Торическая топология

Панов Тарас Евгеньевич

механико-математический ф-т МГУ

совместно с В. М. Бухштабером и другими членами его топологической группы

План

1. Триангуляции и кольца граней.

2. Момент-угол комплексы.

3. Другие торические пространства.

4. От комбинаторной к торической топологии.

5. Алгебры клеточных коцепей.

6. Когомологии торических пространств.

7. Комбинаторная гомологическая алгебра.

8. Произведения Масси и формальность.

9. Гипотеза о торическом ранге.

1. Симплициальные комплексы и кольца граней.

K – *симплициальный комплекс* на мн-ве вершин $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

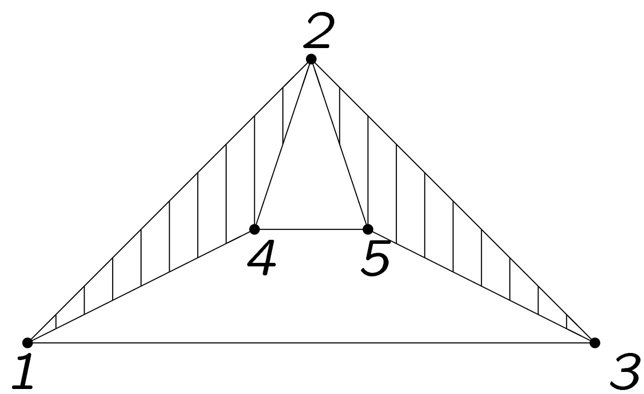
$\sigma \in K$ – *симплекс*.

$R[v_1, \ldots, v_m]$ – кольцо многочленов на V над R, $\deg v_i = 2$. Для данного $\omega \subseteq V$ положим $v_\omega := \prod_{i \in \omega} v_i$. *Кольцо Стенли–Райснера* (или *кольцо граней*) комплекса K определяется как

$$R[K] := R[v_1, \ldots, v_m]/(v_\omega \colon \omega \notin K).$$

Прим. 1

K:



$R[K] = R[v_1, \ldots, v_5]/(v_1v_5, v_3v_4, v_1v_2v_3, v_2v_4v_5)$.

2. Момент-угол комплексы.

$D^2 \subset \mathbb{C}$ – единичный диск.

$B_\omega := \{(z_1, \ldots, z_m) \in (D^2)^m \colon |z_i| = 1$ при $v_i \notin \omega\}$.

Момент-угол комплекс

$$\mathcal{Z}_K := \bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma \subset (D^2)^m.$$

Предл. 2 *На $\mathcal{Z}_K$ действует тор T^m с пространством орбит* $\operatorname{cone} K'$*:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_K & \longrightarrow & (D^2)^m \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \operatorname{cone} K' & \longrightarrow & I^m \end{array},$$

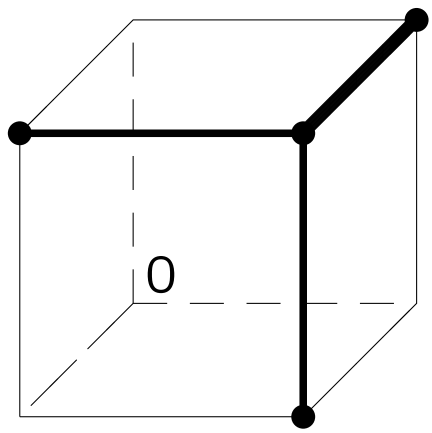
где K' – барицентрическое подразбиение K,

$$\sigma = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \mapsto e_\sigma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m),$$

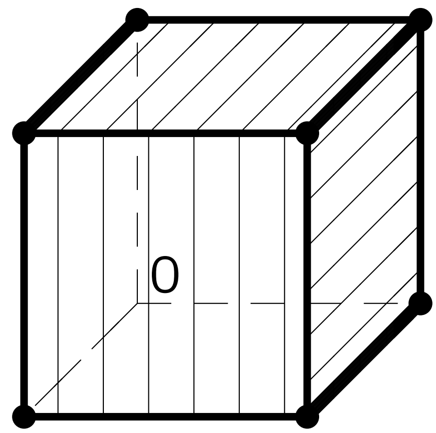
где $\varepsilon_i = 0$ если $v_i \in \sigma$ и $\varepsilon_i = 1$ если $v_i \notin \sigma$.

$$\varnothing \mapsto e_\varnothing = (1, \ldots, 1).$$

Прим. 3 Вложение $\operatorname{cone} K' \hookrightarrow I^m$:



$K = 3$ точки



$K = \partial\Delta^2$

Предл. 4 *а) Пусть $|K| \cong S^{n-1}$ (триангуляция сферы с m вершинами). Тогда $\mathcal{Z}_K$ – многообразие размерности $(m+n)$;*

б) Пусть K – триангулированное многообразие. Тогда $\mathcal{Z}_K \setminus \mathcal{Z}_\varnothing$ – открытое многообразие, где $\mathcal{Z}_\varnothing = T^m$.

Прим. 5 $\mathcal{Z}_{\partial\Delta^n} \cong S^{2n+1}$. При $n = 1$,

$$S^3 = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2 \subset D^2 \times D^2.$$

3. Другие торические пространства.

а) Исходная конструкция Дэвиса–Янушкиевича.

$$\mathcal{Z}_K \cong T^m \times |\operatorname{cone} K| \big/ \!\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ определяется при помощи *двойственного клеточного разбиения* пространства $|K|$:

Грани $|K|$ имеют вид

$$F_i := \operatorname{star}_{K'} v_i.$$

Для $x \in |\operatorname{cone} K|$ положим

$$T(x) := \{(t_1, \dots, t_m) \in T^m \colon t_i = 1 \text{ если } x \notin F_i\}.$$

Тогда положим $(t, x) \sim (s, x)$ если $t^{-1}s \in T(x)$.

Важный частный случай: $\operatorname{cone} K = P^n$, *простой выпуклый многогранник*.

б) $\mathcal{Z}_K$ как гомотопический слой.

Пространство Дэвиса–Янушкиевича определяется при помощи конструкции Бореля:

$$\mathit{DJ}(K) := ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K = ET^m \times \mathcal{Z}_K / \sim,$$

где $(e, z) \sim (et^{-1}, tz)$.

Предл. 6 *Имеется каноническая гомотопическая эквивалентность*

$$\mathit{DJ}(K) \xrightarrow{\simeq} \bigcup_{\sigma \in K} BT^\sigma \subseteq BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m.$$

Таким образом, $\mathit{DJ}(K)$ можно рассматривать как канонический клеточный подкомплекс в произведении $(\mathbb{C}P^\infty)^m$.

Сл. 7 *а)* $\mathcal{Z}_K \simeq \mathrm{hofibre}\Big(\bigcup_{\sigma \in K} BT^\sigma \hookrightarrow BT^m\Big)$;

б) $H^*(\mathit{DJ}(K); R) \cong H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_K; R) \cong R[K]$.

в) Дополнения конфигураций подпространств.

Координатное подпространство в $\mathbb{C}^m$ есть

$$L_\omega = \{(z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{C}^m \colon z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\},$$

где $\omega = \{i_1,\dots,i_k\}$. *Конфигурации координатных подпространств* параметризуются симплициальными комплексами K на m вершинах.

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\sigma \notin K} L_\sigma$$

есть *дополнение конфигурации*.

Предл. 8 *Имеется T^m-эквивариантная деформационная ретракция*

$$U(K) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_K.$$

Док-во: Запишем

$$U(K) = \bigcup_{\sigma \in K} U_\sigma, \quad \mathcal{Z}_K = \bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma,$$

где

$$U_\sigma := \{(z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{C}^m \colon z_i \neq 0 \text{ for } i \notin \sigma\}.$$

Тогда имеем гомотопические эквивалентности

$$\mathbb{C}^\sigma \times (\mathbb{C} \setminus 0)^{V \setminus \sigma} \cong U_\sigma \xrightarrow{\simeq} B_\sigma \cong (D^2)^\sigma \times (S^1)^{V \setminus \sigma}.$$

Прим. 9 1. $K = \partial\Delta^{m-1}$. Тогда $U(K) = \mathbb{C}^m \setminus 0$.

2. Пусть $K = \{v_1, \ldots, v_m\}$ (m точек). Тогда

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \{z_i = z_j = 0\},$$

дополнение множества всех координатных плоскостей коразмерности 2.

3. В общем случае, если K – i-мерный остов симплекса Δ^{m-1}, то $U(K)$ – дополнение множества всех координатных плоскостей коразмерности $(i+2)$.

г) (Квази)торические многообразия.

Пусть $s = s(K)$ – максимальная размерность, для которой существует подгруппа

$$T^s \subset T^m,$$

действующая на $\mathcal{Z}_K$ свободно.

Число $s(K)$ является комбинаторным инвариантом комплекса K. Мы имеем

$$1 \leqslant s(K) \leqslant m - n.$$

Пусть K – триангуляция с m вершинами сферы S^{n-1} (напр., граница *симплициального многогранника*), и допустим $s(K) = m - n$. Тогда фактор-пространство

$$M^{2n} := \mathcal{Z}_K / T^{m-n}$$

называется *квазиторическим многообразием*.

Все компактные неособые торические многообразия являются квазиторическими многообразиями. Фактор-пространства многообразия $\mathcal{Z}_K$ по *полусвободным* действиям тора дают *торические орбиобразия*.

4. От комбинаторной к торической топологии.

Пусть K_1, K_2 – симплициальные комплексы на

$$V = \{v_1, \dots, v_{m_1}\} \text{ and } W = \{w_1, \dots, w_{m_2}\}$$

соответственно. *Симплициальное отображение* $\varphi\colon K_1 \to K_2$ индуцируется отображением вершин $\varphi\colon V \to W$ таким, что

$$\varphi(\sigma) \in K_2 \text{ для всех } \sigma \in K_1.$$

Такое φ индуцирует отображение

$$\psi\colon (D^2)^{m_1} \to (D^2)^{m_2},$$
$$(z_1, \dots, z_{m_1}) \mapsto (y_1, \dots, y_{m_2})$$

где

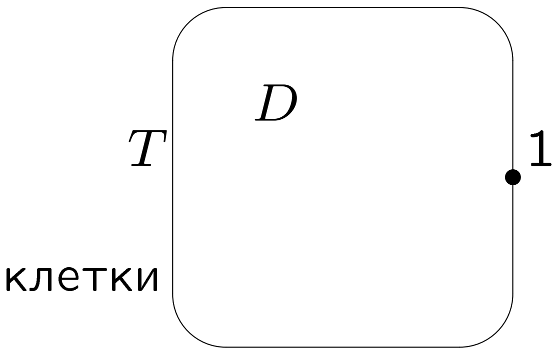
$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{если } \varphi^{-1}(w_j) = \varnothing, \\ \prod_{v_i \in \varphi^{-1}(w_j)} z_i & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда получаем отображение

$$\varphi\colon \mathcal{Z}_{K_1} \to \mathcal{Z}_{K_2}.$$

Итак, соответствие $K \mapsto \mathcal{Z}_K$ задаёт функтор из категории симплициальных комплексов и отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений.

Биградуированное клеточное разбиение D^2:



$$\left.\begin{array}{l}[1]\\[2ex] [T]\\[2ex] [D]\end{array}\right\}\ \text{образующие клеточных цепей}$$

Введем *бистепень* (bdg) образующих как

$$\begin{array}{lll}\mathrm{bdg}[1]=(0,0), & \mathrm{bdg}[T]=(-1,2), & \mathrm{bdg}[D]=(0,2);\\ \partial[1]=0, & \partial[T]=0, & \partial[D]=[T].\end{array}$$

Тогда

$$C_*((D^2)^m;\partial)=\bigotimes_{i=1}^{m} C_*(D^2;\partial),$$

и $\mathcal{Z}_K\subset(D^2)^m$ является клеточным подкомплексом!

Итак, определены клеточные цепи $C_*(\mathcal{Z}_K)$.

Функтор $K\mapsto\mathcal{Z}_K$ индуцирует гомоморфизм из стандартного комплекса симплициальных цепей K в биградуированный комплекс клеточных цепей $\mathcal{Z}_K$.

5. Алгебры клеточных коцепей.

Отображение $\widetilde{\Delta}\colon D^2 \to D^2 \times D^2$, задаваемое как

$$\rho e^{i\varphi} \mapsto \begin{cases} \Big(1 + \rho(e^{2i\varphi} - 1), 1\Big) & \text{при } \varphi \in [0, \pi], \\ \Big(1, 1 + \rho(e^{2i\varphi} - 1)\Big) & \text{при } \varphi \in [\pi, 2\pi), \end{cases}$$

является клеточным клеточным отображением, переводящим ∂D^2 в $\partial D^2 \times \partial D^2$, и гомотопным диагонали $\Delta\colon D^2 \to D^2 \times D^2$ в классе таких отображений. Таким образом, получаем каноническую *клеточную диагональную аппроксимацию*

$$\widetilde{\Delta}\colon \mathcal{Z}_K \to \mathcal{Z}_K \times \mathcal{Z}_K.$$

Теор. 10 *Биградуированная алгебра клеточных коцепей $C^*(\mathcal{Z}_K; R)$ имеет вид*

$$C^*(\mathcal{Z}_K; R) = \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes R[K] \Big/ (u_i v_i = v_i^2 = 0),$$

где $u_i = [T_i]^*$, $v_i = [D_i]^*$ – двойственные образующие клеточных коцепей бистепени $(-1, 2)$ и $(0, 2)$ соответственно.

6. Когомологии торических пространств.

Теор. 11 *Имеет место изоморфим биградуированных алгебр*

$$H^*(\mathcal{Z}_K;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}) \cong H\Big[\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[K];d\Big],$$

где $du_i = v_i$, $dv_i = 0$. В частности,

$$H^p(\mathcal{Z}_K) \cong \sum_{-i+2j=p} \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}).$$

Два способа доказательства:

а) Рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_K & \longrightarrow & ET^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ DJ(K) & \longrightarrow & BT^m \end{array}.$$

Это даёт Tor-часть ответа.

б) Используем предыдущие вычисления с клеточными коцепями (можно показать, что $(u_iv_i, v_i^2; i=1,\ldots,m)$ – ацикличный идеал).

а) и б) связаны при помощи комплекса Кошуля!

Прим. 12 1. $K = \partial\Delta^{m-1}$. Тогда

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(v_1 \cdots v_m).$$

Фундаментальный класс $\mathcal{Z}_K = S^{2m-1}$ представлен коциклом бистепени $(-1, 2m)$:

$$u_1 v_2 v_3 \cdots v_m \in \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K].$$

2. Пусть K – граница 5-угольника. Тогда

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_5]/(v_1v_3, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_1, v_5v_2).$$

$H^3(\mathcal{Z}_K) = H^{-1,4}(\mathcal{Z}_K)$ имеет 5 образующих

$$u_i v_{i+2} \in \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K], \quad i = 1, \dots, 5.$$

$H^4(\mathcal{Z}_K) = H^{-2,6}(\mathcal{Z}_K)$ имеет 5 образующих

$$u_i u_{i+1} v_{i+3}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

$H^7(\mathcal{Z}_K) = H^{-3,10}(\mathcal{Z}_K)$ порождается элементом $u_1u_2u_3v_4v_5$. Итак, $\mathcal{Z}_K$ есть 7-мерное многообразие с вектором Бетти

$$(1, 0, 0, 5, 5, 0, 0, 1).$$

Аналогично, если K – граница m-угольника, то

$$\dim H^*(\mathcal{Z}_K) = (m-4)2^{m-2} + 4.$$

3. Пусть $K=\{v_1,\ldots,v_m\}$ (m точек). Тогда

$$\mathbb{Z}[K]=\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]/(v_iv_j,\ i\neq j).$$

Коциклы в $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[K]$ имеют вид

$$v_{i_1}u_{i_2}u_{i_3}\cdots u_{i_k},\quad k\geqslant 2 \text{ и } i_p\neq i_q \text{ при } p\neq q.$$

Кограницы:

$$d(u_{i_1}\cdots u_{i_k}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\dim H^0\bigl(U(K)\bigr)=1,\\
&\dim H^1\bigl(U(K)\bigr)=H^2\bigl(U(K)\bigr)=0,\\
&\dim H^{k+1}\bigl(U(K)\bigr)=m\tbinom{m-1}{k-1}-\tbinom{m}{k}=(k-1)\tbinom{m}{k},\\
&\hfill 2\leqslant k\leqslant m,
\end{aligned}$$

и умножение в когомологиях тривиально.

7. Комбинаторная гомологическая алгебра.

Пусть $\omega = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \subseteq V$ и K_ω – *полный подкомплекс* в K. Тогда имеем каноническую ретракцию

$$\mathcal{Z}_{K_\omega} \xhookrightarrow{i} \mathcal{Z}_K \xrightarrow{p} \mathcal{Z}_{K_\omega},$$

где вложение i индуцировано вложением $K_\omega \subseteq K$, а p – проекция, индуцированная отображением $\operatorname{cone} K \to \operatorname{cone} K_\omega$, переводящим лишние вершины в вершину конуса.

Более того, для данного подкомплекса $L \subseteq K$ подкомплекс $\mathcal{Z}_L$ является ретрактом $\mathcal{Z}_K$ тогда и только тогда, когда L – полный подкомплекс.

$C^{*,*}(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus\limits_{\omega \subseteq V} C^{*,2\omega}(\mathcal{Z}_K)$ (мультиградуировка),

где $C^{*,2\omega}(\mathcal{Z}_K)$ порождается мономами $u_{\omega\setminus\sigma}v_\sigma$, $\sigma \subseteq \omega$, $\sigma \in K$. Тогда

$$H^{-i,2j}(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus_{\omega\subseteq V\colon |\omega|=j} H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_K),$$

где $H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_K) = H[C^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_K)]$.

Определим *джойн* комплексов K_1 на V и K_2 на W как следующий комплекс на $V \sqcup W$:

$K_1 * K_2 = \{\omega \subseteq V \sqcup W : \omega = \sigma_1 \cup \sigma_2,\ \sigma_1 \in K_1,\ \sigma_2 \in K_2\}$.

Введем умножение на

$$\bigoplus_{\substack{p \geqslant -1 \\ \omega \subseteq V}} \widetilde{H}^p(K_\omega)$$

(где $\widetilde{H}^{-1}(\varnothing) = \mathbb{Z}$).

Пусть $a \in \widetilde{H}^p(K_{\omega_1})$, $b \in \widetilde{H}^q(K_{\omega_2})$.

Допустим $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$. Тогда имеем

$$i\colon \quad K_{\omega_1 \sqcup \omega_2} = K_{\omega_1} \sqcup K_{\omega_2} \hookrightarrow K_{\omega_1} * K_{\omega_2},$$

$$f\colon \quad \widetilde{C}^p(K_{\omega_1}) \otimes \widetilde{C}^q(K_{\omega_2}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{C}^{p+q+1}(K_{\omega_1} * K_{\omega_2}).$$

Теперь определим

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \omega_1 \cap \omega_2 \neq \varnothing, \\ i^* f(a \otimes b) \in \widetilde{H}^{p+q+1}(K_{\omega_1 \sqcup \omega_2}), & \omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing. \end{cases}$$

Теор. 13 (Баскаков, 2003) *Для всех* p *и* $\omega \subseteq V$ *имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{H}^p(K_\omega) \xrightarrow{\cong} H^{p+1-|\omega|,2\omega}(\mathcal{Z}_K),$$

индуцирующие изоморфизм колец

$$\gamma\colon \bigoplus_{\substack{p\geqslant -1\\ \omega\subseteq V}} \widetilde{H}^p(K_\omega) \xrightarrow{\cong} H^{*,*}(\mathcal{Z}_K).$$

Сл. 14

$$H^{-i,2j}(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus_{\omega\subseteq V\colon |\omega|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_\omega).$$

Сл. 15 (Хохстер, 1975)

$$\mathrm{Tor}^{-i,*}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[K],\mathbf{k}) \cong \bigoplus_{\omega\subseteq V} \widetilde{H}^{|\omega|-i-1}(K_\omega;\mathbf{k}).$$

(аддитивно и с коэффициентами в поле).

8. Произведения Масси и формальность.

Для $\sigma \in K$ *звездное подразбиение* K в σ есть

$$\widehat{K} = \zeta_\sigma(K) = \Big(K \setminus \mathrm{star}_K\,\sigma\Big) \cup \Big(\mathrm{cone}\,\partial\,\mathrm{star}_K\,\sigma\Big).$$

Пусть K_i – триангуляция сферы S^{n_i-1} с $|V_i| = m_i$ вершинами, $i = 1, 2, 3$.

Положим $m = m_1 + m_2 + m_3$, $n = n_1 + n_2 + n_3$,

$$\begin{aligned} K^{n-1} &= K_1^{n_1-1} * K_2^{n_2-1} * K_3^{n_3-1}, \\ \mathcal{Z}_K &= \mathcal{Z}_{K_1} \times \mathcal{Z}_{K_2} \times \mathcal{Z}_{K_3}. \end{aligned}$$

Выберем максимальные симплексы

$$\sigma_1 \in K_1, \quad \sigma_2', \sigma_2'' \in K_2,\ \sigma_2' \cap \sigma_2'' = \varnothing, \quad \sigma_3 \in K_3.$$

Положим $\widehat{\widehat{K}} = \zeta_{\sigma_1 \cup \sigma_2'}\Big(\zeta_{\sigma_2'' \cup \sigma_3}(K)\Big)$. Тогда $\widehat{\widehat{K}}$ – триангуляция сферы S^{n-1} с $m+2$ вершинами.

Рассмотрим образующие

$$a_i \in \widetilde{H}^{n_i-1}(\widehat{\widehat{K}}_{V_i}),$$

и положим

$$b_i = \gamma(a_i) \in H^{n_i-m_i,2m_i}(\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}}) \subset H^{m_i+n_i}(\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_1a_2 &\in \widetilde{H}^{n_1+n_2-1}\Big(\widehat{\widehat{K}}_{V_1\sqcup V_2}\Big) \\ &\qquad\cong \widetilde{H}^{n_1+n_2-1}(S^{n_1+n_2-1}\setminus \mathrm{pt}) = 0, \\ b_1b_2 &= \gamma(a_1a_2) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, $b_2b_3 = 0$. Следовательно, определено произведение Масси $\langle b_1, b_2, b_3\rangle \in H^{m+n-1}(\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}})$.

Теор. 16 *В когомологиях $(m + n + 2)$-мерного многообразия $\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}}$ имеются нетривиальные произведения Масси (напр., $\langle b_1, b_2, b_3\rangle$).*

Сл. 17 *Получаем семейство неформальных 2-связных многообразий.*

Двойственный класс гомологий $D\langle b_1, b_2, b_3\rangle \in H_3(\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}})$ предсталён вложением $S^3 \subset \mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}}$ соответствующим двум вершинам, добавленным к $K = K_1 * K_2 * K_3$ при звёздных подразбиениях.

9. Гипотеза о торическом ранге.

Действие T^k на X называется *полусвободным*, если все стационарные подгруппы конечны. *Торический ранг* пространства X (обозначается $\mathrm{trk}(X)$) есть наибольшее k, для которого существует полусвободное действие тора T^k на X.

Предл. 18 *Если K – $(n-1)$-мерный комплекс на m вершинах, то* $\mathrm{trk}\,\mathcal{Z}_K \geqslant m-n$.

В 1985 С. Гальперин сформулировал гипотезу:

$$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geqslant 2^{\mathrm{trk}(X)}$$

для любого конечномерного X.

Сл. 19 *Если гипотеза о торическом ранге верно, то получаем следующее неравенство:*

$$\dim \bigoplus_{\omega\subseteq[m]} \widetilde{H}^*(K_\omega;\mathbb{Q}) \geqslant 2^{m-n}.$$

Прим. 20 *K– граница m-угольника. Тогда*

$$\dim H^*(\mathcal{Z}_K) = (m-4)2^{m-2} + 4 \geqslant 2^{m-2}.$$

Литература

[1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture Series **24**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, Москва, изд-во МЦНМО, 2004.

[3] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Клеточные коцепи и действия тора*, УМН **59** (2004), no. 3, 159–160.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Комбинаторика симплициально клеточных разбиений и действия торов*, Труды МИ РАН им. В. Стеклова, 2004.