Действия Торов и Комплексные Кобордизмы

Т. Е. Панов

Механико-математический факультет МГУ

на основе совместных работ с

В. М. Бухштабером и Н. Рэем

Доклад на конференции «Новиковский день», МИАН им. В. А. Стеклова

Теорема 1. *Каждый класс комплексных кобордизмов в размерности* > 2 *содержит квазиторическое многообразие.*

Другими словами, каждое стабильно комплексное многообразие кобордантно многообразию с хорошим действием «большого» тора.

Все многообразия предполагаются гладкими и замкнутыми, если не оговорено противное.

$M_1^n \simeq M_2^n$ (ко)бордантны, если существует многообразие W^{n+1} *с границей*, такое, что $\partial W^{n+1} = M_1 \sqcup M_2$.

Комплексные кобордизмы: кобордизмы между «комплексными» многообразиями.

комплексные мн-зия $\subset$ почти комплексные мн-зия $\subset$
$\subset$ стабильно комплексные мн-зия

Стабильно комплексная структура на M задаётся выбором изоморфизма

$$\tau M \oplus \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \xi,$$

где ξ — *комплексное* векторное расслоение.

Классы комплексных кобордизмов $[M]$ образуют кольцо комплексных кобордизмов Ω_U по отношению к операциями несвязного объединения и произведения.

$$\Omega_U \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, ...], \quad \dim a_i = 2i \quad \text{Новиков'1960}.$$

Квазиторические многобразия: многообразия M^{2n} с «хорошим» действием тора T^n;

- T^n-действие локально стандартно (локально выглядит как стандартное представление T^n в $\mathbb{C}^n$);

- пространство орбит M^{2n}/T^n является n-мерным комбинаторным простым многогранником P^n.

Примеры:

неособые проективные торические многообразия;

симплектические мн-зия M^{2n} с гамильтоновым действием T^n.

Построение квазиторических многообразий по комбинаторным данным.

$\mathbb{R}^n$ – евклидово векторное пространство. Рассмотрим выпуклое множество

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i \geqslant 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m\}, \qquad \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R}.$$

Предположим:

а) $\dim P = n$;

б) нет «лишних» неравенств (никакое неравенство нельзя убрать, не меняя P);

в) P ограничено;

г) ограничивающие гиперплоскости $H_i = \{(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i = 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, пересекаются в общем положении в каждой вершине; т.е. в каждой вершине сходится в точности n гиперграней.

Тогда P называется n-мерным выпуклым простым многогранником с m гипергранями. Каждая гипергрань задаётся как

$$F_i = \{\boldsymbol{x} \in P \colon (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i = 0\} = P \cap H_i,$$

и имеет нормальный вектор $\boldsymbol{a}_i$, $\;1 \leqslant i \leqslant m$.

Грани многогранника P образуют частично упорядоченное множество (*ч.у.м.*) по отношению к включению. Два многогранника называются комбинаторно эквивалентными, если их ч.у.м. граней изоморфны. Соответствующие классы эквивалентности называются комбинаторными многогранниками.

Многогранник P можно задать матричным неравенством

$$P = \{\boldsymbol{x} \colon A_P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_P \geqslant 0\},$$

где $A_P = (a_{ij})$ — $m \times n$-матрица из столбцов $\boldsymbol{a}_i$, а $\boldsymbol{b}_P$ — столбец из чисел b_i.

Аффинное вложение

$$i_P \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{x} \mapsto A_P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_P$$

переводит P в $\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geqslant 0\}$.

Теперь определим пространство $\mathcal{Z}_P$ из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m \end{array} \qquad \begin{array}{c} (z_1, \ldots, z_m) \\ \big\downarrow \\ (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2) \end{array}$$

Здесь i_Z — некоторое T^m-эквивариантное вложение.

Предложение 2. *$\mathcal{Z}_P$ является гладким T^m-многообразием с канонически тривиализованным нормальным расслоением вложения $i_Z\colon \mathcal{Z}_P \to \mathbb{C}^m$.*

Идея доказательства.

1. Запишем образ $i_P(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ как множество общих решений $m-n$ линейных уравнений на y_i, $1 \leqslant i \leqslant m$;
2. Заменим каждое y_i на $|z_i|^2$, и получим представление $\mathcal{Z}_P$ в виде пересечения $m-n$ вещественных квадратичных гиперповерхностей;
3. Необходимо проверить, что это пересечение является неособым, т.е. градиенты линейно независимы в каждой точке множества $\mathcal{Z}_P$. $\square$

$\mathcal{Z}_P$ называется момент-угол многообразием, соответствующим P.

Можно доказать. что эквивариантная гладкая структура на $\mathcal{Z}_P$ зависит лишь от комбинаторного типа многогранника P.

Пусть наряду с P задана целочисленная $n \times m$-матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{1,n+1} & \dots & \lambda_{1,m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \lambda_{2,n+1} & \dots & \lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_{n,n+1} & \dots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая условию:

> столбцы с номерами $j_1, \dots, j_n$, соответствующими любой вершине $v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n}$ многогранника P, образуют базис решётки $\mathbb{Z}^n$.

Будем называть (P, Λ) комбинаторной квазиторической парой.

Определим $K = K(\Lambda) := \ker(\Lambda\colon T^m \to T^n) \cong T^{m-n}$.

Предложение 3. $K(\Lambda)$ *действует на* $\mathcal{Z}_P$ *свободно.*

Факторпространство

$$M = M(P, \Lambda) := \mathcal{Z}_P / K(\Lambda)$$

называется квазиторическим многообразием, соответствующим паре (P, Λ). На нём имеется действие фактор-тора $T^m / K(\Lambda) \cong T^n$, удовлетворяющее двум условиям Дэвиса–Янушкевича:

а) T^n-действие локально стандартно;

б) имеется проекция $\pi\colon M \to P$, слоями которой являются орбиты T^n-действия.

Определим комплексные одномерный расслоения

$$\rho_i\colon \mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}_i \to M, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

где $\mathbb{C}_i$ — одномерное комплексное представление T^m, задаваемое проекцией $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}_i$ на i-й сомножитель.

Теорема 4. *Имеется изоморфизм вещественных расслоений*

$$\tau M \oplus \mathbb{R}^{m-n} \xrightarrow{\cong} \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_m.$$

Тем самым M наделяется канонической эквивариантной стабильно комплексной структурой, и определён класс комплексных кобордизмов $[M] \in \Omega_U$.

Теорема 1. *Каждый класс комплексных кобордизмов размерности > 2 содержит квазиторическое многообразие.*

Кольцо комплексных кобордизмов Ω_U мультипликативно порождается классами $[H_{ij}]$ $(0 \leqslant i \leqslant j)$ гиперповерхностей Милнора

$$H_{ij} = \{(z_0 : \ldots : z_i) \times (w_0 : \ldots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : z_0 w_0 + \ldots + z_i w_i = 0\}.$$

Но H_{ij} *не являются* квазиторическими многообразиями при $i > 1$.

Идея доказательства основной теоремы.

1. Заменить H_{ij} на квазиторические (и даже торические) многообразия B_{ij}, классы кобордизмов которых по-прежнему порождают кольцо Ω_U. Тем самым каждое стабильно комплексное многообразие будет кобордантно несвязному объединению произведений многообразий B_{ij}. Каждое произведение является (квази) торическим многообразием, но их несвязное объединение — нет.

2. Заменить несвязные объединения на «связные суммы». Трудность заключается в том, что необходимо одновременно следить за действием и за стабильно комплексной структурой.

[1] Victor M Buchstaber and Taras E Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics.* Volume 24 of *University Lecture Series*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике*. Издательство МЦНМО, Москва, 2004.

[3] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*. Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2, 219–242.