Торическая топология

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов

МГУ им. М. В. Ломоносова, ИППИ РАН

Конференция ИТиС-2009,
15–18 декабря 2009, Бекасово

Момент-угол многообразия простых многогранников.

$\mathbb{R}^n$ — евклидово векторное пространства. Рассмотрим выпуклое множество

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i \geqslant 0 \ \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m\}, \quad \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R}.$$

Предположим:

a) $\dim P = n$;

b) нет лишних неравенств (никакое неравенство нельзя убрать, не изменив P);

c) P ограничено;

d) граничные гиперплоскости $H_i = \{(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i = 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, пересекаются в общем положении в каждой вершине.

Тогда P является n-мерным выпуклым простым многогранником с m гипергранями

$$F_i = \{\boldsymbol{x} \in P \colon (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i = 0\} = P \cap H_i$$

и нормальными векторами $\boldsymbol{a}_i$, for $1 \leqslant i \leqslant m$.

Грани многогранника P образуют частично упорядоченное множество по вложению. Два многогранника называются комбинаторно эквивалентными, если их частично упорядоченные множества граней изоморфны. Классы комбинаторной эквивалентности называются комбинаторными многогранниками.

Многогранник P можно задать одним матричным неравенством

$$P = \{\boldsymbol{x} \colon A_P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_P \geqslant 0\},$$

где $A_P = (a_{ij})$ матрица размера $m \times n$ со строками $\boldsymbol{a}_i$, а $\boldsymbol{b}_P$ — вектор-столбец из чисел b_i.

Аффинное отображение

$$i_P \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{x} \mapsto A_P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_P$$

вкладывает P в $\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geqslant 0\}$.

Теперь определим пространство $\mathcal{Z}_P$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} (z_1, \ldots, z_m) \\ \downarrow \\ (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2) \end{array}$$

Тогда i_Z задаёт некоторое T^m-эквивариантное вложение.

Предл 1. *$\mathcal{Z}_P$ является гладким T^m-многообразием с тривиализованным нормальным расслоением вложения $i_Z\colon \mathcal{Z}_P \to \mathbb{C}^m$.*

Идея доказательства.

1) Запишем образ $i_P(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ как множество общих решений $m-n$ линейных уравнений $\sum_{k=1}^m c_{jk}(y_k - b_k) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m-n$;
2) заменив каждое y_k на $|z_k|^2$, получим представление множества $\mathcal{Z}_P$ в виде пересечения $m-n$ вещественных квадрик:

$$\sum_{k=1}^{m} c_{jk}\left(|z_k|^2 - b_k\right) = 0 \text{ при } 1 \le j \le m-n.$$

3) проверим, что пересечение в 2) является невырожденным, т.е. градиенты линейно независимы в каждой точке множества $\mathcal{Z}_P$. $\square$

$\mathcal{Z}_P$ называется момент-угол многообразием, соответствующим многограннику P.

Исходная конструкция Девиса–Янушкевича.

Для каждого $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m_{\geqslant}$ положим

$$T(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in T^m \colon t_i = 1, \text{ если } y_i = 0\} \subset T^m.$$

Отождествим $\mathbb{C}^m$ с факторпространством $\mathbb{R}^m_{\geqslant} \times T^m/\sim$, где

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) \cong (\boldsymbol{y}', \boldsymbol{t}') \text{ при } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' \text{ and } \boldsymbol{t}^{-1}\boldsymbol{t}' \in T(\boldsymbol{y}).$$

Тогда $i_Z \colon \mathcal{Z}_P \to \mathbb{C}^m$ вкладывает $\mathcal{Z}_P$ как подпространство $P \times T^m/\!\sim$ in $\mathbb{R}^m_{\geqslant} \times T^m/\!\sim$.

Сл 1. *Топологический тип многообразия $\mathcal{Z}_P$ зависит лишь от комбинаторного типа многогранника P.*

На самом деле T^m-эквивариантная гладкая структура на $\mathcal{Z}_P$ также единственна [Bosio–Meersseman].

Симплициальные комплексы.

K — (абстрактный) симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$.

$\sigma = \{i_1, \ldots, i_k\} \in K$ — симплекс; всегда предполагаем $\varnothing \in K$.

Прим 1. Для простого многогранника P положим

$$K_P = \Big\{\sigma = \{i_1, \ldots, i_k\} \colon F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k} \neq \varnothing \text{ в } P\Big\}$$

— граничный комплекс двойственного (или полярного) многогранника. Тогда $|K_P| \cong S^{n-1}$.

Момент-угол комплексы.

$D^2 \subset \mathbb{C}$ — единичный диск. Для данного $\omega \subset \{1, \dots, m\}$ положим

$$B_\omega := \{(z_1, \dots, z_m) \in (D^2)^m \colon |z_i| = 1 \text{ при } i \notin \omega\} \cong (D^2)^{|\omega|} \times (S^1)^{m-|\omega|}.$$

Момент-угол комплекс

$$\mathcal{Z}_K := \bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma \subset (D^2)^m.$$

Предл 2. *На $\mathcal{Z}_K$ имеется действие тора T^m:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_K & \longrightarrow & (D^2)^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{cone} K' & \longrightarrow & I^m \end{array},$$

где K' — барицентрическое подразбиение;

$$\sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \mapsto e_\sigma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m),$$

где $\varepsilon_i = 0$ при $i \in \sigma$ и $\varepsilon_i = 1$ при $i \notin \sigma$.

Если $K = K_P$ для простого многогранника P, то $\operatorname{cone} K'$ можно отождествить с P, а $\mathcal{Z}_{K_P}$ с $\mathcal{Z}_P$!

Более того,

Предл 3. *а) Пусть $|K| \cong S^{n-1}$ (триангуляция сферы с m вершинами). Тогда $\mathcal{Z}_K$ является $(m+n)$-многообразием;*

б) Пусть K — триангуляция многообразия. Тогда $\mathcal{Z}_K \setminus \mathcal{Z}_\varnothing$ есть открытое многообразие, где $\mathcal{Z}_\varnothing \cong T^m$.

Прим 2. $\mathcal{Z}_{\partial\Delta^n} \cong S^{2n+1}$. При $n = 1$ имеем

$$S^3 = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2 \subset D^2 \times D^2.$$

Первые итоги.

Мы имеем

- полное пересечение вещественных квадрик, задаваемое многогранником P;
- факторпространства $P \times T^m/\sim$ и $|\operatorname{cone} K'| \times T^m/\sim$;
- подпространство в полидиске $\bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma \subset (D^2)^m$.

Эти три пространства совпадают при $K = K_P$, но квадратичное описание для $\mathcal{Z}_K$ отсутствует для «немногогранных» триангуляций K.

Вопрос 1. *Имеется ли схожее описание для $\mathcal{Z}_K$ в случае, когда K является триангуляцией сферы, не происходящей ни из какого многогранника?*

Несмотря на то, что $\mathcal{Z}_P$ определяется как *вещественное* полное пересечение, оно является *комплексным* многообразием (если размерность нечётна, надо сначала умножить на S^1). Таким образом получается семейство некэлеровых комплексных многообразий, обобщающее известные серии Хопфа и Калаби–Экмана [Bosio–Meersseman].

Дополнения конфигураций координатных подпространств.

Координатное подпространство в $\mathbb{C}^m$ имеет вид

$$L_\omega = \{(z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m \colon z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\},$$

где $\omega = \{i_1,\ldots,i_k\}$. Конфигурации координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$ параметризуются симплициальными комплексами K на m вершинах. Их дополнения имеют вид

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\omega \notin K} L_\omega.$$

Предл 4. *Имеется T^m-эквивариантная деформ. ретракция*

$$U(K) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_K.$$

Реализация $\mathcal{Z}_K$ в виде гомотопического слоя.

Пространство Девиса–Янушкевича есть конструкция Бореля

$$DJ(K) := ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K.$$

Предл 5. *Имеется гомотопическая эквивалентность*

$$DJ(K) \xrightarrow{\simeq} \bigcup\nolimits_{\sigma\in K} BT^\sigma \subset BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m.$$

Сл 2. *а)* $\mathcal{Z}_K \simeq \operatorname{hofibre}\Bigl(\bigcup\limits_{\sigma\in K} BT^\sigma \hookrightarrow BT^m\Bigr)$*;*

б) $H^*(DJ(K)) \cong H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_K) \cong \mathbb{Z}[K]$, *где*

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]\big/\bigl(v_{i_1}\cdots v_{i_k} \colon \{i_1, \ldots, i_k\} \notin K\bigr)$$

— кольцо граней (или кольцо Стенли–Риснера) комплекса K, $\deg v_i = 2$.

Вычисление когомологий.

Теор 1. [Бухштабер-П.] *Имеется изоморфизм (би)градуированных алгебр*

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_K;\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}) \\ &\cong H\Big[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[K];d\Big], \end{aligned}$$

где $du_i = v_i$, $dv_i = 0$ и $1 \leqslant i \leqslant m$. В частности,

$$H^p(\mathcal{Z}_K) \cong \sum_{-i+2j=p} \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}).$$

Сл 3. [Hochster'1975]

$$\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{|\omega|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_\omega),$$

где K_ω — полный подкомплекс (ограничение K на подмножество $\omega \subset \{1,\dots,m\}$).

Предыдущие формулы можно переписать в терминах P:

Сл 4.

$$H^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P) = \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[P],\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{|\omega|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(P_\omega),$$

где $P_\omega = \bigcup_{i\in\omega} F_i$ *— объединение гиперграней из множества* ω.

Сл 5. [Goresky–MacPherson]

$$\widetilde{H}_i\big(U(K)\big) = \bigoplus_{\omega\in\widehat{K}} \widetilde{H}^{2m-2|\omega|-i-2}(\mathrm{link}_{\widehat{K}}\,\omega),$$

где $\widehat{K} = \{\omega\colon [m]\backslash\omega \notin K\}$ *– комплекс, двойственный по Александеру.*

Прим 3. Пусть $K = m$ точек. Тогда

$$U(K) = \mathbb{C}^m \Big\backslash \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \{z_i = z_j = 0\}$$

— дополнение к набору всех координатных плоскостей коразмерности 2, а

$$H^*(U(K)) = H^*\Big(\bigvee_{k=2}^{m} (S^{k+1})^{\vee (k-1)\binom{m}{k}}\Big).$$

Прим 4. Пусть P — m-угольник, т.е. K_P — граница m-угольника. Тогда

$$U(K_P) = \mathbb{C}^m \Big\backslash \bigcup_{i-j \neq 0,1 \mod m} \{z_i = z_j = 0\};$$

$\mathcal{Z}_P$ является $(m+2)$-мерным многообразием, а

$$H^*(\mathcal{Z}_P) = H^*(U(K_P)) = H^*\Big(\mathop{\#}_{k=2}^{m-2} (S^{k+1} \times S^{m-k+1})^{\#(k-1)\binom{m-2}{k}}\Big).$$

Предупреждение. Вообще говоря, топология многообразий $\mathcal{Z}_P$ значительно сложнее, чем в предыдущих примерах. Например, если P является 3-мерным многогранником Сташеффа (или ассоциаэдром), то в когомологиях многообразия $\mathcal{Z}_P$ имеются нетривиальные тройные произведения Масси [Баскаков].

Квазиторические многообразия.

Пусть дан простой многогранник P и целочисленная $n \times m$-матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{1,n+1} & \dots & \lambda_{1,m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \lambda_{2,n+1} & \dots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{n,n+1} & \dots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая условию

> набор столбцов $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$, соответствующих каждой вершине $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ образует базис решётки $\mathbb{Z}^n$.

(P, Λ) называется комбинаторной квазиторической парой.

Положим $K = K(\Lambda) := \ker(\Lambda\colon T^m \to T^n) \cong T^{m-n}$.

Предл 6. *Подгруппа* $K(\Lambda)$ *действует на* $\mathcal{Z}_P$ *свободно.*

Факторпространство

$$M = M(P, \Lambda) := \mathcal{Z}_P / K(\Lambda)$$

называется квазиторическим многообразием, соответствующим паре (P, Λ). На нём имеется действие тора $T^m/K(\Lambda) \cong T^n$, удовлетворяющее двум условиям Девиса–Янушкевича:

a) действие тора T^n локально стандартно;

b) имеется проекция $\pi\colon M \to P$, слоями которой являются орбиты T^n-действия.

Алгебраические и гамильтоновы торические многообразия.

Частный случай описанной выше конструкции квазиторического многообразия M из $\mathcal{Z}_P$ известен как конструкция симплектической редукции для гамильтоновых торических многообразий. В этом случае берётся $\Lambda = A_P^t$; тогда M есть торической многообразие, соответствующее многограннику Дельзанта

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i \geqslant 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m\}, \qquad \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{Z}^n,\ b_i \in \mathbb{R}.$$

Здесь дополнительно предполагается, что нормальные векторы $\boldsymbol{a}_i$ *целочисленны* и выполнено условие Дельзанта:

> для каждой вершины $v = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ в P нормальные векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n}$ образуют базис решётки $\mathbb{Z}^n$

Тогда $\mathcal{Z}_P$ является многообразием уровня отображения моментов $\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$, соответствующего гамильтоновому действию группы $K = \operatorname{Ker} \Lambda = \operatorname{Ker} A^t$ на $\mathbb{C}^m$.

Приложения к комплексным кобордизмам.

Рассмотрим одномерные векторные расслоения

$$\rho_i\colon \mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}_i \to M, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

где $\mathbb{C}_i$ есть пространство 1-мерного комплексного T^m-представления, задаваемого i-й проекцией $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}_i$.

Теор 2. *Имеется изоморфизм вещественных расслоений*

$$\tau M \oplus \mathbb{R}^{m-n} \xrightarrow{\cong} \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_m.$$

Это позволяет наделить квазиторическое многообразие M канонической эквивариантной стабильно комплексной структурой. Тем самым задан класс комплексных кобордизмов $[M] \in \Omega_U$.

Теор 3. [Бухштабер-П.-Рэй] *Каждый класс комплексных кобордизмов в размерностях* $\dim > 2$ *содержит к.-т. многообразие.*

Кольцо комплексных кобордизмов Ω_U мультипликативно порождается классами $[H_{ij}]$, $0 \leqslant i \leqslant j$, гиперповерхностей Милнора

$$H_{ij} = \{(z_0 : \ldots : z_i) \times (w_0 : \ldots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : z_0 w_0 + \ldots + z_i w_i = 0\}.$$

Но H_{ij} *не* являются квазиторическими многообразиями при $i > 1$.

Идея доказательства.

1) Каждое H_{ij} можно заменить на к.-т. (и даже торическое) многообразие B_{ij} так, что $\{B_{ij}\}$ по-прежнему мультипликативно порождают кольцо Ω_U. Таким образом, каждое стабильно комплексное многообразие кобордантно несвязному объединению произведений многообразий B_{ij}. Каждое такое произведение является к.-т. многообразием.

2) Несвязные объединения можно заменить на связные суммы. Трудности возникают из-за необходимости одновременно следить за действием тора и стабильно комплексной структурой.

[1] Victor M Buchstaber and Taras E Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics.* University Lecture Series, vol. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[2] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*. Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2; arXiv:math.AT/0609346.

[3] Megumi Harada, Yael Karshon, Mikiya Masuda, Taras Panov, eds. *Toric Topology*. Contemp. Math., vol. **460**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2008.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике*. Издательство МЦНМО, Москва, 2004.

[5] Taras Panov. *Cohomology of face rings, and torus actions*, in "Surveys in Contemporary Mathematics". London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. **347**, Cambridge, U.K., 2008, pp. 165–201; arXiv:math.AT/0506526.