1998 г. май — июнь *т. 53, вып. 3(321)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПРОСТЫМИ МНОГОГРАННИКАМИ

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов

Выпуклый n-мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходится ровно n граней коразмерности один. С каждым таким многогранником канонически связывается гладкое многообразие. Основной целью данной работы является исследование связи комбинаторной структуры простых многогранников с топологией этих многообразий.

Пусть P^n – простой многогранник, f_i – число его граней коразмерности $(i+1)$, $0 \le i \le n-1$ и $\mathscr{F} = (F_1^{n-1}, \dots, F_m^{n-1})$ – множество его граней коразмерности один, $m = f_0$. Фиксируем в качестве основного некоторое коммутативное кольцо k. Введем *кольцо граней* $k(P)$ [1].

Для любого простого многогранника P^n можно следующим образом построить два топологических пространства $\mathscr{Z}_P$ и $B_T P$ (см. [2]). Задав стандартный базис $\{e_1, \dots, e_m\}$ в $\mathbb{Z}^m$, определим канонические подгруппы $T^k_{i_1,\dots i_k} \subset T^m$ как торы, соответствущие подрешеткам в $\mathbb{Z}^m$, натянутым на векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$. Тогда определим $\mathscr{Z}_P = (T^m \times P^n)/\sim$, где $(g_1, p) \sim (g_2, q)$ $\iff p = q$ и $g_1 g_2^{-1} \in T^k_{i_1,\dots,i_k}$. Здесь $i_1, \dots, i_k$ – набор индексов всех $(n-1)$-граней, содержащих точку $p \in P^n$. Заметим, что $\dim \mathscr{Z}_P = m + n$. На $\mathscr{Z}_P$ действует тор T^m с пространством орбит P^n. Используя это действие, положим $B_T P = ET^m \times_{T^m} \mathscr{Z}_P$, где ET^m – стягиваемое пространство универсального T^m-расслоения над $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Ясно, что гомотопический тип пространства $B_T P$ определяется простым многогранником P^n.

Лемма 1. *Любой простой многогранник P^n имеет естественную структуру кубического комплекса $\mathscr{C}$, составленного из $s = f_{n-1}$ кубов I_v^n размерности n, соответствующих вершинам $v \in P^n$. Комплекс $\mathscr{C}$ имеет $1 + f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}$ вершин. Определено естественное вложение i_P комплекса $\mathscr{C}$ в границу m-мерного куба I^m.*

Вложение $\mathscr{C} \hookrightarrow I^m$ обладает следующим свойством:

(1) Если $v = F_{i_1}^{n-1} \cap \dots \cap F_{i_n}^{n-1}$, то куб $I_v^n \subset P^n$ отображается на n-мерную грань куба I^m, выделяемую $m-n$ уравнениями $x_j = 1$, $j \notin \{i_1, \dots, i_n\}$.

Рассмотрим теперь стандартный полидиск $(D^2)^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid |z_i| \le 1\} \subset \mathbb{C}^m$. Стандартное диагональное действие тора T^m на $\mathbb{C}^m$ задает действие T^m на $(D^2)^m$, пространством орбит которого является I^m.

Работа выполнена авторами при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть P^n – простой многогранник. Пространство $\mathscr{Z}_P$ имеет каноническую структуру гладкого многообразия размерности $m+n$, относительно которой действие T^m является гладким. Вложение $i_P\colon P^n \hookrightarrow I^m$, построенное в лемме 1, индуцирует T^m-эквивариантное вложение $i_e\colon \mathscr{Z}_P \hookrightarrow (D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$ с тривиальным нормальным расслоением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho\colon \mathscr{Z}_P \to P^n$ – проекция на пространство орбит. Тогда из конструкции $\mathscr{Z}_P$ следует, что для любого куба $I_v^n \subset \mathscr{Z}_P$ (см. лемму 1) мы имеем $\rho^{-1}(I_v^n) = (D^2)^n \times T^{m-n}$, где $(D^2)^n$ – полидиск в $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием тора T^n. Отсюда вытекает, что $\mathscr{Z}_P$ представляется в виде объединения подмножеств $B_v \cong (D^2)^n \times T^{m-n}$. Тем самым $\mathscr{Z}_P$ приобретает структуру гладкого многообразия с гладким действием T^m. Легко видеть, что вложение в куб I^m грани I^n, заданной $m-n$ уравнениями вида $x_j=1$, индуцирует эквивариантное вложение пространства вида $(D^2)^n \times T^{m-n}$ в $(D^2)^m$. Тогда утверждения второй части теоремы следуют из свойства (1) вложения $i_P\colon P^n \hookrightarrow I^m$.

Введем в $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$ стандартную клеточную структуру, в которой каждое $\mathbb{C}P^\infty$ имеет по одной клетке в каждой четной размерности. Далее все когомологии рассматриваются с коэффициентами в основном кольце k.

ТЕОРЕМА 3. *Пространство B_TP может быть реализовано как клеточный подкомплекс в BT^m, представляющий собой объединение клеточных подкомплексов $BT^k_{i_1,\dots,i_k}$ по всем симплексам $\Delta=(i_1,\dots,i_k)$ симплициального комплекса K_P. При этом вложение $i\colon B_TP \hookrightarrow BT^m$ индуцирует эпиморфизм $H^*(BT^m)=k[v_1,\dots,v_m] \to k(P)=H^*(B_TP)$.*

Простой многогранник P^n с m гранями коразмерности один называется *q-смежностным*, если $(q-1)$-остов двойственного симплициального комплекса K_P^{n-1} совпадает с $(q-1)$-остовом $(m-1)$-мерного симплекса.

ТЕОРЕМА 4. 1) $\pi_1(\mathscr{Z}_P)=\pi_1(B_TP)=0$; 2) $\pi_2(\mathscr{Z}_P)=0, \pi_2(B_TP)=\mathbb{Z}^m$;
3) $\pi_q(\mathscr{Z}_P)=\pi_q(B_TP)$ *при* $q\geq 3$; 4) *если P^n является q-смежностным, то $\pi_i(\mathscr{Z}_P)=0$ при $i<2q+1$ и π_{2q+1} – свободная абелева группа, образующие которой соответствуют мономам $v_{i_1}\cdots v_{i_{q+1}}\in I$.*

С помощью спектральной последовательности Эйленберга–Мура [3] и теоремы 3 выводится

ТЕОРЕМА 5. *Если k – поле, то имеет место изоморфизм алгебр*:

$$H^*(\mathscr{Z}_P) \cong \operatorname{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k).$$

В частности, $H^r(\mathscr{Z}_P)=\sum_{j-i=r}\operatorname{Tor}^{-i,j}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k(P),k)$, $i,j\geq 0$.

Используя комплекс Кошуля в качестве резольвенты (см. [4]) и теорему 5, получаем:

ТЕОРЕМА 6. *Спектральная последовательность Лере–Серра расслоения $\mathscr{Z}_P \times ET^m \to B_TP$ со слоем T^m вырождается в члене E_3. Таким образом, имеет место изоморфизм алгебр $H^*(\mathscr{Z}_P)\cong H[k(P)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m],d]$, $d(a\otimes u_i)=av_i\otimes 1$, $d(a\otimes 1)=0$, $\operatorname{bideg} a=(0,\deg a)$, $\operatorname{bideg} u_i=(-1,2)$, где $a\in k(P)=k[v_1,\dots,v_n]/I$ и $\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ – внешняя алгебра.*

СЛЕДСТВИЕ 7. *В терминах комплекса $k(P)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ имеем:*
1) *представителями фундаментального коцикла многообразия $\mathscr{Z}_P$ являются все элементы вида $v_{i_1}\cdots v_{i_n}\otimes u_{j_1}\cdots u_{j_{m-n}}$, $j_1<\dots<j_{m-n}$, где $(i_1,\dots,i_n)$ – набор индексов граней коразмерности один, сходящихся в некоторой вершине, и $\{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_{m-n}\}=\{1,\dots,m\}$;*
2) *если два элемента $v_{i_1}\cdots v_{i_p}\otimes u_{j_1}\cdots u_{j_r}$ и $v_{k_1}\cdots v_{k_s}\otimes u_{l_1}\cdots u_{l_t}$ являются коциклами, то они представляют классы когомологий, двойственные по Пуанкаре, тогда и только тогда, когда $p+s=n$, $r+t=m-n$, $(i_1,\dots,i_p,k_1,\dots,k_s)$ – набор индексов граней коразмерности один, сходящихся в некоторой вершине, и $\{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_r,k_1,\dots,k_s,l_1,\dots,l_t\}=\{1,\dots,m\}$.*

Из теоремы 6 при помощи теоремы Гильберта о сизигиях можно получить выражение ряда Пуанкаре кольца $k(P^n)$ в терминах $H^*(\mathscr{Z}_P)$. Сопоставляя это выражение с формулой $F(k(P),\lambda) = 1+\sum_{i=0}^{n-1} f_i\delta^{i+1}$, $\delta=\lambda^2/(1-\lambda^2)$, полученной из комбинаторных соображений (см. [1]), и используя следствие 7, можно получить комбинаторные соотношения Дена–Соммервилля [5] для простых многогранников.

В заключение отметим, что изложенный здесь подход к исследованию многообразий $\mathscr{Z}_P$ частично сформировался в ходе выполнения работы [6], и в связи с этим авторы выражают благодарность Найджелу Рэю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Stanley R. Combinatorics and Commutative Algebra. Boston: Birkhäuser, 1983. [**2**] Davis M., Januszkiewicz T. // Duke Math. J. 1991. V. 62. № 2. P. 417–451. [**3**] Smith L. // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 129. P. 58–93. [**4**] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966. [**5**] Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988. [**6**] Бухштабер В. М., Рэй Н. // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 139–140.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
11.05.1998