Комплексная геометрия момент-угол-многообразий

Т. Панов

совместно с Ю. Устиновским и М. Вербицким

механико-математический факультет МГУ

Школа-конференция
«Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов»
мех-мат МГУ, 27 января–1 февраля 2014 г.

1. Момент-угол-многообразия и симплициальные вееры.

Σ – полный симплициальный веер в $\mathbb{R}^n$ (возможно, не рациональный!)

$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ – образующие 1-мерных конусов.

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma = \bigl\{ I \subset [m] \colon \{\boldsymbol{a}_i \colon i \in I\}$ порождает конус из $\Sigma \bigr\}$
ассоциированный симплициальный комплекс для Σ.

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2, S^1)^\mathcal{K} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} \Bigl(\prod_{i\in I} D^2 \times \prod_{i\notin I} S^1 \Bigr) \qquad \subset \qquad (D^2)^m$$

момент-угол-многообразие.

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\}\notin\mathcal{K}} \{z \in \mathbb{C}^m \colon z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\}$$

$$= (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^\mathcal{K} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} \Bigl(\prod_{i\in I} \mathbb{C} \times \prod_{i\notin I} \mathbb{C}^\times \Bigr)$$

дополнение набора координатных подпространств.

Утв.: $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является деформационным ретрактом $U(\mathcal{K})$ для любого $\mathcal{K}$.

Зададим отображение

$$A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i,$$

где $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^m$. Положим

$$\mathbb{R}^m_> = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \colon y_i > 0\},$$

и определим

$$R := \exp(\operatorname{Ker} A) = \Big\{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m_> \colon \prod_{i=1}^m y_i^{\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{u}\rangle} = 1 \text{ for all } \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\Big\},$$

$R \subset \mathbb{R}^m_>$ действует на $U(\mathcal{K}_\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$ покоординатным умножением.

Теорема 1. *Пусть Σ – полный симплициальный веер в $\mathbb{R}^n$ с m рёбрам и пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ – ассоциированный симплициальный комплекс. Тогда*

а) группа $R \cong \mathbb{R}^{m-n}$ действует на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно, т. $U(\mathcal{K})/R$ является гладким $(m+n)$-мерным многообразием;

б) $U(\mathcal{K})/R$ эквивариантно гомеоморфно $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Таким образом, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ имеет каноническую гладкую структуру.

2. Комплексно-аналитические структуры.

Мы покажем, что чётномерные м.-у.-многообразиях $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствую щие полным симплициальным веерам, допускают комплексную структур Идея в том, чтобы заменить действие $\mathbb{R}_{>}^{m-n}$ на $U(\mathcal{K})$ (с факторпростра ством $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$) на голоморфное действие $\mathbb{C}^{\frac{m-n}{2}}$ на том же пространстве.

Предположим, что $m-n$ чётно. Это всегда достигается формальны добавлением «пустого» 1-мерного конуса к Σ, что соответствует умно жению $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ на окружность.

Положим $\ell = \frac{m-n}{2}$.

Констр 1. Выберем линейное отображение $\Psi\colon \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{C}^m$, для которого

a) $\mathrm{Re}\circ\Psi\colon \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{R}^m$ есть мономорфизм.

(b) $A\circ\mathrm{Re}\circ\Psi = 0$.

Композиция отображение в верхней строке есть нуль:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^\ell \arrow[r, "\Psi"] & \mathbb{C}^m \arrow[r, "\mathrm{Re}"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\exp"] \\
 & (\mathbb{C}^\times)^m \arrow[r, "|\cdot|"] & \mathbb{R}^m_> \arrow[r, "\exp A"] & \mathbb{R}^n_>
\end{tikzcd}$$

где $|\cdot|$ обозначает отображение $(z_1,\ldots,z_m)\mapsto(|z_1|,\ldots,|z_m|)$. Положим

$$C = \exp\Psi(\mathbb{C}^\ell) = \Big\{\Big(e^{\langle\psi_1,\boldsymbol{w}\rangle},\ldots,e^{\langle\psi_m,\boldsymbol{w}\rangle}\Big)\in(\mathbb{C}^\times)^m\Big\}$$

где $\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_\ell)\in\mathbb{C}^\ell$, а ψ_i – i-й столбец $m\times\ell$-матрицы $\Psi=(\psi_{ij})$.

Тогда $C\cong\mathbb{C}^\ell$ есть комплексно-аналитическая (но не алгебраическая
подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^m$, действующая на $U(\mathcal{K})$ голоморфно.

Пример 1. Пусть $\mathcal{K}$ – пустой комплекс 2 элементах.
Тогда $n = 0$, $m = 2$, $\ell = 1$ и $A\colon \mathbb{R}^2 \to 0$ – нулевое отображение.
Зададим $\Psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ в виде $z \mapsto (z, \alpha z)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, т.е.

$$C = \Big\{(e^z, e^{\alpha z})\Big\} \subset (\mathbb{C}^\times)^2.$$

Условие б) из Конструкции 1 пусто, а из а) вытекает $\alpha \notin \mathbb{R}$. Тогд
$\exp\Psi\colon \mathbb{C} \to (\mathbb{C}^\times)^2$ есть вложение, а факторпространство $(\mathbb{C}^\times)^2/C$ ест
комплексный тор $T^2_{\mathbb{C}}$ с параметром $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(\mathbb{C}^\times)^2/C \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \alpha\mathbb{Z}) = T^2_{\mathbb{C}}(\alpha).$$

Аналогично, если $\mathcal{K}$ – пустой на 2ℓ элементах (т.е. $n = 0$, $m = 2\ell$), м
получаем любой комплексный тор $T^{2\ell}_{\mathbb{C}}$ как факторпространство $(\mathbb{C}^\times)^{2\ell}/C$

Теорема 2. *Пусть Σ – полный симплициальный веер в $\mathbb{R}^n$ с m одноме*
ными конусами и $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ – ассоциированный симплициальный комплек
Предположим, что $m - n = 2\ell$. Тогда

а) *голоморфное действие $C \cong \mathbb{C}^\ell$ на $U(\mathcal{K})$ является свободным и со*
ственным, а факторпространство $U(\mathcal{K})/C$ имеет структуру компак
ного комплексного многообразия размерности $m - \ell$;

б) *имеется $\mathbb{T}^m$-эквивариантный диффеоморфизм $U(\mathcal{K})/C \cong \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, задаю*
щий комплексную структуру на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ с голоморфным действием $\mathbb{T}^m$.

Пример 2 (Многообразие Хопфа)**.** Пусть Σ – полный веер в $\mathbb{R}^n$ с $n+$ одномерными конусами, порождёнными векторами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, -\boldsymbol{e}_1 - \ldots - \boldsymbol{e}$

Добавим «пустой» 1-мерный конус. Тогда $m = n+2$, $\ell = 1$.
Отображение $A\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ задаётся матрицей $(\mathbf{0}\ E\ -\mathbf{1})$, E – единична $n \times n$-матрица, а $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ – столбцы из нулей и единиц соответственно.

$\mathcal{K}$ – граница n-мерного симплекса с $n+1$ вершинами и 1 призрачно вершиной, $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong S^1 \times S^{2n+1}$ и $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$.

Зададим $\Psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n+2}$, $z \mapsto (z, \alpha z, \ldots, \alpha z)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$. Тогда

$$C = \left\{(e^z, e^{\alpha z}, \ldots, e^{\alpha z})\colon z \in \mathbb{C}\right\} \subset (\mathbb{C}^\times)^{n+2},$$

и $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ приобретает комплексную структуру как факторпространство $U(\mathcal{K})$

$$\mathbb{C}^\times \times \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) \big/ \{(t, \boldsymbol{w}) \sim (e^z t, e^{\alpha z}\boldsymbol{w})\} \cong \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) \big/ \{\boldsymbol{w} \sim e^{2\pi i \alpha}\boldsymbol{w}\},$$

где $t \in \mathbb{C}^\times$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Это – классическое многообразие Хопфа.

3. Голоморфные расслоения над торическими многообразиями.

Многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующие полным *рациональным* симплици альным веерам являются пространствами голоморфных главных рассло ений над торическими многообразиями со слоем комплексный тор. Эт позволяет нам вычислять инварианты комплексных структур на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ когомологии Дольбо и числа Ходжа.

Торическое многообразие – это нормальное алгебраическое многообра зие X, на котором $(\mathbb{C}^{\times})^n$ действует с плотной орбитой.

Торические многообразия классифицируются рациональными веерами.

полные вееры	$\longleftrightarrow$	компактные многообразия
нормальные вееры многогранников	$\longleftrightarrow$	проективные многообразия
регулярные вееры	$\longleftrightarrow$	неособые многообразия
симплициальные вееры	$\longleftrightarrow$	орбиобразия (орбифолды)

Σ полный, симплициальный, *рациональный* веер;
$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *примитивные целочисленные* образующие 1-мерных конусов;
$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{Z}^n$.

Констр 2 («Конструкция Кокса»)**.** Рассмотрим $A_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i$,

$$\exp A_{\mathbb{C}} \colon (\mathbb{C}^\times)^m \to (\mathbb{C}^\times)^n,$$
$$(z_1, \ldots, z_m) \mapsto \Bigl(\prod_{i=1}^m z_i^{a_{i1}}, \ldots, \prod_{i=1}^m z_i^{a_{in}} \Bigr)$$

Положим $G = \operatorname{Ker} \exp A_{\mathbb{C}}$ – алгебраическая подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^m$.
Она действует почти свободно (с конечными стабилизаторами) на $U(\mathcal{K}_\Sigma$
Если Σ – регулярный веер, то $G \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n}$ и действие свободно.

$V_\Sigma = U(\mathcal{K}_\Sigma)/G$ – торическое многообразие, соответствующее Σ.
Фактор-тор $(\mathbb{C}^\times)^m/G \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ действует на V_Σ с плотной орбитой.

Заметим, что $\mathbb{C}^\ell \cong C \subset G \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n}$ – комплексная ℓ-мерная подгруппа

Предл 1.

а) торическое многообразие V_Σ гомеоморфно факторпространству $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ по голоморфному действию группы G/C.

б) если Σ – регулярный веер, то имеется голоморфное главное рассло ние $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_\Sigma} \to V_\Sigma$ со слоем компактный комплексный ℓ-мерный тор G/C

Замечание 1. Для особых многообразий V_Σ проекция $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_\Sigma} \to V_\Sigma$ являет ся голоморфным главным расслоением Зейферта для подходящей стру туры орбиобразия на V_Σ.

4. Подмногообразия и аналитические подмножества.

Комплексная структура на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ задаётся двумя данными:
– полный симплициальный веер Σ с образующими $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$;
– ℓ-мерная голоморфная подгруппа $C \subset (\mathbb{C}^\times)^m$.

Если эти данные *общего положения* (в частности, веер Σ не рационалі ный), то голоморфное главное расслоение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to V_\Sigma$ отсутствует (торі ческое многообразие V_Σ не определено).

Тем не менее, имеется голоморфное ℓ-мерное *слоение* $\mathcal{F}$ с трансверсалі но кэлеровой формой $\omega_{\mathcal{F}}$. Наличие такой формы можно использоват для описания подмногообразий в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Рассмотрим комплексифицированное отображение $A_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto$
и зададим $(m-n)$-мерную подгруппу $(\mathbb{C}^\times)^m$:

$$G = \exp(\operatorname{Ker} A_{\mathbb{C}}) = \Big\{ \Big(e^{z_1}, \ldots, e^{z_m} \Big) \in (\mathbb{C}^\times)^m \colon (z_1, \ldots, z_m) \in \operatorname{Ker} A_{\mathbb{C}} \Big\}.$$

Заметим, что $C \subset G$.

Группа G действует на $U(\mathcal{K})$, и её орбиты задают голоморфное сло
ние на $U(\mathcal{K})$. Так как $G \subset (\mathbb{C}^\times)^m$, это действие свободно на открыто
подмножестве $(\mathbb{C}^\times)^m \subset U(\mathcal{K})$, так что общий лист этого слоение имее
комплексную размерность $m - n = 2\ell$.

ℓ-мерная замкнутая подгруппа $C \subset G$ действует на $U(\mathcal{K})$ свободно и со
ственно по теореме 2, так что фактор $U(\mathcal{K})/C$ несёт голоморфное де
ствие факторгруппы $D = G/C$.

$\mathcal{F}$ – голоморфное слоение на $U(\mathcal{K})/C \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ орбитами группы D.

Подгруппа $G \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ замкнута тогда и только тогда, когда она изо
морфна $(\mathbb{C}^\times)^{2\ell}$; в этом случае подпространство $\operatorname{Ker} A \subset \mathbb{R}^m$ рациональн
Тогда веер Σ также рационален V_Σ – фактор $U(\mathcal{K})/G$. Слоение $\mathcal{F}$ задаё
голоморфное расслоение $\pi\colon \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to V_\Sigma$ со слоем комплексный тор G/C.

Для конфигурации ненулевых векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ общего положени
групп G биголоморфна $\mathbb{C}^{2\ell}$, а факторгруппа $D = G/C$ биголоморфна $\mathbb{C}^\ell$

$(1,1)$-форма $\omega_{\mathcal{F}}$ на комплексном многообразии $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ наз. трансверсальн
кэлеровой по отношению к слоению $\mathcal{F}$, если
а) $\omega_{\mathcal{F}}$ замкнута, т.е. $d\omega_{\mathcal{F}} = 0$;
б) $\omega_{\mathcal{F}}$ неотрицательна и её нулевое подпространство есть касательно
пространство к $\mathcal{F}$.

Полный симплициальный веер Σ в $\mathbb{R}^n$ наз. слабо нормальным, если сущ
ствует (не обязательно простой) n-мерный многогранник P такой, что
есть симплициальное подразбиение нормального веера Σ_P.

Теорема 3. *Пусть Σ – слабо нормальный веер. Тогда существует* $(1,1$
*форма $\omega_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})/C$, которая трансверсально кэлерова для сло
ния $\mathcal{F}$ на плотном открытом подмножестве $(\mathbb{C}^\times)^m/C \subset U(\mathcal{K})/C$.*

Для каждого $J \subset [m]$ определим координатное подмногообразие в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J} = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \colon z_i = 0 \quad \text{for } i \notin J\}.$$

Подмногообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$ есть фактор

$$U(\mathcal{K}_J) = \{(z_1, \ldots, z_m) \in U(\mathcal{K}) \colon z_i = 0 \quad \text{for } i \notin J\}$$

по действию группы $C \cong \mathbb{C}^\ell$. В частности, $U(\mathcal{K}_J)/C$ – комплексное под
многообразие в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})/C$.

Заметим, что замыкание любой $(\mathbb{C}^\times)^m$-орбиты в $U(\mathcal{K})$ имеет вид $U(\mathcal{K}_J)$
для некоторого $J \subset [m]$ (плотная орбита соответствует $J = [m]$).

Аналогично, замыкание любой $(\mathbb{C}^\times)^m/C$-орбиты в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong U(\mathcal{K})/C$ имее
вид $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$.

Теорема 4. *Предположим, что комплексная структура на* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})/$
задаётся данным общего положения. Тогда любой дивизор на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ *ест*
объединение координатных дивизоров.

Более того, если веер Σ *является слабо нормальным, то любое компак*
ное неприводимое аналитическое подмножество $Y \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ *положительно*
размерности является координатным подмногообразием.

Следствие 1. *Для комплексной структуры общего положения на* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ *о*
сутствуют непостоянные мероморфные функции.

[BP] Victor Buchstaber and Taras Panov. *Torus Actions and Their Applicatio in Topology and Combinatorics.* University Lecture Series, vol. **24**, Ame Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[PU] Taras Panov and Yuri Ustinovsky. *Complex-analytic structures on momen angle manifolds*. Moscow Math. J. **12** (2012), no. 1.

[PUV] Taras Panov, Yuri Ustinovsky and Misha Verbitsky. *Complex geometry moment-angle manifolds*. Preprint (2013); arXiv:1308.2818.