Полиэдральные произведения, прямоугольные группы Коксетера и гиперболические многообразия

Тарас Евгеньевич ПАНОВ

Мехмат МГУ, ИТЭФ, ИППИ РАН

Матсборник-150: алгебра, геометрия, анализ
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
7–9 ноября 2016 г.

Многогранники и момент-угол-многообразия

Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ — пересечение m полупространств:

$$P = \bigl\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i \geqslant 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, m\bigr\},$$

где $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$ и $b_i \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $F_i = P \cap \{\boldsymbol{x} \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i = 0\}$ есть гипергрань для любого i (всего m гиперграней).

Определим аффинное отображение

$$i_P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad i_P(\boldsymbol{x}) = \bigl(\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}\rangle + b_1, \ldots, \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x}\rangle + b_m\bigr).$$

Тогда i_P инъективно, и $i_P(P) \subset \mathbb{R}^m$ есть пересечение n-мерной плоскости с $\mathbb{R}^m_\geqslant = \{\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \colon y_i \geqslant 0\}$.

Определим пространство $\mathcal{Z}_P$ из диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m & \qquad & (z_1,\ldots,z_m) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow\mu & & \big\downarrow \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m_\geqslant & & (|z_1|^2,\ldots,|z_m|^2) \end{array}$$

На $\mathcal{Z}_P$ имеется действие тора $\mathbb{T}^m$ с пространством орбит $\mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^m = P$.

P **простой**, если в каждой вершине сходится $n = \dim P$ гиперграней.

Предложение

Если P — простой, то $\mathcal{Z}_P$ — гладкое многообразие разм. $m+n$.

Доказательство.

Запишем $i_P(\mathbb{R}^n)$ $(m-n)$ линейными уравнениями от $(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^m$.
Заменив y_k на $|z_k|^2$, получим задание $\mathcal{Z}_P$ квадриками. $\square$

$\mathcal{Z}_P$ наз. момент-угол-многообразием (соответствующим P).

Аналогично, рассматривая

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_P & \longrightarrow & \mathbb{R}^m & \qquad & (u_1,\ldots,u_m) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \big\downarrow \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m_\geqslant & & (u_1^2,\ldots,u_m^2) \end{array}$$

получим вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P$.

Пример

$P=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ -\gamma_1x_1-\gamma_2x_2+1\geqslant 0\}$, $\gamma_1,\gamma_2>0$ (2-симплекс). Тогда

$\mathcal{Z}_P=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3\colon \gamma_1|z_1|^2+\gamma_2|z_2|^2+|z_3|^2=1\}$ (5-сфера),

$\mathcal{R}_P=\{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3\colon \gamma_1|u_1|^2+\gamma_2|u_2|^2+|u_3|^2=1\}$ (2-сфера).

Многогранники и гиперболические многообразия

Пусть P — многогранник в n-мерном пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$ с прямыми углами между смежными гипергранями (прямоугольный n-многогранник).

RC_P — группа, порождённая отражениями в гипергранях P.
Это — прямоугольная группа Коксетера, задаваемая как

$$RC_P = \langle g_1, \ldots, g_m \mid g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i,\ \text{если } F_i \cap F_j \neq \varnothing \rangle,$$

где g_i — отражение относительно гиперграни F_i.

Группа RC_P действует на $\mathbb{L}^n$ дискретно с конечными стабилизаторами и фундаментальной областью P.

Лемма

Рассмотрим эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$. *Подгруппа* $\operatorname{Ker}\varphi \subset RC_P$ *не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений в любых* $\leqslant k$ *гипергранях с общей вершиной линейно независимы в* $\mathbb{Z}_2^k$.
В этом случае группа $\operatorname{Ker}\varphi$ *действует на* $\mathbb{L}^n$ *свободно.*

$N = \mathbb{L}^n/\operatorname{Ker}\varphi$ есть гиперболическое n-многообразие. Оно составлено из $|\mathbb{Z}_2^k| = 2^k$ экземпляров P и имеет риманову метрику построянной отрицательной кривизны. Кроме того, многообразие N асферично (является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\operatorname{Ker}\varphi, 1)$), так как его универсальное накрытие $\mathbb{L}^n$ стягиваемо.

Какие комбинаторные n-многогранники могут быть реализованы с прямыми углами в $\mathbb{L}^n$? В размерности 3 имеется простой критерий, восходящий к работе Погорелова 1967 г.:

Theorem (Погорелов, Андреев)

Комбинаторный 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ допускает прямоугольную реализацию в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда он простой и не имеет 3- и 4-поясов из граней. Кроме того, такая реализация единственна с точностью до изометрии.

Мы будем называть это класс 3-многогранников классом Погорелова $\mathcal{P}$. Многогранник из класса $\mathcal{P}$ не имеет 3- и 4-угольных граней. Класс Погорелова содержит все фуллерены (простые 3-многогранники, имеющие лишь 5- и 6-угольные грани).

Аналогичный критерий для прямоугольных многогранников в $\mathbb{L}^4$ неизвестен. При $n \geqslant 5$ прямоугольных многогранников в $\mathbb{L}^n$ не существует [Винберг].

Пусть дан прямоугольный многогранника P. Как найти эпиморфизм $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^k$, для которого $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно?

Можно рассмотреть абеленизацию: $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m$; тогда $\operatorname{Ker}\mathrm{ab} = RC'_P$ — коммутант. Соответствующее n-многобразие $\mathbb{L}^n/RC'_P$ есть в точности вещественное момент-угол-многобразие $\mathcal{R}_P$, описанное в начале доклада как пересечение квадрик.

Следствие

Есть P — прямоугольный многогранник в $\mathbb{L}^n$, то вещественное момент-угол-многобразие $\mathcal{R}_P$ имеет гиперболическую структуру как $\mathbb{L}^n/RC'_P$, где RC'_P — коммутант соответствующей прямоугольной группы Коксетера.

Многобразие $\mathcal{R}_P$ составлено из 2^m экземпляров P.

Более «экономный» способ: рассмотрим $\varphi\colon RC_P \to \mathbb{Z}_2^n$, где $n = \dim P$. Такой φ раскладывается как $RC_P \xrightarrow{\mathrm{ab}} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^n$, где Λ линейно.

Подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi$ действует на $\mathbb{L}^n$ свободно тогда и только тогда, когда Λ-образы любых n гиперграней, имеющих общую вершину, образуют базис в $\mathbb{Z}_2^n$.
Такое Λ называется $\mathbb{Z}_2$-характеристической функцией.

Предложение

Любой 3-многогранник допускает характеристическую функцию.

Доказательство.

Рассмотрим правильную раскрасу граней P в 4 цвета и сопоставим граням соответствующих цветов векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Полученное отображение $\Lambda\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^3$ удовлетворяет условию, так как любые три из четырёх векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ образуют базис в $\mathbb{Z}^3$. □

Многообразия $N(P,\Lambda) = \mathbb{L}^3/\operatorname{Ker}\varphi$, задаваемые многогранниками $P \in \mathcal{P}$ и характеристическими функциями $\Lambda\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^3$ называются гиперболическими 3-многообразиями типа Лёбеля (А. Ю. Веснин, 1987). Каждое $N(P,\Lambda)$ составлено из $|\mathbb{Z}_2^3| = 8$ экземпляров P.

В частности, каждая правильная 4-раскраска прямоугольного 3-многогранника P даёт гиперболическое 3-многообразие. Лёбель первым построил гиперболическое 3-многообразие, происходящее из (единственной) 4-раскраски додекаэдра.

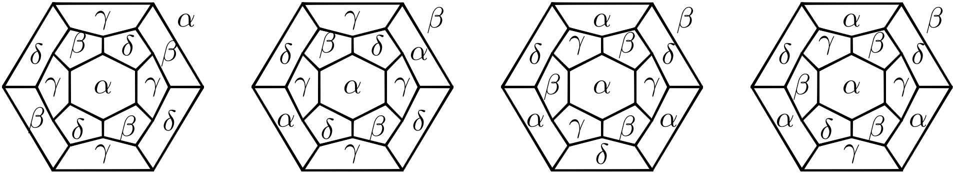

Рис.: Четыре 4-раскраски фуллерена-бочки с 14 гранями.

Пары (P, Λ) и (P', Λ') эквивалентны, если P и P' комбинаторно эквивалентны, а $\Lambda, \Lambda' \colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ отличаются на автоморфизм $\mathbb{Z}_2^n$.

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $N = N(P, \Lambda)$ и $N' = N(P', \Lambda')$ — гиперболические 3-многообразия типа Лёбеля, соответствующие прямоугольным многогранникам P и P'. Следующие условия эквивалентны:

а) $\varphi \colon H^*(N; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N'; \mathbb{Z}_2)$ *(изоморфим колец когомологий);*

б) $N \cong N'$ *(диффеоморфизм);*

в) $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$ *(эквивалентность $\mathbb{Z}_2$-характеристических пар).*

В частности, гиперболические 3-многообразия, соответствующие неэквивалентным 4-раскраскам P, не диффеоморфны.

Нетривиальна импликация а)$\Rightarrow$в). Её доказательство использует технику торической топологии.

Момент-угол-комплексы и полиэдральные произведения

$\mathcal{K}$ — (абстрактный) симплицианый комплекс на $[m] = \{1, \ldots, m\}$.
$I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{K}$ — симплекс. Всегда $\varnothing \in \mathcal{K}$.

Рассмотрим единичный полидиск в $\mathbb{C}^m$:

$$\mathbb{D}^m = \bigl\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon |z_i| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, m\bigr\}.$$

Для данного $I \subset [m]$ положим

$$B_I := \bigl\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{D}^m \colon |z_j| = 1 \text{ при } j \notin I\bigr\} \cong \prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1.$$

Определим момент-угол-комплекс

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} B_I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Bigl(\prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1\Bigr) \subset \mathbb{D}^m$$

На $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ задано покоординатное действие тора $\mathbb{T}^m$.

Пример

$\mathcal{K} = \bullet\,\bullet$ (2 точки), тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2 \cong S^3$.

$\mathcal{K} = \triangle$ (граница треугольника), тогда
$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2 \times D^2 \times S^1) \cup (D^2 \times S^1 \times D^2) \cup (S^1 \times D^2 \times D^2) \cong S^5$.

Пусть теперь (X, A) — пара топологических пространств, $A \subset X$. Для $I \subset [m]$ положим

$$(X, A)^I = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X \colon x_j \in A \text{ при } j \notin I\} \cong \prod_{i \in I} X \times \prod_{i \notin I} A.$$

$\mathcal{K}$-полиэдральное произведение пары (X, A) есть

$$(X, A)^\mathcal{K} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (X, A)^I \subset X^m.$$

Имеем $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2, S^1)^\mathcal{K}$.

$\mathcal{R}_\mathcal{K} = (D^1, S^0)^\mathcal{K}$ – вещественный момент-угол-комплекс.

Теорема

Если P — простой многогранник, $\mathcal{K}_P = \partial(P^*)$ — двойственный симплициальный комплекс, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P} \cong \mathcal{Z}_P$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} \cong \mathcal{R}_P$.

В частности, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}_P}$ — многообразия. Более общо,

Предложение

Пусть $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$ (триангуляция n-сферы с m вершинами). Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является замкнутым многообразием размерности $m + n$.

Когомологии момент-угол-комплексов

Кольцо граней (Стенли–Райснера) симплициального комплекса $\mathcal{K}$

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] := \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m] \big/ \big(v_{i_1} \cdots v_{i_k} = 0 \quad \text{при } \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}\big)$$

где $\deg v_i = 2$.

Theorem (Бухштабер-Панов)

Имеют место изоморфизмы колец

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}) \\ &\cong H\big[\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big], \qquad du_i = v_i, dv_i = 0 \\ &\cong \bigoplus_{I \notin \mathcal{K}} \widetilde{H}^{*-|I|-1}(\mathcal{K}_I) \qquad \mathcal{K}_I = \mathcal{K}|_I \end{aligned}$$

(Квази)торические многообразия и малые накрытия

P — простой n-многогранник, $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ — гиперграни.

Характеристическая функция — такое отображение $\varLambda\colon \mathcal{F} \to \mathbb{Z}^n$, что $\varLambda(F_{i_1}), \ldots, \varLambda(F_{i_n})$ — базис $\mathbb{Z}^n$, если $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}$ имеют общую вершину.

Характеристическая функция задаёт линейное отображение $\varLambda\colon \mathbb{Z}^{\mathcal{F}} = \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ и гомоморфизм торов $\varLambda\colon T^m \to T^n$.

Предложение

Подгруппа $\operatorname{Ker} \varLambda \cong T^{m-n}$ *действует на* $\mathcal{Z}_P$ *свободно.*

$M(P, \varLambda) = \mathcal{Z}_P / \operatorname{Ker} \varLambda$ — квазиторическое многообразие.

Это гладкое $2n$-мерное многообразие с действием n-мерного тора $T^m / \operatorname{Ker} \varLambda \cong T^n$ и пространством орбит P.

Рассматривая $\mathbb{Z}_2$-характеристические функции $\varLambda\colon \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$, получаем малые накрытия над P как фактормногообразия $\mathcal{R}_P/\operatorname{Ker}\varLambda$.
Малое накрытие $N(P,\varLambda)$ — гладкое n-мерное многообразие с действием $\mathbb{Z}_2^n$ и пространством орбит P.

Гиперболические многообразия типа Лёбеля — малые накрытия над 3-мерными многогранниками из класса Погорелова $\mathcal{P}$ (допускающими прямоугольную реализацию в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$).

Как получать характеристические функции $\varLambda\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$?

а) Простой n-многогранник P дельзанов, если нормали $\boldsymbol{a}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{i_n}$ к гиперграням $F_{i_1},\ldots,F_{i_n}$, имеющим общую вершину, образуют базис решётки $\mathbb{Z}^n$. Дельзанов многогранник задаёт характеристическую функцию $\varLambda\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, $F_i \mapsto \boldsymbol{a}_i$. Тогда $M = \mathcal{Z}_P/\operatorname{Ker}\varLambda$ — (симплектическое) торическое многообразие.

б) Для 3-мерных многогранников P, правильная 4-раскраска задаёт характеристическую функцию, как и в случае $\mathbb{Z}_2$.

Теорема (Данилов-Юркевич, Дэвис-Янушкевич)

Пусть $M = M(P, \Lambda)$ — квазиторическое многообразие над простым n-многогранником P. Кольцо когомологий $H^*(M; \mathbb{Z})$ порождено двумерными классами $[v_i]$, двойственными к характеристическим подмногообразиям M_i, $i = 1, \ldots, m$, и имеет вид

$$H^*(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}, \qquad \deg v_i = 2,$$

где $\mathcal{I}$ — идеал, порождённый двумя типами элементов:

а) $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, *где* $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} = \varnothing$ *в* P;

б) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle \Lambda(F_i), \boldsymbol{x} \rangle v_i$ *для любого* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Кольцо $\mathbb{Z}_2$-когомологий $H^*(N; \mathbb{Z}_2)$ малого накрытия $N = N(P, \Lambda)$ имеет аналогичное описание, но с образующими v_i степени 1.

Теорема (Бухштабер-Ероховец-Масуда-Панов-Пак)

Пусть $M = M(P, \Lambda)$ *и* $M' = M(P', \Lambda')$ *— квазиторические 6-многообразия, где* P *— 3-многогранник из класса Погорелова* $\mathcal{P}$*. Следующие условия эквивалентны:*

а) $\varphi\colon H^*(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(M';\mathbb{Z})$ *(изоморфизм колец когомологий);*

б) $M \cong M'$ *(диффеоморфизм);*

в) $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$ *(эквивалентность характеристических пар).*

Идея доказательства (обеих теорем).

Необходимо доказать а)⇒в). Изоморфизм $\varphi\colon H^*(N;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N';\mathbb{Z}_2)$ влечёт изоморфизм $\varphi\colon H^*(M;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(M';\mathbb{Z}_2)$, который в свою очередь влечёт $\psi\colon H^*(\mathcal{Z}_P;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathcal{Z}_{P'};\mathbb{Z}_2)$. Используя комбинаторные свойства многогранников $P \in \mathcal{P}$, отсюда вытекает, что P комбинаторно эквивалентен P', а Λ эквивалентна Λ'. $\square$

Когомологическая жёсткость

Проблема

Пусть $M = M(P, \Lambda)$ и $M' = M(P', \Lambda')$ — квазиторические многообразия с изоморфными кольцами целочисленных когомологий. Верно ли, что M и M' диффеоморфны?

Наш результат даёт положительный ответ в случае квазиторических многообразий над многогранниками из класса Погорелова.

6-мерные квазиторические многообразия M и M' диффеоморфны, если существует изоморфизм $\varphi\colon H^*(M;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^*(M';\mathbb{Z})$, сохраняющий первый класс Понтрягина, т. е. $\varphi(p_1(M)) = p_1(M')$.

Имеем $p_1(M) = v_1^2 + \ldots + v_m^2 \in H^4(M)$. Таким образом, когомологическая жёсткость 6-мерных квазиторических многообразий сводится к вопросу линейной алгебры. Однако получить доказательство на этом пути пока не удаётся...

Литература

- Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology*. Mathematical Surveys and Monographs, 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- Victor Buchstaber, Nikolay Erokhovets, Mikiya Masuda, Taras Panov and Seonjeong Park. *Cohomological rigidity of manifolds defined by right-angled 3-dimensional polytopes*. Preprint (2016); arXiv:1610.07575.
- Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. *Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера*. Мат. сборник **207** (2016), вып. 11; arXiv:1603.06902.