Гомотопический тип момент-угол-комплексов

по совместной работе с Jelena Grbic, Stephen Theriault и Jie Wu

Тарас Панов

мех-мат МГУ

Рождественские математические встречи фонда «Династия»
НМУ, Москва, 8–11 января 2013

1. Задачи

- описать гомотопический тип момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для разных серий симплициальных комплексов $\mathcal{K}$;
- описать умножение и высшие произведения Масси в Tor-алгебре $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k})$ кольца граней $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$;
- задать алгебру Йонеды $\mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ образующими и соотношениями;
- описать структуру алгебры Понтрягина $H_*(\Omega DJ(\mathcal{K}))$ и её коммутанта $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ при помощи итерированных и высших произведений Уайтхеда (Самельсона);
- описать гомотопический тип пространств петель $\Omega DJ(\mathcal{K})$ и $\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

2. Предварительные сведения

(X, A) — пара пространств.

$\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$, $\varnothing \in \mathcal{K}$.

Для каждого $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$(X, A)^I = Y_1 \times \cdots \times Y_m, \qquad \text{где } Y_i = \begin{cases} X & \text{при } i \in I, \\ A & \text{при } i \notin I. \end{cases}$$

Определим $\mathcal{K}$-полиэдральное произведение пары (X, A) как

$$(X, A)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (X, A)^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} X \times \prod_{i \notin I} A \Big).$$

Пример

1. $(X, A) = (D^2, S^1)$,
   $\mathcal{Z}_\mathcal{K} := (D^2, S^1)^\mathcal{K}$ — момент-угол-комплекс.
   На $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ имеется действие тора T^m.
2. $(X, A) = (\mathbb{C}P^\infty, pt)$,
   $DJ(\mathcal{K}) := (\mathbb{C}P^\infty, pt)^\mathcal{K}$ — пространство Девиса–Янушкевича.
3. $(X, A) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)$,

$$U(\mathcal{K}) := (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^\mathcal{K} = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0\}$$

— дополнение конфигурации координатных подпространств.

Теорема

Существует деформационная ретракция

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \hookrightarrow U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_\mathcal{K}$$

Имеем гомотопическое расслоение

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} & \longrightarrow & DJ(\mathcal{K}) & \longrightarrow & (\mathbb{C}P^\infty)^m \\
\| & & \| & & \| \\
(D^2, S^1)^{\mathcal{K}} & & (\mathbb{C}P^\infty, pt)^{\mathcal{K}} & & (\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}
\end{array}$$

которое тривиализуется после перехода к пространствам петель:

$$\Omega DJ(\mathcal{K}) \simeq \Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times T^m,$$

однако такое разложение не имеет места на уровне H-пространств.

Предложение

Существует точная последовательность некоммутативных алгебр

$$1 \longrightarrow H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \longrightarrow H_*(\Omega DJ(\mathcal{K})) \xrightarrow{\mathrm{Ab}} \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \longrightarrow 1$$

где $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ *— внешняя алгебра,* $\deg u_i = 1$.

Пусть $\mathbf{k}$ — поле или $\mathbb{Z}$.
Кольцо граней (кольцо Стенли–Райснера) комплекса $\mathcal{K}$

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] := \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m] \big/ \big(v_{i_1} \cdots v_{i_k} = 0, \quad \text{если } \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K} \big)$$

где $\deg v_i = 2$.

Теорема

$$\begin{aligned}
H^*(DJ(\mathcal{K})) &\cong \mathbf{k}[\mathcal{K}] \\
H_*(\Omega DJ(\mathcal{K})) &\cong \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) && \mathbf{k} \text{ — } \textit{поле} \\
H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \\
&\cong H\big[\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}], d\big], && du_i = v_i, dv_i = 0 \\
&\cong \bigoplus_{I \notin \mathcal{K}} \widetilde{H}^{*-|I|-1}(\mathcal{K}_I) && \mathcal{K}_I = \mathcal{K}|_I
\end{aligned}$$

$\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ называется кольцом Голода, если умножение и высшие произведения Масси в $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$ тривиальны.

3. Случай флагового комплекса

$\mathcal{K}$ наз. **флаговым комплексом**, если любое его множество вершин, попарно соединённых рёбрами, порождает грань.

$$
\begin{array}{ccc}
\{\text{флаговые комплексы на } [m]\} & \overset{1-1}{\longleftrightarrow} & \{\text{простые графы на } [m]\} \\
\mathcal{K} & \rightarrow & \mathcal{K}^1 \quad (\text{1-остов}) \\
\mathcal{K}(\Gamma) & \leftarrow & \Gamma
\end{array}
$$

где $\mathcal{K}(\Gamma)$ — **комплекс клик** графа Γ
(каждая клика (полный подграф) заполняется гранью).

Граф Γ наз. хордовым, если любой его цикл из $\geqslant 4$ рёбер имеет хорду (ребро, соединяющее две несмежные вершины цикла).

Эквивалентно, Γ является хордовым, если в нём нет индуцированных подграфов-циклов длины $\geqslant 4$.

Теорема (Фалкерсон–Гросс)

Граф является хордовым тогда и только тогда, когда его вершины можно упорядочить таким образом, что для каждого i все меньшие соседи i-й вершины образуют клику.

(perfect elimination ordering)

Теорема (Грбич–П.–Терио–Ву)

$\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, $\mathbf{k}$ — поле. Следующие условия эквивалентны:

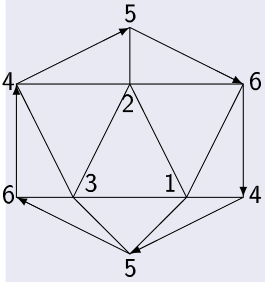
1. $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ *— кольцо Голода;*
2. *умножение в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ тривиально;*
3. $\Gamma = \mathcal{K}^1$ *— хордовый граф;*
4. $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ *гомотопически эквивалентен букету сфер.*

Эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) был доказаны в работе [Berglund–Jöllenbeck2007].

Импликации (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) и (4) $\Rightarrow$ (1) верны для любого $\mathcal{K}$.

Но импликация (3) $\Rightarrow$(4) неверна для комплексов, не являющихся флаговыми.

Пример



Ненулевые группы когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ суть

$$H^0 = \mathbb{Z}, \quad H^5 = \mathbb{Z}^{10}, \quad H^6 = \mathbb{Z}^{15}, \quad H^7 = \mathbb{Z}^6$$
$$H^9 = \mathbb{Z}/2.$$

Все произведения Масси тривиальны по соображениям размерности, т.е. $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ — кольцо Голода (над любым полем).

Тем не менее, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ не может быть гомотопически эквивалентно букету сфер из-за кручения. На самом деле

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq (S^5)^{\vee 10} \vee (S^6)^{\vee 15} \vee (S^7)^{\vee 6} \vee \Sigma^7 \mathbb{R}P^2.$$

Вопрос

Пусть умножение в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ тривиально, т.е. $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ является комплексом Голода над любым полем. Верно ли, что $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — ко-H-пространство или даже надстройка, как в предыдущем примере?

Как определить число сфер в букете? Каким ещё может быть $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$?

Теорема

Для любого флагового комплекса $\mathcal{K}$ имеет место изоморфизм

$$H_*(\Omega DJ(\mathcal{K})) \cong T\langle u_1, \ldots, u_m \rangle \big/ \big(u_i^2 = 0,\ u_i u_j + u_j u_i = 0 \text{ при } \{i, j\} \in \mathcal{K}\big)$$

где $T\langle u_1, \ldots, u_m \rangle$ — свободная алгебра с m образующими степени 1.

Напомним точную последовательность некоммутативных алгебр

$$1 \longrightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \longrightarrow H_*(\Omega DJ(\mathcal{K})) \xrightarrow{\mathrm{Ab}} \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \longrightarrow 1$$

Предложение

Для флагового комплекса $\mathcal{K}$ ряд Пуанкаре алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ есть

$$P(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}); t) = \frac{1}{(1+t)^{m-n}(1 - h_1 t + \cdots + (-1)^n h_n t^n)},$$

где $\boldsymbol{h}(\mathcal{K}) = (h_0, h_1 \ldots, h_n)$ — h-вектор комплекса $\mathcal{K}$.

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс. Алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, рассматриваемая как коммутант алгебры $H_*(\Omega DJ(\mathcal{K}))$, мультипликативно порождена $\sum_{I\subset[m]} \dim \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I)$ итерированными коммутаторам вида

$$[u_j, u_i], \quad [u_{k_1}, [u_j, u_i]], \quad \ldots, \quad [u_{k_1}, [u_{k_2}, \cdots [u_{k_{m-2}}, [u_j, u_i]] \cdots]]$$

где $k_1 < k_2 < \cdots < k_p < j > i$, $\quad k_s \neq i$ для любого s,
а i — наименьшая вершина в компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_p,j,i\}}$, не содержащей j.

Этот набор мультипликативных образующих минимален.

Вот важный частный случай (соответствующий $\mathcal{K} = m$ точек).
Это — аналог базиса коммутанта свободной алгебры, описанного в [Cohen–Neisendorfer1984]

Лемма

Пусть A — коммутант алгебры $T\langle u_1, \ldots, u_m \rangle/(u_i^2 = 0)$:

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow T\langle u_1, \ldots, u_m \rangle/(u_i^2 = 0) \longrightarrow \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \longrightarrow 1$$

где $\deg u_i = 1$*.*

Тогда A является свободной ассоциативной алгеброй.
A минимально порождена итерированными коммутаторами вида

$$[u_j, u_i], \quad [u_{k_1}, [u_j, u_i]], \quad \ldots, \quad [u_{k_1}, [u_{k_2}, \cdots [u_{k_{m-2}}, [u_j, u_i]] \cdots]]$$

где $k_1 < k_2 < \cdots < k_p < j > i$ и $k_s \neq i$ для любого s.
Число коммутаторов длины ℓ равно $(\ell - 1)C_m^\ell$.

Следствие

Пусть $\mathcal{K}$ *— флаговый комплекс, а момент-угол-комплекс* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ *гомотопически эквивалентен букету сфер.*

Тогда число сфер размерности $\ell+1$ *в букете равно* $\sum_{|I|=\ell} \dim \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I)$, *для* $2 \leqslant \ell \leqslant m$.

В частности, $H^i(\mathcal{K}_I) = 0$ *при* $i > 0$ *для любого* I.

Ссылки

Jelena Grbic, Taras Panov, Stephen Theriault and Jie Wu.
Homotopy types of moment-angle complexes.
Preprint (2012); arXiv:1211.0873.