

Полиэдральные произведения, прямоугольные группы Коксетера и гиперболические многообразия.

Тарас Евгеньевич ПАНОВ

Механико-математический факультет МГУ
ИППИ РАН

Декабрьские чтения в Томске
10–15 декабря 2019 г.

1. Предварительные сведения

Полиэдральное произведение

$(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$ — набор пар пространств, $A_i \subset X_i$.

\mathcal{K} — симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$, $\emptyset \in \mathcal{K}$.

Для $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = Y_1 \times \dots \times Y_m \quad \text{где } Y_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \in I, \\ A_i & \text{if } i \notin I. \end{cases}$$

\mathcal{K} -полиэдральное произведение набора (\mathbf{X}, \mathbf{A}) есть

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right) \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

Обозначение: $(X, A)^{\mathcal{K}} = (\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}}$, если $(X_i, A_i) = (X, A)$;

$X^{\mathcal{K}} = (\mathbf{X}, pt)^{\mathcal{K}}$, $X^{\mathcal{K}} = (X, pt)^{\mathcal{K}}$.

Категорный подход

Категория граней $\text{CAT}(\mathcal{K})$.

Объекты: симплексы $I \in \mathcal{K}$. Морфизмы: вложения $I \subset J$.

TOP категория топологических пространств.

Определим $\text{CAT}(\mathcal{K})$ -диаграмму

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\mathbf{X}, \mathbf{A}): \text{CAT}(\mathcal{K}) &\longrightarrow \text{TOP}, \\ I &\longmapsto (\mathbf{X}, \mathbf{A})^I, \end{aligned}$$

морфизм $I \subset J$ в $\text{CAT}(\mathcal{K})$ переходит во вложение пространств $(\mathbf{X}, \mathbf{A})^I \subset (\mathbf{X}, \mathbf{A})^J$.

Тогда имеем

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}} = \text{colim } \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \text{colim}_{I \in \mathcal{K}} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^I.$$

Пример

$(X, A) = (S^1, pt)$, где S^1 — окружность. Тогда

$$(S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (S^1)^I \subset (S^1)^m.$$

Если $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{m\}\}$ (дискретный комплекс из m точек), то полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathcal{K}}$ есть букет $(S^1)^{\vee m}$ из m окружностей.

Если \mathcal{K} состоит из всех собственных подмножеств в $[m]$ (т. е. $\mathcal{K} = \partial \Delta^{m-1}$ — граница симплекса), то $(S^1)^{\mathcal{K}}$ есть **толстый букет** m окружностей; он получается удалением m -мерной клетки из тора $(S^1)^m$.

Для общего комплекса \mathcal{K} на m вершинах, $(S^1)^{\vee m} \subset (S^1)^{\mathcal{K}} \subset (S^1)^m$.

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Тогда

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} := (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^I \subset \mathbb{R}^m.$$

Если \mathcal{K} — набор m точек, то $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ есть «решётка» в \mathbb{R}^m , состоящая из всех прямых, параллельных одной из координатных осей и проходящих через целые точки.

Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, то $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ есть объединение всех целочисленных гиперплоскостей, параллельных координатным гиперплоскостям.

Пример

$(X, A) = (\mathbb{R}P^\infty, pt)$, где $\mathbb{R}P^\infty = B\mathbb{Z}_2$. Тогда

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}P^\infty)^I \subset (\mathbb{R}P^\infty)^m.$$

Пример

$(X, A) = (D^1, S^0)$, где $D^1 = [-1, 1]$ и $S^0 = \{1, -1\}$.

Вещественный момент-угол-комплекс есть

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} := (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Это кубический подкомплекс в m -кубе $(D^1)^m = [-1, 1]^m$.

Если $\mathcal{K} = m$ точек, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 1-мерный остов куба $[-1, 1]^m$.

Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть граница куба $[-1, 1]^m$.

$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является топологическим многообразием, если $|\mathcal{K}|$ — сфера.

Четыре полиэдральных произведения из примеров выше входят в гомотопические расслоения

$$(\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_{\mathcal{K}} \longrightarrow (S^1)^{\mathcal{K}} \longrightarrow (S^1)^m,$$

$$(D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \mathcal{R}_{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{R}P^{\infty})^{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{R}P^{\infty})^m.$$

Аналогом полиэдрального произведения $\mathbf{X}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}_{I \in \mathcal{K}} \mathbf{X}^I$ в теории групп является следующая конструкция.

Граф-произведение

$\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_m)$ — набор из m групп, $G_i \neq \{1\}$.

Для $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$\mathbf{G}^I = \{(g_1, \dots, g_m) \in \prod_{k=1}^m G_k : g_k = 1 \text{ при } k \notin I\}.$$

Рассмотрим следующую $\operatorname{CAT}(\mathcal{K})$ -диаграмму групп:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\mathbf{G}) : \operatorname{CAT}(\mathcal{K}) \longrightarrow \operatorname{GRP}, \quad I \longmapsto \mathbf{G}^I,$$

где морфизм $I \subset J$ переходит в канонический мономорфизм $\mathbf{G}^I \rightarrow \mathbf{G}^J$.

Граф-произведение групп G_1, \dots, G_m есть

$$\mathbf{G}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\operatorname{GRP}} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\mathbf{G}) = \operatorname{colim}_{I \in \mathcal{K}}^{\operatorname{GRP}} \mathbf{G}^I.$$

Граф-произведение $\mathbf{G}^{\mathcal{K}}$ зависит только от 1-остова (графа) \mathcal{K} .
А именно,

Предложение

Имеем изоморфизм групп

$$\mathbf{G}^{\mathcal{K}} \cong \bigstar_{k=1}^m G_k / (g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } g_i \in G_i, g_j \in G_j, \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $\bigstar_{k=1}^m G_k$ — свободное произведение групп G_k .

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}$. Тогда $\mathbf{G}^{\mathcal{K}}$ есть **прямоугольная группа Артина** (**граф-группа, частично свободная группа**)

$$RA_{\mathcal{K}} = F(g_1, \dots, g_m) / (g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $F(g_1, \dots, g_m)$ — свободная группа с m образующими.

Если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$ — полный симплекс, то $RA_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}^m$.

Если $\mathcal{K} = m$ точек, мы получаем свободную группу F_m ранга m .

Пример

Пусть $G_i = \mathbb{Z}_2$. Тогда $\mathbf{G}^{\mathcal{K}}$ есть **прямоугольная группа Коксетера**

$$RC_{\mathcal{K}} = F(g_1, \dots, g_m) / (g_i^2 = 1, g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$

2. Классифицирующие пространства

Гомотопические расслоения $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \rightarrow (S^1)^{\mathcal{K}} \rightarrow (S^1)^m$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \rightarrow (\mathbb{R}P^{\infty})^{\mathcal{K}} \rightarrow (\mathbb{R}P^{\infty})^m$ обобщаются следующим образом.

Предложение

Существует гомотопическое расслоение

$$(EG, G)^{\mathcal{K}} \longrightarrow (BG)^{\mathcal{K}} \longrightarrow \prod_{k=1}^m BG_k.$$

Недостающая грань (минимальная негрань) комплекса \mathcal{K} — это такое подмножество $I \subset [m]$, что $I \notin \mathcal{K}$, но $J \in \mathcal{K}$ для любого $J \subsetneq I$.

\mathcal{K} называется **флаговым комплексом**, если любая его недостающая грань имеет две вершины. Эквивалентно, \mathcal{K} флаговый, если любой набор вершин в \mathcal{K} , которые попарно соединены рёбрами, является набором вершин симплекса.

Флаговый комплекс \mathcal{K} задаётся своим 1-остовом \mathcal{K}^1 .

Теорема (...)

Пусть $\mathbf{G}^{\mathcal{K}}$ — граф-произведение групп.

- 1 $\pi_1((B\mathbf{G})^{\mathcal{K}}) \cong \mathbf{G}^{\mathcal{K}}$.
- 2 Пространства $(B\mathbf{G})^{\mathcal{K}}$ и $(E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}}$ асферичны тогда и только тогда, когда \mathcal{K} флаговый. В этом случае $B(\mathbf{G}^{\mathcal{K}}) = (B\mathbf{G})^{\mathcal{K}}$.
- 3 $\pi_i((B\mathbf{G})^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i((E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}})$ при $i \geq 2$.
- 4 $\pi_1((E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}})$ изоморфна ядру канонической сюръекции $\mathbf{G}^{\mathcal{K}} \rightarrow \prod_{k=1}^m G_k$.

Доказательство

(1) Индукция: добавляем симплексы по одному и применяем теорему ван Кампена. База индукции: $\mathcal{K} = m$ точек. В этом случае $(B\mathbf{G})^{\mathcal{K}}$ есть букет $BG_1 \vee \cdots \vee BG_m$, а $\pi_1((B\mathbf{G})^{\mathcal{K}})$ есть свободное произведение $G_1 \star \cdots \star G_m$.

Доказательство

(2) Предположим, что \mathcal{K} не флаговый. Выберем недостающую грань $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset [m]$ с $k \geq 3$ вершинами. Рассмотрим $\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} : I \subset J\}$.

Тогда $(B\mathbf{G})^{\mathcal{K}_J}$ есть толстый букет пространств $\{BG_j, j \in J\}$ и является ретрактом пространства $(B\mathbf{G})^{\mathcal{K}}$.

Гомотопический слой вложения $(B\mathbf{G})^{\mathcal{K}_J} \rightarrow \prod_{j \in J} BG_j$ есть $\Sigma^{k-1}G_{j_1} \wedge \dots \wedge G_{j_k}$ — букет $(k-1)$ -мерных сфер.

Поэтому $\pi_{k-1}((B\mathbf{G})^{\mathcal{K}_J}) \neq 0$, где $k \geq 3$.

Итак, $(B\mathbf{G})^{\mathcal{K}_J}$, а значит и $(B\mathbf{G})^{\mathcal{K}}$, не асферично.

Оставшиеся утверждения (асферичность $(E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}}$ и утверждения (3) и (4)) вытекают из гомотопической последовательности расслоения $(E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}} \rightarrow (B\mathbf{G})^{\mathcal{K}} \rightarrow \prod_{k=1}^m BG_k$.

В частных случаях $G_k = \mathbb{Z}$ и $G_k = \mathbb{Z}_2$ получаем

Следствие

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Артина.

- 1 $\pi_1((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong RA_{\mathcal{K}}$.
- 2 Пространства $(S^1)^{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}}$ асферичны $\Leftrightarrow \mathcal{K}$ флаговый.
- 3 $\pi_i((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ при $i \geq 2$.
- 4 $\pi_1(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ изоморфна коммутанту $RA'_{\mathcal{K}}$.

Следствие

Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Коксетера.

- 1 $\pi_1((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong RC_{\mathcal{K}}$.
- 2 $(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ асферичны $\Leftrightarrow \mathcal{K}$ флаговый.
- 3 $\pi_i((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ при $i \geq 2$.
- 4 $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ изоморфна коммутанту $RC'_{\mathcal{K}}$.

Пример

Пусть \mathcal{K} есть m -цикл (граница m -угольника).

Простое рассуждение с эйлеровой характеристикой показывает, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ гомеоморфен ориентируемой поверхности рода $(m-4)2^{m-3} + 1$.

(Это наблюдение восходит к работе Коксетера 1938 г.)

Следовательно, коммутант соответствующей прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathcal{K}}$ есть группа поверхности.

Аналогично, если $|\mathcal{K}| \cong S^2$ (т. е. \mathcal{K} есть граница симплициального 3-мерного многогранника), то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 3-мерное многообразие. Следовательно, коммутант соответствующей группы $RC_{\mathcal{K}}$ есть фундаментальная группа 3-многообразия.

3. Структура коммутантов

Напомним, что

$$\text{Ker}\left(\mathbf{G}^{\mathcal{K}} \rightarrow \prod_{i=1}^m G_i\right) = \pi_1((E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}}).$$

В случае прямоугольных групп Артина и Коксетера (или если все группы G_i абелевы) группа выше есть коммутант $(\mathbf{G}^{\mathcal{K}})'$.

Мы изучим группу $\pi_1((E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}})$, определим, для каких \mathcal{K} эта группа свободна, и опишем набор образующих в общем случае.

Граф Γ называется **хордовым (триангулированным)**, если любой его цикл $s \geq 4$ вершинами содержит хорду.

Согласно классической теореме Фалькерсона–Гросса (Fulkerson–Gross), граф является хордовым тогда и только тогда, когда его вершины можно занумеровать так, что для любой вершины её меньшие соседи образуют полный подграф. (**Порядок полного исключения.**)

Теорема (Верёвкин–П.)

Следующие условия эквивалентны:

- 1 $\text{Ker}(\mathbf{G}^{\mathcal{K}} \rightarrow \prod_{k=1}^m G_k)$ — свободная группа;
- 2 $(E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентно букету окружностей;
- 3 \mathcal{K}^1 — хордовый граф.

Идея доказательства

(2) \Rightarrow (1) Так как $\text{Ker}(\mathbf{G}^{\mathcal{K}} \rightarrow \prod_{k=1}^m G_k) = \pi_1((E\mathbf{G}, \mathbf{G})^{\mathcal{K}})$.

(3) \Rightarrow (2) Индукция с использованием порядка полного исключения.

(1) \Rightarrow (3) Пусть \mathcal{K}^1 не хордовый. Бесхордовый цикл длины ≥ 4 даёт подгруппу в $\text{Ker}(\mathbf{G}^{\mathcal{K}} \rightarrow \prod_{k=1}^m G_k)$, изоморфную группе поверхности. Следовательно, $\text{Ker}(\mathbf{G}^{\mathcal{K}} \rightarrow \prod_{k=1}^m G_k)$ не является свободной группой.

Следствие

Пусть $RA_{\mathcal{K}}$ и $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольные группы Артина и Коксетера, соответствующие симплициальному комплексу \mathcal{K} .

- а) Коммутант $RA'_{\mathcal{K}}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда \mathcal{K}^1 — хордовый граф.
- б) Коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда \mathcal{K}^1 — хордовый граф.

Утверждение а) доказано в работе Servatius, Droms, Servatius.

Разница между а) и б) состоит в том, что коммутант $RA'_{\mathcal{K}}$ бесконечно порождён, за исключением случая $RA_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}^m$, в то время как коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ конечно порождён. Минимальный набор образующих даётся следующим результатом.

Групповой коммутатор $(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$.

Теорема (Верёвкин–П.)

Коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ имеет минимальный набор порождающих, состоящий из $\sum_{J \subset [m]} \text{rank } H_0(\mathcal{K}_J)$ вложенных коммутаторов вида

$$(g_j, g_i), \quad (g_{k_1}, (g_j, g_i)), \quad \dots, \quad (g_{k_1}, (g_{k_2}, \dots (g_{k_{m-2}}, (g_j, g_i)) \dots)),$$

где $k_1 < k_2 < \dots < k_{\ell-2} < j < i$, $k_s \neq i$ для любого s , и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1, \dots, k_{\ell-2}, j, i\}}$, не содержащей j .

Идея доказательства

Сначала рассмотрим случай $\mathcal{K} = m$ точек. Тогда $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 1-остов m -куба, а $RC'_{\mathcal{K}} = \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ — свободная группа ранга $\sum_{\ell=2}^m (\ell-1) \binom{m}{\ell}$. Это совпадает с числом вложенных коммутаторов в списке.

Затем исключаем лишние коммутаторы, используя коммутационные соотношения $(g_i, g_j) = 1$ для $\{i, j\} \in \mathcal{K}$.

Идея доказательства

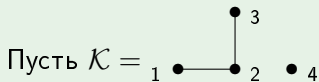
Чтобы показать, что данный набор образующих минимален, используем следующее рассуждение.

Имеем $H_1(\mathcal{R}_K) = RC'_K/RC''_K$. С другой стороны,

$$H_1(\mathcal{R}_K) \cong \sum_{J \subset [m]} \tilde{H}_0(K_J).$$

Поэтому число образующих абелевой группы $H_1(\mathcal{R}_K) \cong RC'_K/RC''_K$ есть $\sum_{J \subset [m]} \text{rank } \tilde{H}_0(K_J)$, что совпадает с числом вложенных коммутаторов в наборе образующих для RC'_K , описанном выше.

Пример



Тогда коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ есть свободная группа с базисом

$$\begin{aligned} & (g_3, g_1), (g_4, g_1), (g_4, g_2), (g_4, g_3), \\ & (g_2, (g_4, g_1)), (g_3, (g_4, g_1)), (g_1, (g_4, g_3)), (g_3, (g_4, g_2)), \\ & (g_2, (g_3, (g_4, g_1))). \end{aligned}$$

Пример

Пусть \mathcal{K} есть m -цикл с $m \geq 4$ вершинами.

Граф \mathcal{K}^1 не является хордовым, так что группа $RC'_{\mathcal{K}}$ не свободна.

В самом деле, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть ориентируемая поверхность рода

$(m-4)2^{m-3} + 1$, и $RC'_{\mathcal{K}} \cong \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ есть группа с одним соотношением.

Аналогичный результат [Grbic–P.–Theriault–Wu] описывает подалгебру-коммутант градуированной граф-алгебры Ли

$$L_{\mathcal{K}} = FL\langle u_1, \dots, u_m \rangle / ([u_i, u_i] = 0, [u_i, u_j] = 0 \text{ при } \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

где $FL\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ есть свободная градуированная алгебра Ли с образующими u_i степени один, а $[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$ — градуированная скобка Ли.

Подалгебра-коммутант есть ядро гомоморфизма алгебр Ли $L_{\mathcal{K}} \rightarrow CL\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ на коммутативную (тривиальную) алгебру Ли.

Граф-алгебра Ли $L_{\mathcal{K}}$ является граф-произведением аналогично прямоугольной группе Коксетера $RC_{\mathcal{K}}$.

Имеется аналогичное разложение в прямой предел (копредел), где группы $G_i = \mathbb{Z}_2$ заменяются на тривиальные алгебры Ли $CL\langle u \rangle = FL\langle u \rangle / ([u, u] = 0)$, и копредел берётся в категории градуированных алгебр Ли.

4. Прямоугольные многогранники и гиперболические многообразия

Пусть P — многогранник в n -мерном пространстве Лобачевского \mathbb{L}^n с прямыми углами между смежными гипергранями (**прямоугольный n -многогранник**).

RC_P — группа, порождённая отражениями в гипергранях P .
Это — **прямоугольная группа Коксетера**, задаваемая как

$$RC_P = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = 1, g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle,$$

где g_i — отражение относительно гипергранни F_i .

Группа RC_P действует на \mathbb{L}^n дискретно с конечными стабилизаторами и фундаментальной областью P .

Лемма (А. Ю. Веснин, 1987)

Рассмотрим эпиморфизм $\varphi: RC_P \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$, $k \geq n$. Подгруппа $\text{Ker } \varphi \subset RC_P$ не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений в любых n гипергранях с общей вершиной линейно независимы в \mathbb{Z}_2^k .

В этом случае группа $\text{Ker } \varphi$ действует на \mathbb{L}^n свободно.

$N = \mathbb{L}^n / \text{Ker } \varphi$ есть **гиперболическое n -многообразие**. Оно составлено из $|\mathbb{Z}_2^k| = 2^k$ экземпляров P и имеет риманову метрику построенной отрицательной кривизны. Кроме того, многообразие N асферично (является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\text{Ker } \varphi, 1)$), так как его универсальное накрытие \mathbb{L}^n стягиваемо.

Какие комбинаторные n -многогранники могут быть реализованы с прямыми углами в \mathbb{L}^n ? В размерности 3 имеется простой критерий, восходящий к работе Погорелова 1967 г.:

Theorem (Погорелов, Андреев)

Комбинаторный 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ допускает прямоугольную реализацию в \mathbb{L}^3 тогда и только тогда, когда он простой и не имеет 3- и 4-поясов из граней. Кроме того, такая реализация единственна с точностью до изометрии.

Мы называем такие 3-многогранники **многогранниками Погорелова**. Многогранник Погорелова не имеет 3- и 4-угольных граней. Класс многогранников Погорелова содержит все **фуллерены** (простые 3-многогранники, имеющие лишь 5- и 6-угольные грани).

Аналогичный критерий для прямоугольных многогранников в \mathbb{L}^4 неизвестен. При $n \geq 5$ прямоугольных многогранников в \mathbb{L}^n не существует [Никулин, Винберг].

Пусть дан прямоугольный многогранник P . Как найти эпиморфизм $\varphi: RC_P \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$, для которого $\text{Ker } \varphi$ действует на \mathbb{L}^n свободно?

Можно рассмотреть абелизацию: $RC_P \xrightarrow{\text{ab}} \mathbb{Z}_2^m$; тогда $\text{Ker ab} = RC'_P$ — **коммутант**. Соответствующее n -многообразие \mathbb{L}^n/RC'_P есть в точности вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}_P}$, описанное выше как полиэдральное произведение.

Следствие

Есть P — прямоугольный многогранник в \mathbb{L}^n , то вещественное момент-угол-многообразие \mathcal{R}_P имеет гиперболическую структуру как \mathbb{L}^n/RC'_P , где RC'_P — коммутант соответствующей прямоугольной группы Коксетера.

Многообразие \mathcal{R}_P составлено из 2^m экземпляров P .

Более «экономный» способ: рассмотрим $\varphi: RC_P \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$, где $n = \dim P$.
Такой φ раскладывается как $RC_P \xrightarrow{\text{ab}} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^n$, где Λ линейно.

Подгруппа $\text{Ker } \varphi$ действует на \mathbb{L}^n свободно тогда и только тогда, когда Λ -образы любых n гиперграней, имеющих общую вершину, образуют базис в \mathbb{Z}_2^n .

Такое Λ называется \mathbb{Z}_2 -характеристической функцией.

Предложение

Любой 3-многогранник допускает характеристическую функцию.

Доказательство.

Рассмотрим правильную раскраску граней P в 4 цвета и сопоставим граням соответствующих цветов векторы $e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3$.
Полученное отображение $\Lambda: \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ удовлетворяет условию, так как любые три из четырёх векторов $e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3$ образуют базис в \mathbb{Z}^3 . □

Многообразия $N(P, \Lambda) = \mathbb{L}^3 / \text{Ker } \varphi$, задаваемые многогранниками $P \in \mathcal{P}$ и характеристическими функциями $\Lambda: \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ называются **гиперболическими 3-многообразиями типа Лёбеля** (А. Ю. Веснин, 1987). Каждое $N(P, \Lambda)$ составлено из $|\mathbb{Z}_2^3| = 8$ экземпляров P .

В частности, каждая правильная 4-раскраска прямоугольного 3-многогранника P даёт гиперболическое 3-многообразие. Лёбель (1931) первым построил гиперболическое 3-многообразие, происходящее из (единственной) 4-раскраски додекаэдра.

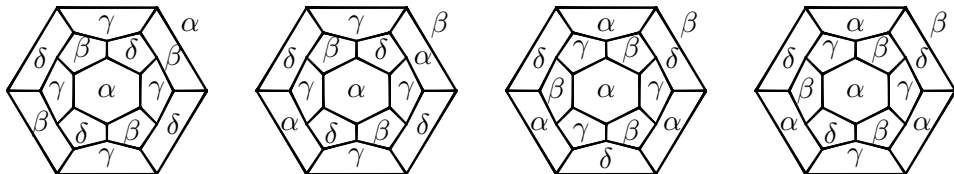


Рис.: Четыре 4-раскраски фуллерена-бочки с 14 гранями.

Пары (P, Λ) и (P', Λ') **эквивалентны**, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda, \Lambda': \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм \mathbb{Z}_2^n .

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $N = N(P, \Lambda)$ и $N' = N(P', \Lambda')$ — гиперболические 3-многообразия типа Лёбеля, соответствующие прямоугольным многогранникам P и P' . Следующие условия эквивалентны:

- а) $\varphi: H^*(N; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N'; \mathbb{Z}_2)$ (изоморфизм колец когомологий);
- б) $N \cong N'$ (дiffeоморфизм);
- в) $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$ (эквивалентность \mathbb{Z}_2 -характеристических пар).

В частности, гиперболические 3-многообразия, соответствующие неэквивалентным 4-раскраскам P , не диффеоморфны.

Нетривиальна импликация а) \Rightarrow в). Её доказательство использует технику торической топологии.

Литература

- Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology*. Mathematical Surveys and Monographs, 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- J. Grbic, T. Panov, S. Theriault and J. Wu. *The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes*. Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 9, 6663–6682.
- Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. *Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера*. Мат. сборник **207** (2016), вып. 11, стр. 105–126.
- В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак. *Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками*. Успехи мат. наук 72 (2017), вып. 2, стр. 3–66.
- Taras Panov and Yakov Veryovkin. *On the commutator subgroup of a right-angled Artin group*. J. Algebra 521 (2019), 284–298.