2000 г. май — июнь *т. 55, вып. 3(333)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСЫ И КОМБИНАТОРИКА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов

Пусть $\rho\colon (D^2)^m \to I^m$ – проекция на пространство орбит для диагонального действия тора T^m на единичном полидиске $(D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$. Каждая грань куба $I^m=[0,1]^m$, рассматриваемого как кубический комплекс, имеет вид

$$F_{I\subset J}=\{(y_1,\dots,y_m)\in I^m : y_i=0 \text{ при } i\in I,\ y_j=1 \text{ при } j\notin J\},$$

где $I\subset J$ – два подмножества множества $[m]=\{1,\dots,m\}$. Для каждой грани $F_{I\subset J}$ положим $B_{I\subset J}:=\rho^{-1}(F_{I\subset J})$. Если $\#I=i$, $\#J=j$, то $B_{I\subset J}\cong (D^2)^{j-i}\times T^{m-j}$.

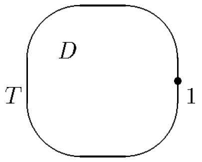
Определение 1. Пусть C – некоторый кубический подкомплекс в I^m. *Момент-угол комплексом* $\mathrm{ma}(C)$ называется разбиение T^m-инвариантного подмножества $\rho^{-1}(C)\subset (D^2)^m$ на блоки $B_{I\subset J}$, соответствующие граням $F_{I\subset J}$ комплекса C.

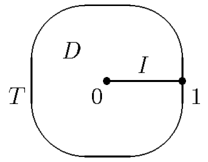
Изучение эквивариантной топологии момент-угол комплексов позволяет решать задачи комбинаторики кубических разбиений. В настоящей работе мы демонстрируем возможности такого подхода в случае кубических разбиений, определяемых симплициальными комплексами. Пусть K^{n-1} – $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс с m вершинами и $|K|$ – соответствующий полиэдр. Если $I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset[m]$ является симплексом K, то мы будем писать $I\in K$. Введем два канонических кубических подкомплекса в I^m:

$$\mathrm{cub}(K)=\{F_{I\subset J} : J\in K,\ I\neq\varnothing\},\qquad \mathrm{cc}(K)=\{F_{I\subset J} : J\in K\}.$$

Лемма 2. *Как топологическое пространство, комплекс* $\mathrm{cub}(K)$ *гомеоморфен* $|K|$, *а* $\mathrm{cc}(K)$ *гомеоморфен конусу* $|\mathrm{cone}(K)|$.

Кубический комплекс $\mathrm{cc}(K)$ был введен в [1] и затем изучался в [2]. Кубический комплекс $\mathrm{cub}(K)$ появился в [3].

а) 

б) 

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00090).

Обозначим момент-угол комплексы, соответствующие $\mathrm{cub}(K)$ и $\mathrm{cc}(K)$ через $\mathscr{W}_K$ и $\mathscr{Z}_K$ соответственно. Фиксируем клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$, при котором каждый D^2 представляется в виде объединения 0-мерной клетки 1, 1-мерной клетки T и 2-мерной клетки D (см. рис. a)). Каждая клетка в $(D^2)^m$ представляется в виде произведения клеток $D_i, T_i, 1_i$, $i = 1, \dots, m$, т.е. имеет вид $D_I T_J 1_{[m]\setminus I\cup J}$, где I, J – попарно непересекающиеся подмножества $[m]$. Положим $D_I T_J := D_I T_J 1_{[m]\setminus I\cup J}$. При этом $\mathscr{Z}_K$ является клеточным подкомплексом в $(D^2)^m$, состоящим из всех клеток $D_I T_J$, для которых $I \in K$.

Лемма 3. *Вложение $T^m = \rho^{-1}(1, \dots, 1) \hookrightarrow \mathscr{Z}_K$ является клеточным отображением, гомотопным отображению в точку.*

Как показано в [2], для произвольного поля $\mathbf{k}$ имеет место изоморфизм алгебр:

$$H^*(\mathscr{Z}_K) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}) \cong H^*[\mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d], \tag{1}$$

где $\mathbf{k}(K)$ – кольцо Стенли–Райснера комплекса K, а дифференциал d определяется как $d(v_i) = 0$, $d(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, m$. Tor-алгебра из (1) естественным образом является *биградуированной*, причем $\mathrm{bideg}(v_i) = (0, 2)$, $\mathrm{bideg}(u_i) = (-1, 2)$. Вычисление кольца $H^*(\mathscr{Z}_K)$ позволило решить задачу описания мультипликативной структуры когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$ [2].

В [1] был введен подкомплекс $\mathscr{C}^*(K) \subset \mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, порожденный мономами u_J и $v_I u_J$, для которых $I \cap J = \varnothing$, $I \in K$, и показано, что когомологии $\mathscr{C}^*(K)$ также совпадают с когомологиями $\mathscr{Z}_K$. Обозначим через $\mathscr{C}_*(\mathscr{Z}_K)$ и $\mathscr{C}^*(\mathscr{Z}_K)$ соответственно цепной и коцепной комплексы клеточного разбиения $\mathscr{Z}_K$ типа a).

Теорема 4. *Пусть $(D_I T_J)^* \in \mathscr{C}^*(\mathscr{Z}_K)$ – клеточная коцепь, двойственная клетке $D_I T_J \in \mathscr{Z}_K$. Соответствие $v_I u_J \mapsto (D_I T_J)^*$ устанавливает канонический изоморфизм комплексов $\mathscr{C}^*(K)$ и $\mathscr{C}^*(\mathscr{Z}_K)$, каждый из которых вычисляет $H^*(\mathscr{Z}_K)$.*

Пара $(\mathscr{Z}_K, T^m)$ приобретает биградуированную клеточную структуру, где $\mathrm{bideg}(D_i) = (0, 2)$, $\mathrm{bideg}(T_i) = (-1, 2)$. Пусть $b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K, T^m) = \dim H_{-q,2p}[\mathscr{C}_*(\mathscr{Z}_K, T^m)]$. Фиксируем новое клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$, при котором каждый диск D^2 разбивается на 5 клеток $D, T, I, 1, 0$ (см. рис. б)). Это позволяет ввести на $\mathscr{W}_K$ биградуированную клеточную структуру и определить числа $b_{q,2p}(\mathscr{W}_K) = \dim H_{q,2p}[\mathscr{C}_*(\mathscr{W}_K)]$. Положим

$$\chi(\mathscr{Z}_K, T^m; t) = \sum_{p,q} (-1)^q b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K, T^m) t^{2p}, \qquad \chi(\mathscr{W}_K; t) = \sum_{p,q} (-1)^q b_{q,2p}(\mathscr{W}_K) t^{2p}.$$

Пусть f_i – число i-симплексов K и $(h_0, \dots, h_n)$ – *h-вектор*, определяемый из соотношения $h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1}$.

Теорема 5. *Положим $h(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_n t^n$. Тогда*

$$\chi(\mathscr{Z}_K; T^m, t) = (1-t^2)^{m-n} h(t^2) - (1-t^2)^m,$$
$$\chi(\mathscr{W}_K; t) = (1-t^2)^{m-n} h(t^2) + (-1)^{n-1} h_n (1-t^2)^m.$$

Лемма 6. *Если $|K| \cong S^{n-1}$, то $\mathscr{Z}_K$ является замкнутым многообразием.*

Пусть теперь K^{n-1} – симплициальное многообразие. Тогда комплекс $\mathscr{Z}_K$, вообще говоря, не является многообразием, но удаляя малую окрестность $U_\varepsilon(T^m)$ тора $T^m = \rho^{-1}(1, \dots, 1)$, мы получаем многообразие $W_K = \mathscr{Z}_K \setminus U_\varepsilon(T^m)$ с краем $\partial W_K = |K| \times T^m$.

Теорема 7. *Многообразие с краем W_K эквивариантно гомотопически эквивалентно комплексу $\mathscr{W}_K$. Имеет место гомеоморфизм пар $(W_K, \partial W_K) \to (\mathscr{Z}_K, T^m)$.*

Из относительной двойственности Пуанкаре для W_K вытекает соотношение $\chi(\mathscr{W}_K; t) = (-1)^{m-n} t^{2m} \chi(\mathscr{Z}_K, T^m; \frac{1}{t})$. Отсюда и из теоремы 5 получаем

Следствие 8. *Пусть K^{n-1} – симплициальное многообразие. Тогда*

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i (h_n - 1)\binom{n}{i} = (-1)^i \bigl(\chi(K^{n-1}) - \chi(S^{n-1})\bigr)\binom{n}{i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{2}$$

Записав соотношения (2) в терминах f-вектора, мы приходим к более сложным соотношениям, полученным в [4], [5]. При $|K| = S^{n-1}$ следствие 8 дает классические соотношения Дена–Соммервилла. Для случая PL-многообразий топологическая инвариантность чисел $h_{n-i} - h_i$, вытекающая из следствия 8, была установлена в [6; (7.11)].

Детальное изложение результатов см. в `http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/0005199`. Авторы выражают благодарность О.Р. Мусину который в ходе полезных обсуждений результатов работы обратил наше внимание на работы [4], [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Труды МИРАН. 1999. Т. 225. С. 96–131. [**2**] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. Т. 266. С. 29–50. [**3**] Штанько М. А., Штогрин М. И. // УМН. 1992. Т. 47. №1. С. 219–220. [**4**] Chen B., Yan M. // Труды МИРАН. 1998. Т. 221. С. 305–319. [**5**] Klee V. // Canadian J. Math. 1964. V. 16. P. 517–531. [**6**] Pachner U. // European J. Combin. 1991. V. 12. P. 129–145.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: buchstab@mech.math.msu.su; tpanov@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
03.04.2000