1996 г. январь — февраль *т. 51, вып. 1(307)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О СТРУКТУРЕ 2-АЛГЕБРЫ ХОПФА В КОГОМОЛОГИЯХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т. Е. Панов

N-алгебры Хопфа были введены В. М. Бухштабером и Е. Рисом в [2]. Важные примеры таких алгебр дают кольца когомологий n-значных групп (см. [1], [2]). В данной работе описаны все четырехмерные односвязные многообразия, алгебра когомологий которых допускает структуру 2-алгебры Хопфа.

Пусть задано векторное пространство V над полем k с базисом $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\dim V = n$, и на нем задана невырожденная симметрическая форма $C = (c_{ij})$, $(\lambda_i, \lambda_j) = c_{ij}$. При помощи V и C мы можем построить $A = A_0 \oplus A_2 \oplus A_4$ – градуированную коммутативную ассоциативную алгебру с единицей на полем k. А именно, пусть $A_0 = k$, $A_2 = V = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$, $A_4 = k$ и $f \in A_4$ – образующая, а умножение определяется так: $\lambda_i \lambda_j = c_{ij} f$, $\lambda_i f = 0$.

Определение 1. Структура 2-алгебры Хопфа на градуированной алгебре называется *однородной*, если Δ сохраняет градуировку.

Следующий результат из [2] мы используем в качестве определения 2-алгебры Хопфа: алгебра A, снабженная однородным коумножением $\Delta \colon A \to A \otimes A$, является 2-алгеброй Хопфа тогда и только тогда, когда для любых $a_1, a_2, a_3 \in A$ выполнено

$$\Delta(a_1 a_2 a_3) = \Delta a_1 \Delta(a_2 a_3) + \Delta a_2 \Delta(a_3 a_1) + \Delta a_3 \Delta(a_1 a_2) - 2\Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(a_3). \tag{1}$$

Более того, соотношение (1) линейно, т.е. его достаточно проверять на мономах или на аддитивных образующих.

Однородное коумножение Δ в алгебре A должно иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_i) &= \lambda_i \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_i, \\ \Delta(f) &= f \otimes 1 + 1 \otimes f + d^{kl} \lambda_k \otimes \lambda_l. \end{aligned} \tag{2}$$

Мы найдем условия на матрицу $D = (d^{ij})$, являющиеся необходимыми и достаточными для того, чтобы алгебра A с коумножением, заданным формулами (2), являлась 2-алгеброй Хопфа.

Теорема 1. *Тождество* (1) *выполнено для любых* $a_i \in A_2$, *т.е. для* $a_i = \lambda_j$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, n$, *тогда и только тогда, когда* $D = C^{-1}$, *т.е.* $d^{ij} c_{jk} = \delta^i_k$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № M3Z000).

Доказательство теоремы 1. 1) Пусть $D = C^{-1}$. Тогда имеем: если $a_1 = \lambda_i$, $a_2 = \lambda_j$, $a_3 = \lambda_k$, то

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\lambda_i\lambda_j\lambda_k) = 0,\\
&\Delta\lambda_i\Delta(\lambda_j\lambda_k) = 2c_{jk}(f\otimes\lambda_i + \lambda_i\otimes f),\\
&\Delta\lambda_j\Delta(\lambda_k\lambda_i) = 2c_{ki}(f\otimes\lambda_j + \lambda_j\otimes f),\\
&\Delta\lambda_k\Delta(\lambda_i\lambda_j) = 2c_{ij}(f\otimes\lambda_k + \lambda_k\otimes f),\\
&\Delta\lambda_i\Delta\lambda_j\Delta\lambda_k = c_{jk}(f\otimes\lambda_i + \lambda_i\otimes f) + c_{ki}(f\otimes\lambda_j + \lambda_j\otimes f) + c_{ij}(f\otimes\lambda_k + \lambda_k\otimes f).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Отсюда

$$
\Delta\lambda_i\Delta(\lambda_j\lambda_k) + \Delta\lambda_j\Delta(\lambda_k\lambda_i) + \Delta\lambda_k\Delta(\lambda_i\lambda_j) - 2\Delta\lambda_i\Delta\lambda_j\Delta\lambda_k = \Delta(\lambda_i\lambda_j\lambda_k),
\tag{4}
$$

и (1) выполнено для $a_i \in A_2$.

2) Пусть теперь выполнено (4). Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\lambda_i\Delta(\lambda_j\lambda_k) = c_{jk}(\delta_i^n + d^{mn}c_{mi})(f\otimes\lambda_n + \lambda_n\otimes f),\\
&\Delta\lambda_j\Delta(\lambda_k\lambda_i) = c_{ki}(\delta_j^n + d^{mn}c_{mj})(f\otimes\lambda_n + \lambda_n\otimes f),\\
&\Delta\lambda_k\Delta(\lambda_i\lambda_j) = c_{ij}(\delta_k^n + d^{mn}c_{mk})(f\otimes\lambda_n + \lambda_n\otimes f),\\
&\Delta\lambda_i\Delta\lambda_j\Delta\lambda_k = (c_{jk}\delta_i^n + c_{ki}\delta_j^n + c_{ij}\delta_k^n)(f\otimes\lambda_n + \lambda_n\otimes f).
\end{aligned}
$$

Тогда из (4) имеем:

$$
c_{jk}(d^{mn}c_{im} - \delta_i^n) + c_{ki}(d^{mn}c_{jm} - \delta_j^n) + c_{ij}(d^{mn}c_{km} - \delta_k^n) = 0.
\tag{5}
$$

Отсюда следует, что $d^{mn}c_{im} = \delta_i^n$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь тождество (1) в случае, когда некоторые из a_i совпадают с $f \in A_4$. Если хотя бы два из a_i равны f, то обе части тождества (1) обращаются в нуль по соображениям размерности (так как $\lambda_i^3 = f^2 = \lambda_i f = 0\ \forall\, i$). Поэтому осталось рассмотреть случай $a_1 = \lambda_i$, $a_2 = \lambda_j$, $a_3 = f$. Тогда (1) сводится к

$$
\Delta(\lambda_i\lambda_j)\Delta f - 2\Delta\lambda_i\Delta\lambda_j\Delta f = 0.
\tag{6}
$$

Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\lambda_i\lambda_j)\Delta f - 2\Delta\lambda_i\Delta\lambda_j\Delta f\\
&\qquad = -2c_{ij} f\otimes f + c_{ij}d^{mn}c_{mn} f\otimes f - 4\delta_i^n c_{jn} f\otimes f = c_{ij}(\dim A_2 - 6) f\otimes f.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем $\dim A_2 = 6$.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть имеется градуированная коммутативная ассоциативная алгебра с единицей $A = A_0 \oplus A_2 \oplus A_4$, $A_0 = A_4 = k$, $f \in A_4$, $A_2 = \langle\lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle$ с умножением $\lambda_i\lambda_j = c_{ij} f$, где $C = c_{ij}$ – невырожденная матрица. Тогда коумножение, задаваемое формулами* (2), *является* 2*-кольцевым гомоморфизмом, т.е. задает на A структуру* 2*-алгебры Хопфа тогда и только тогда, когда $D = C^{-1}$ и* $\dim A_2 = 6$.

Алгебры такого вида, как мы определили выше возникают как алгебры когомологий односвязных четырехмерных многообразий. Пусть M – такое многообразие, $k = \mathbb{Z}$, $A = H^*(M,\mathbb{Z})$, $A_0 = H^0(M,\mathbb{Z})$, $A_2 = H^2(M,\mathbb{Z})$, $A_4 = H^4(M,\mathbb{Z})$. Матрица C в определении алгебры A это просто матрица пересечений двумерных циклов на M.

Таким образом, M допускает структуру 2-алгебры Хопфа в когомологиях тогда и только тогда, когда $\dim H^2(M) = 6$ и коумножение задается формулами (2), где $\lambda_i \in H^2(M)$, $f \in H^4(M)$ – образующие, а $D = C^{-1}$ – матрица, обратная к матрице пересечений (заметим, что так как C унимодулярна, то D – целочисленна). Ассоциированная с такой матрицей квадратичная форма приводится к одному из следующих видов (см. [6]): $C = kI \oplus (6-k)(-I)$ или $C = 3U$. Здесь $I = (1)$, U – матрица, соответствующая форме $2xy$. В этих случаях $C^{-1} = C \Longrightarrow D = C$.

Форма $kI \oplus (6-k)(-I)$ реализуется как форма пересечений для многообразия $k\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \# (6-k)(-\mathbb{C}\mathrm{P}^2)$, а $3U$ – как форма пересечений для $(S^2\times S^2)\#(S^2\times S^2)\#(S^2\times S^2)$.

Здесь # означает операцию взятия связной суммы. Имеется следующий результат (см. [5]): односвязные четырехмерные многообразия M_1, M_2 гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда пары $(H^2(M_1), L_{M_1})$, $(H^2(M_2), L_{M_2})$ изоморфны как пространства с внутренним произведением.

Поэтому единственными (с точностью до гомотопической эквивалентности) односвязными четырехмерными многообразиями, допускающими структуру 2-алгебры Хопфа в когомологиях, являются $k\mathbb{C}\mathrm{P}^2\#(6-k)(-\mathbb{C}\mathrm{P}^2)$ и $3(S^2\times S^2)$.

В заключение я хотел бы выразить благодарность моему научному руководителю профессору В.М. Бухштаберу за постановку задачи и активную поддержку в ее решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Buchstaber V. M., Gorbunov V. G. Theory and applications of multivalued groups // Manchester University Preprint, 1991. [**2**] Buchstaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Edinburgh University Preprint, 1995. [**3**] Мандельбаум Р. Четырехмерная топология. М.: Мир, 1981. [**4**] Милнор Дж., Хьюзмоллер Дж. Симметрические билинейные формы. М.: Наука, 1985. [**5**] Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1976. [**6**] Серр Ж. П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.11.1995