\mathfrak{g}}).$$

Если группа G компактна, то

$$H_{\text{bas}, G}^*(M) \cong H_G^*(M) = H^*(EG \times_G M) \quad (\text{эквивариантные кохомологии}).$$

Рассмотрим \mathcal{Z}_K с действием K (голоморфное слоение \mathcal{F}).

Теорема (Исида–Крутовский–П.)

Имеем изоморфизм алгебр:

$$H_{\text{bas}, K}^*(\mathcal{Z}_K) \cong \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/(I_K + J_\Sigma),$$

где I_K — идеал Стенли–Райснера, порождённый мономами

$$v_{i_1} \cdots v_{i_k}, \quad \text{где } \{i_1, \dots, i_k\} \notin K,$$

а J_Σ — идеал, порождённый линейными формами

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u} \rangle v_i, \quad \text{где } \mathbf{u} \in (\mathbb{R}^m/\mathfrak{k})^*.$$

Если K замкнута (тор), т. е. веер Σ рационален, имеем

$$H_{\text{bas}, K}^*(\mathcal{Z}_K) = H^*(\mathcal{Z}_K/K) = H^*(V_\Sigma)$$

и теорема сводится к известному описанию когомологий полных неособых торических многообразий [Данилов–Юркевич].

Идея доказательства теоремы.

Положим $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T^m) \cong \mathbb{R}^m$ и рассмотрим модель Картана

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}(\Omega(\mathcal{Z}_K)) = ((S(\mathfrak{t}^*) \otimes \Omega(\mathcal{Z}_K))^{T^m}, d_{\mathfrak{t}}).$$

Тогда

$$H(\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}(\Omega(\mathcal{Z}_K))) = H_{T^m}^*(\mathcal{Z}_K) = \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/I_K.$$

Ключевая лемма: д.г. алгебра $\mathcal{C}_{\mathfrak{t}}(\Omega(\mathcal{Z}_K))$ формальна (квази-изоморфна своим когомологиям). □

- [1] Taras Panov and Yuri Ustinovsky. *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds*. Moscow Math. J. 12 (2012), no. 1, 149–172.
- [2] Taras Panov, Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky. *Complex geometry of moment-angle manifolds*. Math. Zeitschrift 284 (2016), no. 1, 309–333.
- [3] Hiroaki Ishida, Roman Krutowski and Taras Panov. *Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds*. Internat. Math. Research Notices, to appear, 2021.
- [4] Roman Krutowski and Taras Panov. *Dolbeault cohomology of complex manifolds with torus action*. arXiv:1908.06356.