

# Момент-угол многообразия в торической топологии

Т. Е. Панов

*МГУ им. М. В. Ломоносова*

Конференция “Молодая Математика России”  
12-13 января 2009, НМУ, Москва

## Момент-угол многообразия простых многогранников.

$\mathbb{R}^n$  — евклидово векторное пространства. Рассмотрим выпуклое множество

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq m\}, \quad \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}.$$

Предположим:

- a)  $\dim P = n$ ;
- b) нет лишних неравенств (никакое неравенство нельзя убрать, не изменив  $P$ );
- c)  $P$  ограничено;
- d) граничные гиперплоскости  $H_i = \{(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i = 0\}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , пересекаются в общем положении в каждой вершине.

Тогда  $P$  является  $n$ -мерным **выпуклым простым многогранником** с  $m$  **гипергранями**

$$F_i = \{\mathbf{x} \in P : (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i = 0\} = P \cap H_i$$

и нормальными векторами  $\mathbf{a}_i$ , for  $1 \leq i \leq m$ .

**Грани** многогранника  $P$  образуют частично упорядоченное множество по вложению. Два многогранника называются **комбинаторно эквивалентными**, если их частично упорядоченные множества граней изоморфны. Классы комбинаторной эквивалентности называются **комбинаторными многогранниками**.

Многогранник  $P$  можно задать одним матричным неравенством

$$P = \{\mathbf{x} : A_P \mathbf{x} + \mathbf{b}_P \geq 0\},$$

где  $A_P = (a_{ij})$  матрица размера  $m \times n$  со строками  $\mathbf{a}_i$ , а  $\mathbf{b}_P$  — вектор-столбец из чисел  $b_i$ .

Аффинное отображение

$$i_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto A_P \mathbf{x} + \mathbf{b}_P$$

вкладывает  $P$  в  $\mathbb{R}_{\geq}^m = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : y_i \geq 0\}$ .

Теперь определим пространство  $\mathcal{Z}_P$  из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m & & (z_1, \dots, z_m) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m & & (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2) \end{array}$$

Тогда  $i_Z$  задаёт некоторое  $T^m$ -эквивариантное вложение.

**Предл 1.**  $\mathcal{Z}_P$  является гладким  $T^m$ -многообразием с тривиализованным нормальным расслоением вложения  $i_Z: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{C}^m$ .

Идея доказательства.

- 1) Запишем образ  $i_P(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$  как множество общих решений  $m - n$  линейных уравнений  $\sum_{k=1}^m c_{jk}(y_k - b_k) = 0$ ,  $1 \leq j \leq m - n$ ;
- 2) заменив каждое  $y_k$  на  $|z_k|^2$ , получим представление множества  $\mathcal{Z}_P$  в виде пересечения  $m - n$  вещественных квадрик:

$$\sum_{k=1}^m c_{jk} (|z_k|^2 - b_k) = 0 \quad \text{при } 1 \leq j \leq m - n.$$

- 3) проверим, что пересечение в 2) является невырожденным, т.е. градиенты линейно независимы в каждой точке множества  $\mathcal{Z}_P$ . □

$\mathcal{Z}_P$  называется **момент-угол многообразием**, соответствующим многограннику  $P$ .

## Исходная конструкция Девиса–Янушкевича.

Для каждого  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$  положим

$$T(\mathbf{y}) = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \in T^m : t_i = 1, \text{ если } y_i = 0\} \subset T^m.$$

Отождествим  $\mathbb{C}^m$  с факторпространством  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \times T^m / \sim$ , где

$$(\mathbf{y}, \mathbf{t}) \cong (\mathbf{y}', \mathbf{t}') \text{ при } \mathbf{y} = \mathbf{y}' \text{ and } \mathbf{t}^{-1} \mathbf{t}' \in T(\mathbf{y}).$$

Тогда  $i_Z: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{C}^m$  вкладывает  $\mathcal{Z}_P$  как подпространство  $P \times T^m / \sim$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \times T^m / \sim$ .

**Сл 1.** Топологический тип многообразия  $\mathcal{Z}_P$  зависит лишь от комбинаторного типа многогранника  $P$ .

На самом деле  $T^m$ -эquivариантная гладкая структура на  $\mathcal{Z}_P$  также единственна [Bosio–Meersseman].

## Симплициальные комплексы.

$K$  — (абстрактный) **симплициальный комплекс** на множестве  $[m] = \{1, \dots, m\}$ .

$\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \in K$  — **симплекс**; всегда предполагаем  $\emptyset \in K$ .

**Прим 1.** Для простого многогранника  $P$  положим

$$K_P = \left\{ \sigma = \{i_1, \dots, i_k\} : F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset \text{ в } P \right\}$$

— **граничный комплекс** двойственного (или **полярного**) многогранника. Тогда  $|K_P| \cong S^{n-1}$ .

## Момент-угол комплексы.

$D^2 \subset \mathbb{C}$  — единичный диск. Для данного  $\omega \subset \{1, \dots, m\}$  положим

$$B_\omega := \{(z_1, \dots, z_m) \in (D^2)^m : |z_i| = 1 \text{ при } i \notin \omega\} \\ \cong (D^2)^{|\omega|} \times (S^1)^{m-|\omega|}.$$

## Момент-угол комплекс

$$\mathcal{Z}_K := \bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma \subset (D^2)^m.$$

**Предл 2.** На  $\mathcal{Z}_K$  имеется действие тора  $T^m$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_K & \longrightarrow & (D^2)^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{cone } K' & \longrightarrow & I^m \end{array},$$

где  $K'$  — барицентрическое подразбиение;

$$\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \mapsto e_\sigma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m),$$

где  $\varepsilon_i = 0$  при  $i \in \sigma$  и  $\varepsilon_i = 1$  при  $i \notin \sigma$ .



Если  $K = K_P$  для простого многогранника  $P$ , то  $\text{cone } K'$  можно отождествить с  $P$ , а  $\mathcal{Z}_{K_P}$  с  $\mathcal{Z}_P$ !

Более того,

**Предл 3.** а) Пусть  $|K| \cong S^{n-1}$  (триангуляция сферы с  $m$  вершинами). Тогда  $\mathcal{Z}_K$  является  $(m+n)$ -многообразием;

б) Пусть  $K$  — триангуляция многообразия. Тогда  $\mathcal{Z}_K \setminus \mathcal{Z}_\emptyset$  есть открытое многообразие, где  $\mathcal{Z}_\emptyset \cong T^m$ .

**Прим 2.**  $\mathcal{Z}_{\partial \Delta^n} \cong S^{2n+1}$ . При  $n = 1$  имеем

$$S^3 = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2 \subset D^2 \times D^2.$$

## Первые итоги.

Мы имеем

- полное пересечение вещественных квадратик, задаваемое многогранником  $P$ ;
- факторпространства  $P \times T^m / \sim$  и  $|\text{cone } K'| \times T^m / \sim$ ;
- подпространство в полидиске  $\bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma \subset (D^2)^m$ .

Эти три пространства совпадают при  $K = K_P$ , но квадратичное описание для  $\mathcal{Z}_K$  отсутствует для «немногогранных» триангуляций  $K$ .

**Вопрос 1.** *Имеется ли схожее описание для  $\mathcal{Z}_K$  в случае, когда  $K$  является триангуляцией сферы, не происходящей ни из какого многогранника?*

Несмотря на то, что  $\mathcal{Z}_P$  определяется как вещественное полное пересечение, оно является комплексным многообразием (если размерность нечётна, надо сначала умножить на  $S^1$ ). Таким образом получается семейство некэлеровых комплексных многообразий, обобщающее известные серии Хопфа и Калаби–Экмана [[Bosio–Meersseman](#)].

## Дополнения конфигураций координатных подпространств.

Координатное подпространство в  $\mathbb{C}^m$  имеет вид

$$L_\omega = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\},$$

где  $\omega = \{i_1, \dots, i_k\}$ . Конфигурации координатных подпространств в  $\mathbb{C}^m$  параметризуются симплициальными комплексами  $K$  на  $m$  вершинах. Их дополнения имеют вид

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\omega \notin K} L_\omega.$$

**Предл 4.** Имеется  $T^m$ -эquivариантная деформ. ретракция

$$U(K) \xrightarrow{\cong} \mathcal{Z}_K.$$

## Реализация $\mathcal{Z}_K$ в виде гомотопического слоя.

Пространство Девиса–Янушкевича есть конструкция Бореля

$$DJ(K) := ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K.$$

**Предл 5.** Имеется гомотопическая эквивалентность

$$DJ(K) \xrightarrow{\cong} \bigcup_{\sigma \in K} BT^\sigma \subset BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m.$$

**Сл 2.** а)  $\mathcal{Z}_K \simeq \text{hofibre}\left(\bigcup_{\sigma \in K} BT^\sigma \hookrightarrow BT^m\right)$ ;

б)  $H^*(DJ(K)) \cong H_{T^m}^*(\mathcal{Z}_K) \cong \mathbb{Z}[K]$ , где

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / \left(v_{i_1} \cdots v_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \notin K\right)$$

— *кольцо граней* (или *кольцо Стенли–Риснера*) комплекса  $K$ ,  
 $\deg v_i = 2$ .

## Вычисление когомологий.

**Теор 1.** [Бухштабер-П.] Имеется изоморфизм (би)градуированных алгебр

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_K; \mathbb{Z}) &\cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}^{*,*}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}) \\ &\cong H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]; d], \end{aligned}$$

где  $du_i = v_i$ ,  $dv_i = 0$  и  $1 \leq i \leq m$ . В частности,

$$H^p(\mathcal{Z}_K) \cong \sum_{-i+2j=p} \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, 2j}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}).$$

**Сл 3.** [Hochster'1975]

$$\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}^{-i, 2j}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{|\omega|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_\omega),$$

где  $K_\omega$  — *полный подкомплекс* (ограничение  $K$  на подмножество  $\omega \subset \{1, \dots, m\}$ ).

Предыдущие формулы можно переписать в терминах  $P$ :

**Сл 4.**

$$H^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P) = \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}^{-i,2j}(\mathbb{Z}[P], \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{|\omega|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(P_\omega),$$

где  $P_\omega = \bigcup_{i \in \omega} F_i$  — объединение гиперграней из множества  $\omega$ .

**Сл 5. [Goresky–MacPherson]**

$$\widetilde{H}_i(U(K)) = \bigoplus_{\omega \in \widehat{K}} \widetilde{H}^{2m-2|\omega|-i-2}(\mathrm{link}_{\widehat{K}} \omega),$$

где  $\widehat{K} = \{\omega: [m] \setminus \omega \notin K\}$  — комплекс, *двойственный по Александру*.

**Прим 3.** Пусть  $K = m$  точек. Тогда

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} \{z_i = z_j = 0\}$$

— дополнение к набору всех координатных плоскостей коразмерности 2, а

$$H^*(U(K)) = H^*\left(\bigvee_{k=2}^m (S^{k+1})^{\vee(k-1)} \binom{m}{k}\right).$$

**Прим 4.** Пусть  $P$  —  $m$ -угольник, т.е.  $K_P$  — граница  $m$ -угольника. Тогда

$$U(K_P) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{i-j \neq 0, 1 \pmod m} \{z_i = z_j = 0\};$$

$Z_P$  является  $(m + 2)$ -мерным многообразием, а

$$H^*(Z_P) = H^*(U(K_P)) = H^*\left(\#_{k=2}^{m-2} (S^{k+1} \times S^{m-k+1})^{\#(k-1)} \binom{m-2}{k}\right).$$



**Предупреждение.** Вообще говоря, топология многообразий  $\mathcal{Z}_P$  значительно сложнее, чем в предыдущих примерах. Например, если  $P$  является 3-мерным **многогранником Шашеффа** (или **ассоциаэдром**), то в когомологиях многообразия  $\mathcal{Z}_P$  имеются нетривиальные **тройные произведения Масси** [**Баскаков**].

## Квазиторические многообразия.

Пусть дан простой многогранник  $P$  и целочисленная  $n \times m$ -матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{1,n+1} & \dots & \lambda_{1,m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \lambda_{2,n+1} & \dots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{n,n+1} & \dots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая условию

набор столбцов  $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$ , соответствующих каждой вершине  $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$  образует базис решётки  $\mathbb{Z}^n$ .

$(P, \Lambda)$  называется **комбинаторной квазиторической парой**.

Положим  $K = K(\Lambda) := \ker(\Lambda: T^m \rightarrow T^n) \cong T^{m-n}$ .

**Предл 6.** Подгруппа  $K(\Lambda)$  действует на  $\mathcal{Z}_P$  свободно.

Факторпространство

$$M = M(P, \Lambda) := \mathcal{Z}_P / K(\Lambda)$$

называется **квазиторическим многообразием**, соответствующим паре  $(P, \Lambda)$ . На нём имеется действие тора  $T^m / K(\Lambda) \cong T^n$ , удовлетворяющее двум условиям **Девиса–Янушкевича**:

- a) действие тора  $T^n$  локально стандартно;
- b) имеется проекция  $\pi: M \rightarrow P$ , слоями которой являются орбиты  $T^n$ -действия.

## Алгебраические и гамильтоновы торические многообразия.

Частный случай описанной выше конструкции квазиторического многообразия  $M$  из  $\mathcal{Z}_P$  известен как конструкция **симплектической редукции** для **гамильтоновых торических многообразий**. В этом случае берётся  $\Lambda = A_P^t$ ; тогда  $M$  есть торической многообразиие, соответствующее **многограннику Дельзанта**

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq m\}, \quad \mathbf{a}_i \in \mathbb{Z}^n, b_i \in \mathbb{R}.$$

Здесь дополнительно предполагается, что нормальные векторы  $\mathbf{a}_i$  целочисленны и выполнено **условие Дельзанта**:

для каждой вершины  $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$  в  $P$  нормальные векторы  $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}$  образуют базис решётки  $\mathbb{Z}^n$

Тогда  $\mathcal{Z}_P$  является многообразием уровня **отображения моментов**  $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ , соответствующего гамильтоновому действию группы  $K = \text{Ker } \Lambda = \text{Ker } A^t$  на  $\mathbb{C}^m$ .

## Приложения к комплексным кобордизмам.

Рассмотрим одномерные векторные расслоения

$$\rho_i: \mathbb{Z}_P \times_K \mathbb{C}_i \rightarrow M, \quad 1 \leq i \leq m,$$

где  $\mathbb{C}_i$  есть пространство 1-мерного комплексного  $T^m$ -представления, задаваемого  $i$ -й проекцией  $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}_i$ .

**Теор 2.** *Имеется изоморфизм вещественных расслоений*

$$\tau M \oplus \mathbb{R}^{m-n} \xrightarrow{\cong} \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_m.$$

Это позволяет наделить квазиторическое многообразие  $M$  канонической эквивариантной стабильно комплексной структурой. Тем самым задан класс комплексных кобордизмов  $[M] \in \Omega_U$ .

**Теор 3. [Бухштабер-П.-Рэй]** Каждый класс комплексных кобордизмов в размерностях  $\dim > 2$  содержит к.-т. многообразие.

Кольцо комплексных кобордизмов  $\Omega_U$  мультипликативно порождается классами  $[H_{ij}]$ ,  $0 \leq i \leq j$ , **гиперповерхностей Милнора**

$$H_{ij} = \{(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : z_0 w_0 + \dots + z_i w_i = 0\}.$$

Но  $H_{ij}$  не являются квазиторическими многообразиями при  $i > 1$ .

*Идея доказательства.*

1) Каждое  $H_{ij}$  можно заменить на к.-т. (и даже торическое) многообразие  $B_{ij}$  так, что  $\{B_{ij}\}$  по-прежнему мультипликативно порождают кольцо  $\Omega_U$ . Таким образом, каждое стабильно комплексное многообразие кобордантно несвязному объединению произведений многообразий  $B_{ij}$ . Каждое такое произведение является к.-т. многообразием.

2) Несвязные объединения можно заменить на связные суммы. Трудности возникают из-за необходимости одновременно следить за действием тора и стабильно комплексной структурой.

- [1] Victor M Buchstaber and Taras E Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*. University Lecture Series, vol. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.
- [2] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*. Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2; arXiv:math.AT/0609346.
- [3] Megumi Harada, Yael Karshon, Mikiya Masuda, Taras Panov, eds. *Toric Topology*. Contemp. Math., vol. **460**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2008.
- [4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике*. Издательство МЦНМО, Москва, 2004.
- [5] Taras Panov. *Cohomology of face rings, and torus actions*, in “Surveys in Contemporary Mathematics”. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. **347**, Cambridge, U.K., 2008, pp. 165–201; arXiv:math.AT/0506526.