Геометрические структуры на многообразиях с действием тора: симплектические и лагранжевы аспекты

на основе совместных работ с А. Е. Мироновым

Тарас Евгеньевич ПАНОВ

Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова

XII Белорусская математическая конференция
Минск, 5–10 сентября 2016 г.

Основные определения

M – кэлерово многообразие с симплектической формой ω, $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$.

Погружение $i\colon N \looparrowright M$ многообразия N размерности n называется лагранжевым, если $i^*(\omega) = 0$. Если i является вложением, то $i(N)$ есть лагранжево подмногообразие в M.

Векторное поле ξ на M называется гамильтоновым, если 1-форма $\omega(\,\cdot\,,\xi)$ является точной.

Лагранжево погружение $i\colon N \looparrowright M$ называется гамильтоново минимальным (H-минимальным), если вариации объёма $i(N)$ вдоль всех гамильтоновых полей с компактным носителем равны нулю, т. е.

$$\frac{d}{dt}\operatorname{vol}(i_t(N))\Big|_{t=0} = 0,$$

где $i_t(N)$ – гамильтонова деформация погружения $i(N) = i_0(N)$.

Обзор

Явные примеры H-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}P^m$ были получены в работах Yong-Geun Oh, Castro–Urbano, Hélein–Romon, Amarzaya–Ohnita и других.

В 2003 г. А. Е. Миронов предложил универсальную конструкцию H-минимальных лагранжевых погружений в $\mathbb{C}^m$ из пересечений специальных вещественных квадрик.

Те же пересечения квадрик известны в торической геометрии и топологии как (вещественные) момент-угол-многообразия. Они возникают, в частности, как уровни отображения моментов в конструкции гамильтоновых торических многообразий на основе симплектической редукции.

Применяя конструкцию Миронова совместно с методами торической топологии мы получаем новые примеры H-минимальных лагранжевых **вложений** с интересной и сложной топологией.

Многогранники и момент-угол-многообразия

Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ задаётся как пересечение полупространств:

$$P = \bigl\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0 \quad \text{при } i = 1, \ldots, m \bigr\}.$$

Предположим, что каждое $F_i = P \cap \{ \boldsymbol{x} \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i = 0 \}$ есть гипергрань (всего m гиперграней).

Определим аффинное отображение

$$i_P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad i_P(\boldsymbol{x}) = \bigl(\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x} \rangle + b_1, \ldots, \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x} \rangle + b_m \bigr).$$

Тогда i_P инъективно, и $i_P(P) \subset \mathbb{R}^m$ есть пересечение некоторой n-мерной плоскости с $\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{ \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \colon y_i \geqslant 0 \}$.

Определим пространство $\mathcal{Z}_P$ из диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_P \arrow[r, "i_Z"] \arrow[d] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "\mu"] & (z_1, \ldots, z_m) \arrow[d] \\ P \arrow[r, "i_P"] & \mathbb{R}^m_{\geqslant} & (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2) \end{tikzcd}$$

На $\mathcal{Z}_P$ имеется действие тора $\mathbb{T}^m$, причём $\mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^m = P$.

Многогранник P называется простым, если в каждой вершине сходится в точности $n = \dim P$ гиперграней (или рёбер).

Предложение

Если P – простой многогранник, то $\mathcal{Z}_P$ – гладкое многообразие.

Доказательство.

Плоскость $i_P(\mathbb{R}^n)$ задаётся $m - n$ линейными уравнениям от $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Заменив y_k на $|z_k|^2$, получим задание множества $\mathcal{Z}_P$ квадриками. Имеем $m - n$ квадрик в $\mathbb{C}^m$, т. е. $\dim \mathcal{Z}_P = m + n$. $\square$

$\mathcal{Z}_P$ называется момент-угол-многообразием, соответствующим P.

Аналогично, рассматривая диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_P & \longrightarrow & \mathbb{R}^m & \qquad & (u_1,\ldots,u_m) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \big\downarrow \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m_{\geqslant} & & (u_1^2,\ldots,u_m^2) \end{array}$$

получаем вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P$.

Пример

$P = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ -\gamma_1x_1-\gamma_2x_2+1\geqslant 0\}$, $\gamma_1,\gamma_2>0$ (треугольник). Тогда

$\mathcal{Z}_P = \{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3\colon \gamma_1|z_1|^2+\gamma_2|z_2|^2+|z_3|^2=1\}$ (5-сфера),

$\mathcal{R}_P = \{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3\colon \gamma_1|u_1|^2+\gamma_2|u_2|^2+|u_3|^2=1\}$ (2-сфера).

Действия тора

Имеем пересечения квадрик

$$\mathcal{Z}_P = \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon \gamma_1|z_1|^2 + \cdots + \gamma_m|z_m|^2 = c\},$$
$$\mathcal{R}_P = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m \colon \gamma_1 u_1^2 + \cdots + \gamma_m u_m^2 = c\}$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ и c – векторы в $\mathbb{R}^{m-n}$.

Предположим, что многогранник P рационален. Имеем две решётки: $\Lambda = \mathbb{Z}\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$ и $L = \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_m \rangle \subset \mathbb{R}^{m-n}$.

Рассмотрим $(m-n)$-тор $T_P = \{(e^{2\pi i\langle\gamma_1,\varphi\rangle}, \ldots, e^{2\pi i\langle\gamma_m,\varphi\rangle}) \in \mathbb{T}^m\}$, т. е. $T_P = \mathbb{R}^{m-n}/L^*$, и положим $D_P = \frac{1}{2}L^*/L^* \cong (\mathbb{Z}_2)^{m-n}$.

Предложение

Тор $T_P \cong T^{m-n}$ действует на $\mathcal{Z}_P$ почти свободно.

Основная конструкция

Рассмотрим отображение

$$f\colon \mathcal{R}_P \times T_P \longrightarrow \mathbb{C}^m,$$
$$(\boldsymbol{u}, \varphi) \mapsto \boldsymbol{u} \cdot \varphi = \left(u_1 e^{2\pi i \langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \ldots, u_m e^{2\pi i \langle \gamma_m, \varphi \rangle}\right).$$

Заметим, что $f(\mathcal{R}_P \times T_P) \subset \mathcal{Z}_P$ есть множество T_P-орбит, проходящих через $\mathcal{R}_P \subset \mathbb{C}^m$. Имеем m-мерное многообразие

$$N_P = \mathcal{R}_P \times_{D_P} T_P.$$

Лемма

$f\colon \mathcal{R}_P \times T_P \to \mathbb{C}^m$ индуцирует вложение $j\colon N_P \looparrowright \mathbb{C}^m$.

Теорема (Миронов)

Вложение $j\colon N_P \looparrowright \mathbb{C}^m$ является H-минимальным лагранжевым.

Вопрос

Когда $j\colon N_P \looparrowright \mathbb{C}^m$ является вложением?

Простой рациональный многогранник P называется дельзановым, если для любой вершины $v \in P$ набор векторов $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n}$, нормальных к сходящимся в v гиперграням, образует базис решётки $\Lambda = \mathbb{Z}\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$:

$$\mathbb{Z}\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle = \mathbb{Z}\langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n} \rangle \qquad \text{для любой } v = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}.$$

Теорема

Следующие условия эквивалентны:

1. *$j\colon N_P \to \mathbb{C}^m$ является* **вложением** *H-минимального лагранжева подмногообразия;*
2. *тор $T_P \cong T^{m-n}$ действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно.*
3. *многогранник P является дельзановым.*

Итак, мы получаем H-минимальное лагранжево подмногообразие N_P в $\mathbb{C}^m$ для любого n-мерного дельзанова многогранника P с m гипергранями.

Явные конструкции семейств дельзановых многогранников известны в торической геометрии и топологии:

- симплексы и кубы любой размерности;
- произведения многогранников и срезки граней;
- ассоциаэдры (многогранники Сташева), пермутаэдры и их обобщения.

Примеры

Пример (одна квадрика)

Пусть $P = \Delta^{m-1}$ (симплекс), т. е. $m - n = 1$.
$\mathcal{R}_{\Delta^{m-1}}$ задаётся одной квадрикой

$$\gamma_1 u_1^2 + \cdots + \gamma_m u_m^2 = c$$

с $\gamma_i > 0$, т. е. $\mathcal{R}_{\Delta^{m-1}} \cong S^{m-1}$.
Тогда

$$N \cong S^{m-1} \times_{\mathbb{Z}_2} S^1 \cong \begin{cases} S^{m-1} \times S^1, & \text{если } \tau \text{ сохр. ориент. } S^{m-1}, \\ \mathcal{K}^m, & \text{если } \tau \text{ обр. ориент. } S^{m-1}, \end{cases}$$

где τ – инволюция, а $\mathcal{K}^m$ – m-мерная бутылка Клейна.

Предложение (одна квадрика)

Н-минимальное лагранжево вложение многообразия $N_{\Delta^{m-1}} \cong S^{n-1} \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ *в* $\mathbb{C}^m$ *получается при условии* $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m$ *в уравнении квадрики* $\gamma_1 u_1^2 + \cdots + \gamma_m u_m^2 = c$.

Топология многообразия $N_{\Delta^{m-1}} = N(m)$ *зависит лишь от чётности* m:

$$N(m) \cong S^{m-1} \times S^1, \qquad \text{если } m \text{ нечётно,}$$
$$N(m) \cong \mathcal{K}^m \qquad \text{если } m \text{ чётно.}$$

Бутылка Клейна $\mathcal{K}^m$ с чётным m **не допускает** лагранжевых вложений в $\mathbb{C}^m$ [Немировский, Шевчишин].

Теорема (две квадрики)

Пусть $m - n = 2$, *т. е.* $P \simeq \Delta^{p-1} \times \Delta^{q-1}$.

- *Многообразие* $\mathcal{R}_P$ *диффеоморфно многообразию* $\mathcal{R}(p,q) \cong S^{p-1} \times S^{q-1}$, *задаваемому уравнениями*

$$\begin{aligned} u_1^2 + \ldots + u_k^2 + u_{k+1}^2 + \cdots + u_p^2 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1, \\ u_1^2 + \ldots + u_k^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & + u_{p+1}^2 + \cdots + u_m^2 = 2, \end{aligned}$$

  где $p + q = m$, $0 < p < m$ *и* $0 \leqslant k \leqslant p$.

- *Если* $N_P \to \mathbb{C}^m$ *– вложение, то* N_P *диффеоморфно*

$$N_k(p,q) = \mathcal{R}(p,q) \times_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} (S^1 \times S^1),$$

  где действие двух инволюций на $\mathcal{R}(p,q)$ *задаётся формулами*
  $\psi_1\colon (u_1, \ldots, u_m) \mapsto (-u_1, \ldots, -u_k, -u_{k+1}, \ldots, -u_p, u_{p+1}, \ldots, u_m),$
  $\psi_2\colon (u_1, \ldots, u_m) \mapsto (-u_1, \ldots, -u_k, u_{k+1}, \ldots, u_p, -u_{p+1}, \ldots, -u_m).$

Имеем расслоение $N_k(p,q) \to S^{q-1} \times_{\mathbb{Z}_2} S^1 = N(q)$ *со слоем* $N(p)$.

Пример (три квадрики)

В случае $m - n = 3$ топология многообразий $\mathcal{R}_P$ и $\mathcal{Z}_P$ была описана [Lopez de Medrano]. Каждое такое многообразие диффеоморфно произведению трёх сфер или связной сумме произведений сфер, с двумя сферами в каждом произведении.

Простейший случай $n = 2$ и $m = 5$: дельзанов пятиугольник.

В этом случае $\mathcal{R}_P$ есть ориентированная поверхность рода 5, а $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно связной сумме 5 экземпляров $S^3 \times S^4$.

Получаем H-минимальное лагранжево подмногообразие $N_P \subset \mathbb{C}^5$, которое расслаивается над T^3 на поверхности рода 5.

Предложение

Пусть P – m-угольник. Тогда $\mathcal{R}_P$ есть ориентированная поверхность S_g рода $g = 1 + 2^{m-3}(m-4)$.

Получаем H-минимальное лагранжево подмногообразие $N_P \subset \mathbb{C}^m$, которое расслаивается над T^{m-2} на поверхности S_g.

N_P является асферическим многообразием (при $m \geqslant 4$) с фундаментальной группой из точной последовательности

$$1 \longrightarrow \pi_1(S_g) \longrightarrow \pi_1(N) \longrightarrow \mathbb{Z}^{m-2} \longrightarrow 1.$$

При $n > 2$ и $m - n > 3$ топология многообразий $\mathcal{R}_P$ и $\mathcal{Z}_P$ ещё сложнее.

Интегрируемые системы

Общий факт: построенные нами H-минимальные лагранжевы подмногообразия $N \subset \mathbb{C}^m$ являются «специальными» вырождениями торов Лиувилля некоторых интегрируемых систем.

Имеем $\mathcal{R} \subset N \subset \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}$ есть пересечение $m - n$ эрмитовых квадрик

$$H_1 = \cdots = H_{m-n} = 0,$$

а $\mathcal{R}$ есть пересечение соответствующих вещественных квадрик

$$H_1^{\mathbb{R}} = \cdots = H_{m-n}^{\mathbb{R}} = 0,$$

Тогда N задаётся уравнениями

$$H_1 = \cdots = H_{m-n} = 0, \quad F_1 = \ldots = F_n = 0,$$

где $\{H_i, H_j\} = \{H_i, F_k\} = \{F_k, F_l\} = 0$
и $F_1, \ldots, F_n$ суть **полиномиальные** интегралы.

Пример

Применив конструкцию к одной квадрике $x_1^2 + x_2^2 = 1$, получаем вложенный H-минимальный лагранжев 2-тор $N = T^2 \subset \mathbb{C}^2$.
Он задаётся уравнениями

$$H = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1, \quad F = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

с $\{H, F\} = 0$.

Этот тор включается в семейство лиувиллевых торов, задаваемых уравнениями

$$H = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = C, \quad F = x_1 y_2 - x_2 y_1 = D,$$

которое вырождается в окружность при $D = C/2$.

Пример

Теперь применим конструкцию к одной квадрике $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$. Получим погружённую H-минимальную бутылку Клейна $K \looparrowright \mathbb{C}^2$. Она задаётся уравнениями

$$H = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2^2 + 2y_2^2 = 1, \quad F = x_1^2 y_2 - y_1^2 y_2 - 2x_1 x_2 y_1 = 0$$

с $\{H, F\} = 0$.

Мы имеем семейство торов Лиувилля

$$H = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = C, \quad F = x_1^2 y_2 - y_1^2 y_2 - 2x_1 x_2 y_1 = D,$$

которое вырождается в бутылку Клейна при $D = 0$.

Литература

- Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology*. Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- А. Е. Миронов. *О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{C}P^n$.* Матем. сб. **195** (2004), вып. 1, стр. 89–102.
- А. Е. Миронов, Т. Е. Панов. *Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения.* Функц. анализ и его прил. **47** (2013), вып. 1, стр. 47–61.
- А. Е. Миронов, Т. Е. Панов. *Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях.* Успехи мат. наук **68** (2013), вып. 2, стр. 203–204.
- Т. Е. Панов. *Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях.* Успехи мат. наук **68** (2013), вып. 3, стр. 111–186.