Торусна топологија

Тарас Панов

Московски Државни Универзитет

заједнички рад са Виктором Бухштабером и осталим члановима наше групе из алгебарске топологије на Московском Државном Универзитету

План

1. Тријангулације и прстенови грана.

2. Комплекси момента-угла.

3. Други важни торусни простори.

4. Од комбинаторне до торусне топологије.

5. Алгебре ћелијских колананаца.

6. Кохомологије торусних простора.

7. Комбинаторна хомолошка алгебра.

8. Массијеви производи и формалност.

9. Хипотеза о торусном рангу.

1. Симплицијални комплекси и прстенови грана.

K – *симплицијални комплекс* над $V = \{v_1, \dots, v_m\}$.

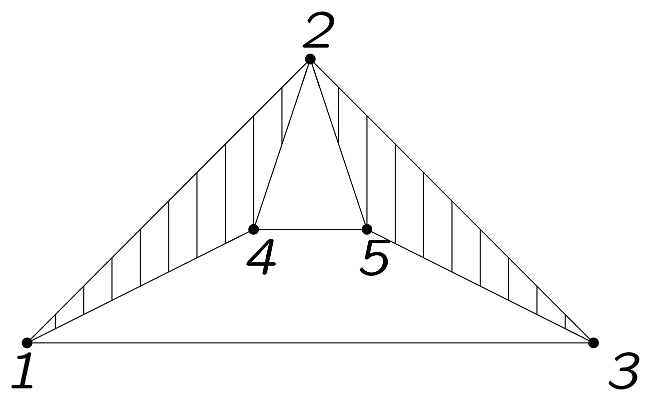
$\sigma \in K$ – *симплекс*.

$R[v_1, \dots, v_m]$ – алгебра полинома на V са коефицијентима у R, $\deg v_i = 2$. За сваки подскуп $\omega \subseteq V$ нека је $v_\omega := \prod_{i\in\omega} v_i$. *Стенли–Рајснерова алгебра* (или *прст грана*) за K је

$$R[K] := R[v_1, \dots, v_m]/(v_\omega \colon \omega \notin K).$$

Прим. 1

K:



$R[K] = R[v_1, \dots, v_5]/(v_1v_5, v_3v_4, v_1v_2v_3, v_2v_4v_5).$

2. Комплекси момента-угла.

$D^2 \subset \mathbb{C}$ – јединични диск.

$$B_\omega := \{(z_1, \dots, z_m) \in (D^2)^m \colon |z_i| = 1 \text{ за } v_i \notin \omega\}.$$

Комплекс момента-угла

$$\mathcal{Z}_K := \bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma \subset (D^2)^m.$$

Твр. 2 *$\mathcal{Z}_K$ је простор са дејством тора T^m, чији количник је* $\operatorname{cone} K'$*:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_K & \longrightarrow & (D^2)^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{cone} K' & \longrightarrow & I^m \end{array},$$

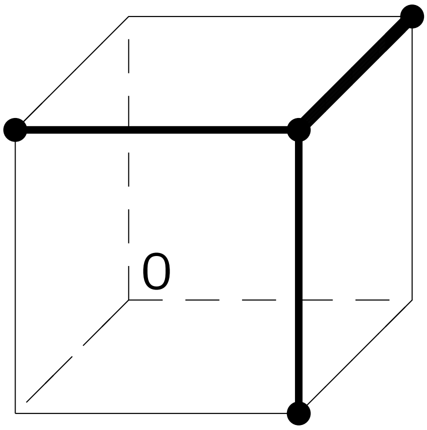
где је K' барицентрична потподела K,

$$\sigma = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \mapsto e_\sigma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m),$$

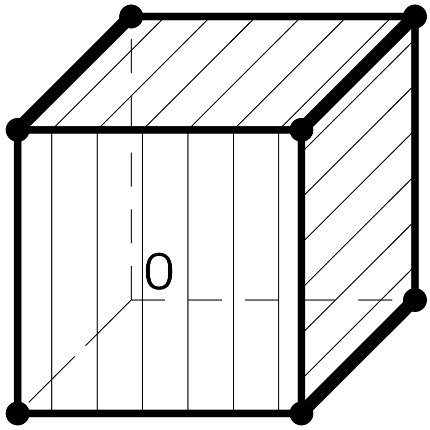
где је $\varepsilon_i = 0$ ако $v_i \in \sigma$ и $\varepsilon_i = 1$ ако $v_i \notin \sigma$.

$$\varnothing \mapsto e_\varnothing = (1, \dots, 1).$$

Прим. 3 Улагање $\operatorname{cone} K' \hookrightarrow I^m$:



$K = 3$ тачке



$K = \partial\Delta^2$

Твр. 4 *а) Нека је $|K| \cong S^{n-1}$ (тријангулација сфере са m темена). Тада је $\mathcal{Z}_K$ многострукост димензије $(m+n)$;*

б) Нека је K тријангулисана многострукост. Тада је $\mathcal{Z}_K \setminus \mathcal{Z}_\varnothing$ отворена многострукост, где је $\mathcal{Z}_\varnothing = T^m$.

Прим. 5 $\mathcal{Z}_{\partial\Delta^n} \cong S^{2n+1}$. За $n = 1$,

$$S^3 = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2 \subset D^2 \times D^2.$$

3. Други важни торусни простори.

а) Изворна конструкција Девиса–Јанушкијевића.

$$\mathcal{Z}_K \cong T^m \times |\operatorname{cone} K| \Big/ \!\sim,$$

где је релација еквиваленције $\sim$ дефинисана помоћу *дуалне ћелијске декомпозиције* од $|K|$:

Хипергране од $|K|$ су облика

$$F_i := \operatorname{star}_{K'} v_i.$$

За дато $x \in |\operatorname{cone} K|$ ставимо

$$T(x) := \{(t_1, \ldots, t_m) \in T^m \colon t_i = 1 \text{ ако } x \notin F_i\}.$$

Тада се релација $\sim$ дефинише са

$$(t, x) \sim (s, x) \text{ ако } t^{-1}s \in T(x).$$

Важан специјалан случај:
$\operatorname{cone} K = P^n$ – *прост конвексан политоп.*

б) $\mathcal{Z}_K$ као хомотопски слој.

Простор Девис Јанушкијевић -а добија се Бореловом конструкцијом:

$$\mathit{DJ}(K) := ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_K = ET^m \times \mathcal{Z}_K/\sim,$$

где je $(e, z) \sim (et^{-1}, tz)$.

Твр. 6 *Постоји канонска хомотопска еквиваленост*

$$\mathit{DJ}(K) \xrightarrow{\simeq} \bigcup_{\sigma \in K} BT^\sigma \subseteq BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m.$$

тако се $\mathit{DJ}(K)$ може посматрати као канонски ћелијски подкомплекс у производу $(\mathbb{C}P^\infty)^m$.

Послед. 7 *а)* $\mathcal{Z}_K \simeq \mathrm{hofibre}\Big(\bigcup_{\sigma \in K} BT^\sigma \hookrightarrow BT^m\Big)$*;*

б) $H^*(\mathit{DJ}(K); R) \cong H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_K; R) \cong R[K]$.

в) Комплементи аранжмана потпростора.

Координатни потпростор у $\mathbb{C}^m$ дат је са

$$L_\omega = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0\},$$

где је $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$. *Аранжмани координатних потпростора* параметризују се симплицијалним комплексима K са m темена. Тада је

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\sigma \notin K} L_\sigma$$

комплемент аранжмана.

Твр. 8 *Постоји T^m-еквиваријантна деформациона ретракција*

$$U(K) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_K.$$

Доказ. Имамо

$$U(K) = \bigcup_{\sigma \in K} U_\sigma, \quad \mathcal{Z}_K = \bigcup_{\sigma \in K} B_\sigma,$$

где

$$U_\sigma := \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon z_i \neq 0 \text{ for } i \notin \sigma\}.$$

Тада постоје хомотопске еквиваленције

$$\mathbb{C}^\sigma \times (\mathbb{C} \setminus 0)^{V \setminus \sigma} \cong U_\sigma \xrightarrow{\simeq} B_\sigma \cong (D^2)^\sigma \times (S^1)^{V \setminus \sigma}.$$

Прим. 9 1. $K = \partial\Delta^{m-1}$. Тада je $U(K) = \mathbb{C}^m \setminus 0$.

2. Нека je $K = \{v_1, \dots, v_m\}$ (m тачака). Тада je
$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \{z_i = z_j = 0\},$$
комплемент скупа свих координатних равни кодимензије 2.

3. Уопштено, ако je K i-скелет од Δ^{m-1}, то je $U(K)$ комплемент скупа свих координатних равни кодимензије $(i+2)$.

г) (Квази)торусне многострукости.

Дефинишимо $s = s(K)$ као максималну димензију торуса

$$T^s \subset T^m,$$

који делује слободно на $\mathcal{Z}_K$.

Овај број $s(K)$ је комбинаторна инварианта за K. Имамо

$$1 \leqslant s(K) \leqslant m - n.$$

Нека је K симплицијална потподела са m темена сфере S^{n-1} (напр., граница *симплицијалног политопа*), и претпоставимо да је $s(K) = m - n$. Тада се количник

$$M^{2n} := \mathcal{Z}_K / T^{m-n}$$

назива *квазиторусна многострукост*.

Сви компактни несингуларни торусни варијетети су квазиторусне многострукости. Количници од $\mathcal{Z}_K$ по *полуслободним* торусним дејствима дају *торусне орбифолде*.

4. Од комбинаторне до торусне топологије.

Нека су K_1, K_2 симплицијални комплекси над

$$V = \{v_1, \ldots, v_{m_1}\} \text{ и } W = \{w_1, \ldots, w_{m_2}\}$$

редом. *Симплицијално пресликавање* $\varphi\colon K_1 \to K_2$ је индуковано пресликавањем скупова темена $\varphi\colon V \to W$ таквим да је

$$\varphi(\sigma) \in K_2 \text{ за све } \sigma \in K_1.$$

Такво φ индукује пресликавање

$$\psi\colon (D^2)^{m_1} \to (D^2)^{m_2},$$
$$(z_1, \ldots, z_{m_1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_{m_2})$$

где је

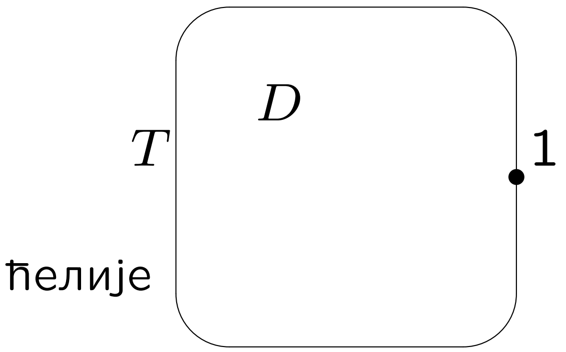
$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{ако } \varphi^{-1}(w_j) = \varnothing, \\ \prod_{v_i \in \varphi^{-1}(w_j)} z_i & \text{иначе.} \end{cases}$$

Оно се рестрикује на пресликавање

$$\varphi\colon \mathcal{Z}_{K_1} \to \mathcal{Z}_{K_2}.$$

На тај начин кореспонденција $K \mapsto \mathcal{Z}_K$ даје функтор из категорије симплицијалних комплекса и пресликавања у категорију простора са торусним дејствима и еквиваријантним пресликавањима.

Биградуисана ћелијска декомпозиција од D^2:



$$\left.\begin{array}{l}[1]\\[2ex] [T]\\[2ex] [D]\end{array}\right\} \text{генератори ћелијских ланаца}$$

Дефинишимо *бистепен* (bdg) генератора са

$$\begin{array}{lll}\mathrm{bdg}[1]=(0,0), & \mathrm{bdg}[T]=(-1,2), & \mathrm{bdg}[D]=(0,2);\\ \partial[1]=0, & \partial[T]=0, & \partial[D]=[T].\end{array}$$

Тада

$$C_*((D^2)^m;\partial)=\bigotimes_{i=1}^{m} C_*(D^2;\partial),$$

и $\mathcal{Z}_K\subset(D^2)^m$ је ћелијски подкомплекс!

На тај начин су дефинисани ћелијски ланци $C_*(\mathcal{Z}_K)$.

Функтор $K\mapsto\mathcal{Z}_K$ индукује хомоморфизам између стандартног симплицијалног комплекса за K и биградуисаног ћелијског ланчастог комплекса за $\mathcal{Z}_K$.

5. Алгебре ћелијске коланаца.

Пресликавање $\widetilde{\Delta}\colon D^2 \to D^2 \times D^2$, дато са

$$\rho e^{i\varphi} \mapsto \begin{cases} \Big(1+\rho(e^{2i\varphi}-1), 1\Big) & \text{за } \varphi \in [0,\pi], \\ \Big(1, 1+\rho(e^{2i\varphi}-1)\Big) & \text{за } \varphi \in [\pi, 2\pi), \end{cases}$$

је ћелијске пресликавање које слика ∂D^2 у $\partial D^2 \times \partial D^2$ и хомотопно дијагонали $\Delta\colon D^2 \to D^2 \times D^2$ у класи таквих пресликавањ. Тако добијамо канонску *ћелијску дијагоналну апроксимацију*

$$\widetilde{\Delta}\colon \mathcal{Z}_K \to \mathcal{Z}_K \times \mathcal{Z}_K.$$

Теор. 10 *Биградуисана ћелијска ланчаста алгебра $C^*(\mathcal{Z}_K; R)$ дата је са*

$$C^*(\mathcal{Z}_K; R) = \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes R[K] \Big/ (u_i v_i = v_i^2 = 0),$$

где су $u_i = [T_i]^*$, $v_i = [D_i]^*$ дуални ћелијским генераторима бистепена $(-1, 2)$ и $(0, 2)$ редом.

6. Кохомологије торусних простора.

Теор. 11 *Постоји изоморфизам биградуисаних алгебри*

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_K;\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}) \\ &\cong H\Big[\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[K];d\Big], \end{aligned}$$

где је $du_i = v_i$, $dv_i = 0$. *Специјално,*

$$H^p(\mathcal{Z}_K) \cong \sum_{-i+2j=p} \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}).$$

Два начина доказа:

а) Применимо спектрални низ Ејленберга–Мура на раслојење

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_K & \longrightarrow & ET^m \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ DJ(K) & \longrightarrow & BT^m \end{array}.$$

То даје Tor-део одговора.

б) Применимо претходна израчунавања са ћелијским коланцима (приметимо да је $(u_iv_i, v_i^2;\ i=1,\ldots,m)$ – ациклични идеал).

а) и б) су повезани преко Кошулевог (Koszul) комплекса!

Прим. 12 1. $K = \partial\Delta^{m-1}$. Тада је

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/(v_1 \cdots v_m).$$

Фундаментална класа за $\mathcal{Z}_K = S^{2m-1}$ је представљена следећим коциклом бистепена $(-1, 2m)$:

$$u_1 v_2 v_3 \cdots v_m \in \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K].$$

2. Нека је K граница пентагона. Тада је

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_5]/(v_1 v_3, v_2 v_4, v_3 v_5, v_4 v_1, v_5 v_2).$$

$H^3(\mathcal{Z}_K) = H^{-1,4}(\mathcal{Z}_K)$ има 5 генератора

$$u_i v_{i+2} \in \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K], \quad i = 1, \ldots, 5.$$

$H^4(\mathcal{Z}_K) = H^{-2,6}(\mathcal{Z}_K)$ има 5 генератора

$$u_i u_{i+1} v_{i+3}, \quad i = 1, \ldots, 5.$$

$H^7(\mathcal{Z}_K) = H^{-3,10}(\mathcal{Z}_K)$ генерисана је са $u_1 u_2 u_3 v_4 v_5$. Значи $\mathcal{Z}_K$ је 7-димензиона многострукост са Бети вектором

$$(1, 0, 0, 5, 5, 0, 0, 1).$$

Слични израчунавања показују да ако је K граница m-тагона, тада је

$$\dim H^*(\mathcal{Z}_K) = (m-4)2^{m-2} + 4.$$

3. Нека је $K = \{v_1, \ldots, v_m\}$ (m тачака). Тада је

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/(v_i v_j,\ i \neq j).$$

Коциклови у $\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]$ су облика

$$v_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \cdots u_{i_k}, \quad k \geqslant 2 \text{ и } i_p \neq i_q \text{ за } p \neq q.$$

Кограницe су:

$$d(u_{i_1} \cdots u_{i_k}).$$

Зато је

$$\begin{aligned}
&\dim H^0\big(U(K)\big) = 1,\\
&\dim H^1\big(U(K)\big) = H^2\big(U(K)\big) = 0,\\
&\dim H^{k+1}\big(U(K)\big) = m\tbinom{m-1}{k-1} - \tbinom{m}{k} = (k-1)\tbinom{m}{k},\\
&\hspace{8cm} 2 \leqslant k \leqslant m,
\end{aligned}$$

и производ у кохомологијама је тривијалан.

7. Комбинаторна хомолошка алгебра.

Нека је $\omega = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \subseteq V$ и K_ω је *комплетни подкомплекс* у K. Тада постоји канонска ретракција

$$\mathcal{Z}_{K_\omega} \xhookrightarrow{i} \mathcal{Z}_K \xrightarrow{p} \mathcal{Z}_{K_\omega},$$

где је i индуковано улагањем $K_\omega \subseteq K$ и p је пројекција индукована контракцијом cone $K \to$ cone K_ω која остала темена слика у врх конуса.

Шта више, ако је дат подкомплекс $L \subseteq K$, подкомплекс $\mathcal{Z}_L$ је ретракт од $\mathcal{Z}_K$ ако и само ако је L комплетан.

$C^{*,*}(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus_{\omega \subseteq V} C^{*,2\omega}(\mathcal{Z}_K)$ (мултиградуисање), где је $C^{*,2\omega}(\mathcal{Z}_K)$ генерисан са $u_{\omega\setminus\sigma}v_\sigma$, $\sigma \subseteq \omega$, $\sigma \in K$. Тада је

$$H^{-i,2j}(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus_{\omega \subseteq V\,:\,|\omega|=j} H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_K),$$

где је $H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_K) = H[C^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_K)]$.

За дате симплицијалне комплексе K_1 над V и K_2 над W дефинишимо њихов *џојн* као следећи комплекс над $V \sqcup W$:

$$K_1 * K_2 = \{\omega \subseteq V \sqcup W : \omega = \sigma_1 \cup \sigma_2,\ \sigma_1 \in K_1,\ \sigma_2 \in K_2\}.$$

Уводимо множење на

$$\bigoplus_{\substack{p \geqslant -1 \\ \omega \subseteq V}} \widetilde{H}^p(K_\omega)$$

(овде је $\widetilde{H}^{-1}(\varnothing) = \mathbb{Z}$).

Узмимо $a \in \widetilde{H}^p(K_{\omega_1})$, $b \in \widetilde{H}^q(K_{\omega_2})$.

Претпоставимо $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$. Тада имамо

$$i\colon \quad K_{\omega_1 \sqcup \omega_2} = K_{\omega_1} \sqcup K_{\omega_2} \hookrightarrow K_{\omega_1} * K_{\omega_2},$$

$$f\colon \quad \widetilde{C}^p(K_{\omega_1}) \otimes \widetilde{C}^q(K_{\omega_2}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{C}^{p+q+1}(K_{\omega_1} * K_{\omega_2}).$$

Сада дефинишимо

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{ако} \quad \omega_1 \cap \omega_2 \neq \varnothing, \\ i^* f(a \otimes b) \in \widetilde{H}^{p+q+1}(K_{\omega_1 \sqcup \omega_2}), & \omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing. \end{cases}$$

Теор. 13 (Баскаков, 2003) *За све* p *и све* $\omega \subseteq V$ *постоје изоморфизми*

$$\widetilde{H}^p(K_\omega) \xrightarrow{\cong} H^{p+1-|\omega|,2\omega}(\mathcal{Z}_K),$$

који индукују изоморфизам прстенова

$$\gamma\colon \bigoplus_{\substack{p\geqslant -1\\ \omega\subseteq V}} \widetilde{H}^p(K_\omega) \xrightarrow{\cong} H^{*,*}(\mathcal{Z}_K).$$

Послед. 14

$$H^{-i,2j}(\mathcal{Z}_K) = \bigoplus_{\omega\subseteq V\colon |\omega|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_\omega).$$

Послед. 15 (Хохстер, 1975)

$$\mathrm{Tor}^{-i,*}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[K],\mathbf{k}) \cong \bigoplus_{\omega\subseteq V} \widetilde{H}^{|\omega|-i-1}(K_\omega;\mathbf{k}).$$

(адитивно и са коефицијентима у пољу).

8. Массијеви производи и формалност.

За дато $\sigma \in K$, *звездаста потподела* за K у σ је

$$\widehat{K} = \zeta_\sigma(K) = \Big(K \setminus \operatorname{star}_K \sigma\Big) \cup \Big(\operatorname{cone} \partial \operatorname{star}_K \sigma\Big).$$

Нека је K_i – тријангулација сфере S^{n_i-1} са $|V_i| = m_i$ темена, $i = 1, 2, 3$.

Ставимо $m = m_1 + m_2 + m_3$, $n = n_1 + n_2 + n_3$,

$$\begin{aligned} K^{n-1} &= K_1^{n_1-1} * K_2^{n_2-1} * K_3^{n_3-1}, \\ \mathcal{Z}_K &= \mathcal{Z}_{K_1} \times \mathcal{Z}_{K_2} \times \mathcal{Z}_{K_3}. \end{aligned}$$

Изаберимо максималне симплексе

$$\sigma_1 \in K_1, \quad \sigma_2', \sigma_2'' \in K_2,\ \sigma_2' \cap \sigma_2'' = \varnothing, \quad \sigma_3 \in K_3.$$

Ставимо $\widehat{\widehat{K}} = \zeta_{\sigma_1 \cup \sigma_2'}\Big(\zeta_{\sigma_2'' \cup \sigma_3}(K)\Big)$. Тада је $\widehat{\widehat{K}}$ тријангулација сфере S^{n-1} са $m+2$ темена.

Размотримо генераторе

$$a_i \in \widetilde{H}^{n_i-1}(\widehat{\widehat{K}}_{V_i}),$$

и поставимо

$$b_i = \gamma(a_i) \in H^{n_i-m_i,2m_i}(\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}}) \subset H^{m_i+n_i}(\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}}).$$

Тада је

$$\begin{aligned} a_1a_2 &\in \widetilde{H}^{n_1+n_2-1}\Big(\widehat{\widehat{K}}_{V_1\sqcup V_2}\Big) \\ &\qquad\cong \widetilde{H}^{n_1+n_2-1}(S^{n_1+n_2-1}\setminus \mathrm{pt}) = 0, \\ b_1b_2 &= \gamma(a_1a_2) = 0. \end{aligned}$$

Слично, $b_2b_3 = 0$. Значи Массијев производ $\langle b_1, b_2, b_3\rangle \in H^{m+n-1}(\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}})$ је дефинисан.

Теор. 16 *Кохомологије $(m+n+2)$-димензионе многострукости $\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}}$ имају нетривијалне Массијеве производе (напр., $\langle b_1, b_2, b_3\rangle$).*

Послед. 17 *Добијамо фамилију неформалних 2-повезаних многострукости.*

Дуална хомолошка класа $D\langle b_1, b_2, b_3\rangle \in H_3(\mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}})$ представљена је улагањем $S^3 \subset \mathcal{Z}_{\widehat{\widehat{K}}}$, које одговара пару темена додатих у $K = K_1 * K_2 * K_3$ при звездастој потподели.

9. Хипотеза о торусном рангу.

T^k-дејство на простору X је *полуслободно* уколико су све изотропне подгрупе коначне.
Торусни ранг за X (који означавамо са $\mathrm{trk}(X)$) је највеће k за које постоји полуслободно T^k-дејствије на X.

Твр. 18 *Ако је K $(n-1)$-димензиони комплекс над m темена, тада је $\mathrm{trk}\,\mathcal{Z}_K \geqslant m-n$.*

С. Халперин је 1985 поставио хипотезу да је

$$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geqslant 2^{\mathrm{trk}(X)}$$

за сваки коначно-димензиони простор X.

Послед. 19 *Претпостављајући да је хипотеза о торусном рангу тачна, долазимо до следеће неједнакости:*

$$\dim \bigoplus_{\omega\subseteq[m]} \widetilde{H}^*(K_\omega;\mathbb{Q}) \geqslant 2^{m-n}.$$

Прим. 20 *Нека је K граница m-тагона. Тада је*

$$\dim H^*(\mathcal{Z}_K) = (m-4)2^{m-2} + 4 \geqslant 2^{m-2}.$$

Библиографија

[1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture Series **24**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, Москва, изд-во МЦНМО, 2004. (Проширена верзија од [1])

[3] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Клеточные коцепи и действия тора*, Успехи математических наук **59** (2004), вып. 3, 159–160.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Комбинаторика симплициально клеточных разбиений и действия торов*, Труды МИ РАН им. В. Стеклова, 2004.