1999 г. сентябрь — октябрь *т. 54, вып. 5(329)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

КОМБИНАТОРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ χ_y-РОДА ПОЛИОРИЕНТИРОВАННОГО КВАЗИТОРИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Т. Е. Панов

Многообразия, введенные в [1], которые мы далее, следуя [2], [3], будем называть *квазиторическими*, представляют собой гладкие многообразия с действием компактного тора, для которых пространство орбит несет комбинаторную структуру простого многогранника. По своим топологическим и комбинаторным свойствам квазиторические многообразия аналогичны неособым алгебраическим *торическим многообразиям* [4], что и объясняет название. Квазиторические многообразия охватывают широкий класс многообразий (например, каждый класс комплексных кобордизмов содержит квазиторическое многообразие [5]). В [2], [6] квазиторические многообразия изучались в общем контексте "многообразий, определяемых простыми многогранниками".

Выпуклый n-мерный многогранник P^n называется *простым*, если в каждой его вершине сходится n граней коразмерности 1 (или *гиперграней*). Простой многогранник P^n является n-мерным *многообразием с углами*. Пусть M^{2n} – компактное $2n$-мерное многообразие с действием тора $T^n = \{(e^{2\pi i\varphi_1},\dots,e^{2\pi i\varphi_n}) \in \mathbb{C}^n\}$, $\varphi_i \in \mathbb{R}$. M^{2n} называется *квазиторическим многообразием*, если действие T^n локально изоморфно стандартному диагональному действию T^n на $\mathbb{C}^n$, а пространство орбит диффеоморфно (как многообразие с углами) некоторому простому многограннику P^n (подробности см. в [1]).

Пусть M^{2n} – квазиторическое многообразие над P^n и $\mathscr{F} = \{F_1,\dots,F_m\}$ – множество гиперграней P^n, $m = \#\mathscr{F}$. Внутренность гиперграни F_i состоит из орбит с одномерным стабилизатором $G_{F_i} = \{(e^{2\pi i\lambda_{1i}\varphi},\dots,e^{2\pi i\lambda_{ni}\varphi}) \in T^n\}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Таким образом определена *характеристическая функция* $\lambda\colon \mathscr{F} \to \mathbb{Z}^n$, переводящая гипергрань F_i в вектор $\lambda_i = (\lambda_{1i},\dots,\lambda_{ni})^\top \in \mathbb{Z}^n$, определенный с точностью до знака, и $(n\times m)$-матрица Λ со столбцами $\lambda(F_i)$. Каждая вершина p многогранника P^n есть пересечение n гиперграней: $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$. Пусть $\Lambda_{(p)} = \Lambda_{(i_1,\dots,i_n)}$ – минор Λ, образованный столбцами $i_1,\dots,i_n$. Тогда $\det\Lambda_{(p)} = \det(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n}) = \pm1$. Векторы $\lambda_i = \lambda(F_i)$ будем называть *векторами гиперграней*.

При фиксированной ориентации тора T^n ориентация многообразия M^{2n} задается ориентацией P^n. Прообраз $\pi^{-1}(F_i)$ грани F_i при проекции $\pi\colon M^{2n} \to P^n$ на пространство орбит есть подмногообразие $M_i \subset M^{2n}$ коразмерности 2. Выбор знака вектора $\lambda(F_i)$ эквивалентен выбору ориентации (или комплексной структуры) в нормальном расслоении $\nu_i := \nu(M_i \subset M^{2n})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00090).

Ориентация ν_i, в свою очередь, определяется однозначно, если ориентированы M^{2n} и M_i. Ориентированное квазиторическое многообразие M^{2n} с фиксированными ориентациями подмногообразий $M_i = \pi^{-1}(F_i)$ было названо в [3] *полиориентированным*. Ориентированное подмногообразие $M_i \subset M^{2n}$ коразмерности 2 задает комплексное одномерное расслоение σ_i над M^{2n}, которое ограничивается на ν_i над M_i. Следующая теорема, доказанная в [3], позволяет ввести на полиориентированном квазиторическом многообразии стабильно комплексную структуру.

Теорема 1. *Имеет место изоморфизм вещественных ориентированных $2m$-расслоений: $\tau(M^{2n}) \oplus \mathbb{R}^{2(m-n)} \simeq \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m$, где $\tau(M^{2n})$ – касательное расслоение, а $\mathbb{R}^{2(m-n)}$ – тривиальное $2(m-n)$-расслоение над M^{2n}.*

Таким образом, ориентированный простой многогранник P^n и характеристическая матрица Λ не только определяют квазиторическое многообразие, но также выделяют его класс в кольце комплексных кобордизмов Ω_U.

Внутренность каждого ребра E_j (одномерной грани P^n) состоит из орбит с $(n-1)$-мерным стабилизатором $G_{E_j} = \{(e^{2\pi i\varphi_1}, \dots, e^{2\pi i\varphi_n}) \in T^n : \mu_{1j}\varphi_1 + \dots + \mu_{nj}\varphi_n = 0\}$, определяемым примитивным (ко)вектором $\mu_j = (\mu_{1j}, \dots, \mu_{nj})^\top$. Мы назовем μ_j *вектором ребра* E_j; он определен лишь с точностью до знака. Если $E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$ – ребра, сходящиеся в одной вершине p, и $\mathrm{M}_{(p)}$ – матрица со столбцами $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$, то $\det \mathrm{M}_{(p)} = \det(\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}) = \pm 1$.

Следующая лемма позволяет канонически "локально" выбирать знаки векторов ребер полиориентированного квазиторического многообразия.

Лемма 2. *Знаки векторов ребер $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$, сходящихся в вершине p многогранника P^n, можно выбрать так, что $\mathrm{M}_{(p)}^\top \cdot \Lambda_{(p)} = E$ (единичная матрица).*

Ориентация P^n определяет согласованный порядок ребер в каждой вершине, который в свою очередь фиксирует порядок векторов ребер в этой вершине.

Определение 3. Припишем вершине $p \in P^n$ *знак* $\sigma(p)$ по формуле $\sigma(p) = \det \mathrm{M}_{(p)} = \det(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n})$, где $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}$ – векторы ребер, сходящихся в p.

Теорема 4. *Каждый примитивный вектор $\nu \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $\langle \mu_i, \nu \rangle \neq 0$ для всех векторов ребер μ_i, задает S^1-действие на M^{2n} с изолированными неподвижными точками, соответствующими вершинам многогранника P^n. В касательном пространстве T_pM^{2n} в неподвижной точке, соответствующей вершине $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, это действие индуцирует представление S^1 с весами $\langle \mu_{i_1}, \nu \rangle, \dots, \langle \mu_{i_n}, \nu \rangle$.*

Определение 5. Для S^1-действия на M^{2n}, определяемого вектором ν, введем *индекс* вершины $p = F_{i_1}^{n-1} \cap \dots \cap F_{i_n}^{n-1}$ по формуле $\mathrm{ind}_\nu(p) = \{\# k : \langle \mu_{i_k}, \nu \rangle < 0\}$.

Применяя формулу Атьи–Хирцебруха [7] для χ_y-рода к S^1-действию на M^{2n}, задаваемому теоремой 4, можно доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть M^{2n} – полиориентированное квазиторическое многообразие и ν – вектор, описанный в теореме 4. Тогда $\chi_y(M^{2n}) = \sum_{p \in P^n} (-y)^{\mathrm{ind}_\nu(p)} \sigma(p)$, где сумма берется по всем вершинам многогранника P^n.*

Частными случаями χ_y-рода являются n-е число Чженя $c_n[M^{2n}]$ $(y=-1)$, сигнатура $(y=1)$ и род Тодда $(y=0)$. Для n-го числа Чженя теорема 6 дает $c_n[M^{2n}] = \sum_{p \in P^n} \sigma(p)$. В случае комплексного M^{2n} (например, если M^{2n} является торическим многообразием) мы имеем $\sigma(p) = 1$ для всех вершин $p \in P^n$, а $c_n[M^{2n}]$ равно эйлеровой характеристике $e(M^{2n})$. В общем случае эйлерова характеристика также равна числу вершин P^n, однако это число может отличаться от $c_n[M^{2n}]$.

В случае сигнатуры формулу, получаемую из теоремы 6 можно переписать в виде, который не зависит от стабильно комплексной структуры (т.е. от полиориентации) и определяется лишь ориентацией M^{2n}.

В случае рода Тодда формула из теоремы 6 становится неопределенной. Разрешение этой неопределенности приводит к следующему результату.

Теорема 7. *Род Тодда полиориентированного квазиторического многообразия вычисляется как* $\mathrm{td}(M^{2n}) = \sum_{p\in P^n:\mathrm{ind}_\nu(p)=0}\sigma(p)$ *(сумма берется по всем вершинам индекса* 0*).*

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за стимулирующие обсуждения и рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Davis M., Januszkiewicz T. // Duke Math. J. 1991. V. 62. № 2. P. 417–451. [**2**] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Труды МИРАН. 1999. Т. 225. С. 96–131. [**3**] Бухштабер В. М., Рэй Н. Tangential structures on toric manifolds and connected sums of polytopes // Preprint UMIST, Manchester, 1999. [**4**] Данилов В. И. // УМН. 1978. Т. 33. № 2. С. 85–134. [**5**] Бухштабер В. М., Рай Н. // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 139–140. [**6**] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // УМН. 1998. Т. 53. № 3. С. 195–196. [**7**] Hirzebruch F., Berger T., Jung R. Manifolds and Modular Forms. Bonn: Max-Planc-Institut für Mathematik, 1994.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.08.1999