1997 г. март — апрель *т. 52, вып. 2(314)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ РОД ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ С ДЕЙСТВИЕМ ГРУППЫ $\mathbb{Z}/p$

Т. Е. Панов

В работах Э. Виттена каждому ориентированному $2n$-мерному многообразию был сопоставлен инвариант – индекс оператора Дирака на пространстве петель этого многообразия. С. Ошанин в [1] показал, что этот индекс является родом Хирцебруха, соответствующим эллиптическому синусу, и поэтому он был назван эллиптическим родом. Действия $\mathbb{Z}/p$ на гладких многообразиях изучались с точки зрения теории кобордизмов в работах [2], [3]. В работе [4] был предложен подход для вычисления родов Хирцебруха, соответствующих индексам эллиптических комплексов гладких многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$ на основе формулы Атьи–Ботта–Лефшеца [5] и указаны явные формулы для рода Тодда. В данной работе мы реализуем этот подход для эллиптического рода. Также в [4] была получена другая формула для рода Тодда, вытекающая из теории кобордизмов и показано что разность между двумя формулами есть в точности сумма уравнений Коннера–Флойда. В нашей работе аналогичная связь устанавливается между соответствующими формулами для эллиптического рода (см. теорему 2).

Пусть M^{2n} – квазикомплексное многообразие.

Определение 1 (см. [1]). *Эллиптическим родом* называется род Хирцебруха $\varphi(M^{2n}) = \Bigl(\prod_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{f(x_i)}\Bigr)[M^{2n}]$, где $f(x)=\operatorname{sn} x$ – эллиптический синус Якоби.

Функция $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'^2 = 1-2\delta f^2+\varepsilon f^4$, где δ и ε можно рассматривать как алгебраически независимые переменные. Эллиптический род задает гомоморфизм кольца комплексных кобордизмов Ω_U в кольцо $\mathbb{Z}[\frac12][\delta,\varepsilon]$ или $\mathbb{Z}_p[\delta,\varepsilon]$, $p>2$.

Рассмотрим теперь $\bigl\{L_i^{(q)} = \sum_{p=0}^{n}\Lambda^{p,i}\otimes\bigl(\bigotimes_{k=1}^{\infty}S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\otimes\bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\bigr)\bigr\}$, где $T_{\mathbb{C}}M$ – комплексификация касательного расслоения к M, $\Lambda_tE := \sum_{k=0}^{\infty}(\Lambda^kE)\cdot t^k$, $S_tE := \sum_{k=0}^{\infty}(S^kE)\cdot t^k$. Это ряд от q, коэфициентами которого являются эллиптические комплексы расслоений над M. Его индекс, $\operatorname{ind}(L^{(q)}) = \operatorname{sign}\bigl(M,\bigotimes_{k=1}^{\infty}S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\otimes\bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\bigr)$ ("скрученная" сигнатура, см. [6]), – степенной ряд от q с целыми коэффициентами, т.е. элемент $\mathbb{Z}[[q]]$, равный $L(M)=\operatorname{sign}M$ при $q=0$ (см. [6]). Известно следующее соотношение, вытекающее из формулы Атьи–Зунгера для индекса [7] и разложения $f(x)=\operatorname{sn}x$ в бесконечное произведение (см. [8]):

$$\varphi(M) = \operatorname{sign}\Bigl(M,\bigotimes_{k=1}^{\infty}S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\otimes\bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\Bigr)\cdot\varepsilon^{n/4}. \tag{1}$$

Пусть теперь на многообразии M^{2n} действует оператор g, $g^p = 1$ с конечным числом неподвижных точек $\mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_r$, т.е. задано действие группы $\mathbb{Z}/p$. Пусть якобиан $\mathscr{J}_{\mathscr{P}_j}(g)$ отображения g в точке $\mathscr{P}_j$ имеет собственные числа $\lambda_k^{(j)} = \exp(2\pi i x_k^{(j)}/p)$, $x_k^{(j)} \neq 0 \bmod p$, $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r$. Как следует из результатов [7], см. также [6], эквивариантный индекс $\operatorname{ind}(g, L^{(q)})$ комплекса $L^{(q)}$, равен сумме функций неподвижных точек $\sigma_{L^{(q)}}(\mathscr{P}_j)$, которые получаются стандартным способом из формулы для индекса $L^{(q)}$. Далее, $\frac{1}{p}\sum_{l\in\mathbb{Z}/p}\operatorname{ind}(g^l, L^{(q)}) = s(q)$ – степенной ряд от q, коэффициентом которого при q^k является альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g в когомологиях комплекса, который является коэффициентом при q^k в разложении $L^{(q)}$. Таким образом, $s(q)$ – ряд с целыми коэффициентами. Кроме того, $\operatorname{ind}(1, L^{(q)}) = \operatorname{sign}\bigl(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\bigr)$. Поэтому (далее $\zeta = e^{2\pi i/p}$)

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}\Bigl(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbb{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbb{C}}M\Bigr) &= \operatorname{ind}(1, L^{(q)}) = -\sum_{l=1}^{p-1}\operatorname{ind}(g^l, L^{(q)}) + ps(q)\\ &= -\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\biggl(\frac{1+\zeta^{lx_k^{(j)}}}{1-\zeta^{lx_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(1+q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}})(1+q^i\zeta^{lx_k^{(j)}})}{(1-q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}})(1-q^i\zeta^{lx_k^{(j)}})}\biggr) + ps(q).\end{aligned}$$

Левая часть этого соотношения лежит в $\mathbb{Z}[[q]]$. Погрузим обе части в p-адические пополнения соответствующих полей и рассмотрим теоретико-числовой след $\operatorname{Tr}\colon \mathbb{Q}_p\{q\}(\zeta) \to \mathbb{Q}_p\{q\}$, где $\mathbb{Q}_p\{q\}$ – поле лорановских рядов от q с рациональными p-адическими коэффициентами, а $\mathbb{Q}_p\{q\}(\zeta)$ – его расширение элементом ζ. Тогда из последнего соотношения и (1) получаем

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{r}\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n}\biggl(\frac{1}{2}\frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}})(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}})(1-q^i)^2}{(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}})(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}})(1+q^i)^2}\biggr)\biggr) \bmod p\mathbb{Z}_p[[q]].$$

Лемма 1. *Пусть $P(\delta, \varepsilon)$ – многочлен от δ, ε такой, что $P(\delta, \varepsilon) \equiv 0 \bmod p\mathbb{Z}_p[[q]]$. Тогда $P(\delta, \varepsilon) \equiv 0 \bmod p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$, т.е. все коэффициенты $P(\delta, \varepsilon)$ лежат в $p\mathbb{Z}_p$.*

Из этой леммы, последнего соотношения и разложения $f(x)$ получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Если на M^{2n} действует трансверсальный эндоморфизм g такой, что $g^p = 1$, то имеется следующая формула для эллиптического рода $\varphi(M^{2n})$:*

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{r}\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{f(\tau, -2\pi i x_k^{(j)}/p)}\biggr) = -\sum_{j=1}^{r}\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]_{x_k}}\biggr) \bmod p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon],$$

где в правой части стоит теоретико-числовой след $\operatorname{Tr}\colon \mathbb{Q}_p(\delta, \varepsilon)(\zeta) \to \mathbb{Q}_p(\delta, \varepsilon)$; $\theta = f(-2\pi i/p)$, $[u]_m = f(mf^{-1}(u))$ – степенная система, связанная с эллиптическим родом (см. [4]).

В работе [3] были введены уравнения Коннера–Флойда для наборов весов $x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, x_k^{(j)} \in \mathbb{Z}/p$ действия группы $\mathbb{Z}/p$ на многообразии M^{2n}. Для эллиптического рода $\varphi\colon \Omega_U \to \mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$, они имеют следующий вид: $\sum_{j=1}^{r}\Bigl\langle\frac{pu}{[u]_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}}\Bigr\rangle_m \equiv 0 \bmod p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$, $m = 0, \dots, n-1$, $\langle\ \rangle_k$ обозначает коэффициент при u^k.

Теорема 2. *Имеется следующее соотношение $\bmod p\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$, связывающее формулу из теоремы 1 и уравнения Коннера–Флойда для эллиптического рода:*

$$-\sum_{j=1}^{r}\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]_{x_k^{(j)}}}\biggr) \equiv \sum_{j=1}^{r}\Bigl\langle\frac{pu}{[u]_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}}\Bigr\rangle_n + \sum_{m=0}^{n-1}H_{n-m}\sum_{j=1}^{r}\Bigl\langle\frac{pu}{[u]_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}}\Bigr\rangle_m$$

где H_i – коэффициенты из кольца $\mathbb{Z}_p[\delta, \varepsilon]$.

Автор выражает благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. В.М. Бухштаберу и акад. С.П. Новикову за постановку задачи и В.М. Бухштаберу за полезные рекомендации и стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Ochanine S. // Topology. 1987. V. 26. P. 143–151. [**2**] Новиков С.П. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 855–951. [**3**] Новиков С.П. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. С. 1245–1263. [**4**] Бухштабер В.М., Новиков С.П. // Матем. сб. 1971. Т. 84. С. 81–118. [**5**] Атья М., Ботт Р. // Математика. 1966. Т. 10. №4. С. 101–139. [**6**] Hirzebruch F., Berger T., Jung R. Manifolds and Modular Forms // A Publication of the Max-Planc-Institut für Mathematik, Bonn. Second Edition, 1994. [**7**] Атья М., Зингер И. // УМН. 1969. Т. 24. №1. С. 127–182.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
05.02.1997