О когомологиях факторпространств момент-угол-комплексов

Т. Е. Панов

Мы описываем когомологии факторпространства $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}/H$ момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ по свободно действующему подтору $H\subset T^m$ путем установления изоморфизма между $H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}/H,R)$ и соответствующей Tor-алгеброй кольца граней $R[\mathscr{K}]$ с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце R с единицей. Этот результат был сформулирован в [2; п. 7.37] для поля R, но доказательство было недостаточно полным в случае нетривиальной группы H и конечной характеристики. Мы доказываем вырождение соответствующей спектральной последовательности Эйленберга–Мура, используя естественность функтора Tor по отношению к более широкому классу “сильно гомотопически мультипликативных” отображений в категории DASH [6]. Наш результат о вырождении не вытекает из общих результатов работ [4] и [6].

Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс на множестве $[m]=\{1,\dots,m\}$. Для симплекса $I=\{i_1,\dots,i_k\}\in\mathscr{K}$ положим $(D^2,S^1)^I=\{(x_1,\dots,x_m)\in(D^2)^m\colon x_i\in S^1=\partial D^2$ при $i\notin I\}$. *Момент-угол-комплексом* называется полиэдральное произведение

$$\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}=(D^2,S^1)^{\mathscr{K}}=\bigcup_{I\in\mathscr{K}}(D^2,S^1)^I\subset(D^2)^m.$$

$\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ является многообразием, когда $\mathscr{K}$ – триангулированная сфера, и имеет гладкую структуру, когда $\mathscr{K}$ является границей многогранника или звездчатой сферой (т. е. происходит из полного симплициального веера). Определим также

$$BT^{\mathscr{K}}=(\mathbb{C}P^\infty,\mathrm{pt})^{\mathscr{K}}=\bigcup_{I\in\mathscr{K}}BT^I\subset BT^m=(\mathbb{C}P^\infty)^m.$$

Кольцо когомологий пространства $BT^{\mathscr{K}}$ (с коэффициентами в R) есть *кольцо граней* комплекса $\mathscr{K}$:

$$H^*(BT^{\mathscr{K}})\cong R[\mathscr{K}]=R[v_1,\dots,v_m]/(v_{i_1}\cdots v_{i_k}\colon\{i_1,\dots,i_k\}\notin\mathscr{K}),\qquad \deg v_i=2,$$

и имеется гомотопическое расслоение $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}\to BT^{\mathscr{K}}\to BT^m$. Более подробное изложение этих конструкций можно найти в [3; гл. 4].

Тор T^m действует на $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}$ покоординатно, и мы рассматриваем свободно действующие подторы $H\subset T^m$. Многообразия $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}/H$ недавно привлекли внимание тем, что они допускают комплексно-аналитические структуры (как правило, некэлеровы) с интересной геометрией [1], [5], [7].

Мы превратим $R[\mathscr{K}]$ в модуль над кольцом многочленов $H^*(B(T^m/H))$ при помощи гомоморфизма $H^*(B(T^m/H))\to H^*(BT^m)=R[v_1,\dots,v_m]\to R[\mathscr{K}]$.

Теорема 1. *Для любого коммутативного кольца R с единицей имеет место изоморфизм градуированных алгебр $H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}/H;R)\cong\operatorname{Tor}_{H^*(B(T^m/H);R)}(R[\mathscr{K}],R)$.*

Доказательство. Спектральная последовательность Эйленберга–Мура расслоения $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}/H\to BT^{\mathscr{K}}\to B(T^m/H)$ имеет член $E_2=\operatorname{Tor}_{H^*(B(T^m/H))}(R[\mathscr{K}],R)$ и сходится к $H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}/H)=\operatorname{Tor}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathscr{K}}),R)$. Мы установим изоморфизм алгебр $\operatorname{Tor}_{H^*(B(T^m/H))}(R[\mathscr{K}],R)\to\operatorname{Tor}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathscr{K}}),R)$; это также влечет вырождение спектральной последовательности.

Для тора T^k рассмотрим отображение R-модулей $\varphi\colon H^*(BT^k)=(H^*(BT^1))^{\otimes k}\xrightarrow{i}(C^*(BT^1))^{\otimes k}\xrightarrow{\times}C^*(BT^k)$, где C^* обозначает функтор нормализованных сингулярных коцепей, а отображение $i\colon R[v]=H^*(BT^1)\to C^*(BT^1)$ переводит v в любую представляющую коцепь. Отображение φ индуцирует изоморфизм в когомологиях.

Исследование выполнено в ИППИ Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

DOI: 10.4213/rm9673

Заметим, что $R[\mathscr{K}] = H^*(BT^{\mathscr{K}}) = \lim_{I\in\mathscr{K}} H^*(BT^I)$, где $H^*(BT^I)$ – кольцо многочленов от $|I|$ переменных, а (обратный) предел берется в категории градуированных алгебр для диаграммы, состоящей из проекций $H^*(BT^I) \to H^*(BT^J)$, соответствующих вложениям $J \subset I \in \mathscr{K}$ [3; п. 3.5.1]. Теперь рассмотрим диаграмму

$$
\begin{array}{ccccccc}
R & \longleftarrow & H^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & \lim\limits_{I\in\mathscr{K}} H^*(BT^I) & = R[\mathscr{K}] = H^*(BT^{\mathscr{K}}) \\
\| & & \Downarrow & & \Downarrow & \\
R & \longleftarrow & C^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & \lim\limits_{I\in\mathscr{K}} C^*(BT^I) & \\
\| & & \| & & \uparrow & \\
R & \longleftarrow & C^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & C^*\Bigl(\operatorname*{colim}\limits_{I\in\mathscr{K}} BT^I\Bigr) & = C^*(BT^{\mathscr{K}})
\end{array}
\tag{1}
$$

где двойные стрелки обозначают различные производные отображения φ и вертикальные стрелки индуцируют изоморфизмы в когомологиях. Если бы эта диаграмма была коммутативной в категории DA дифференциальных градуированных алгебр (т. е. состояла из мультипликативных отображений), то из стандартных результатов о естественности Tor вытекал бы требуемый изоморфизм $\operatorname{Tor}_{H^*(B(T^m/H))}(R[\mathscr{K}], R) \cong \operatorname{Tor}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathscr{K}}), R) \cong H^*(\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}/H)$. Нижняя часть в (1) – коммутативная диаграмма в DA. Верхняя часть не является коммутативной, а двойные стрелки не являются морфизмами в DA, так как отображение φ не мультипликативно. Тем не менее функтор Tor естествен по отношению к морфизмам в категории DASH при условии, что диаграмма (1) гомотопически коммутативна в DASH (см. [6; п. 5.4]). Объекты категории DASH те же, что и в DA, а морфизмами $A \Rightarrow A'$ являются отображения коалгебр $BA \to BA'$ для бар-конструкций. Отображение φ и двойные стрелки в (1) являются морфизмами в DASH (см. [6; п. 7.3]). Чтобы убедиться, что верхний правый квадрат в (1) является гомотопически коммутативным, достаточно установить гомотопическую коммутативность диаграммы

$$
\begin{array}{ccccc}
H^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & H^*(BT^I) & \longrightarrow & H^*(BT^J) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
C^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & C^*(BT^I) & \longrightarrow & C^*(BT^J)
\end{array}
$$

для любого $J \subset I \in \mathscr{K}$. Здесь правый квадрат коммутативен по определению отображения φ, а левый квадрат гомотопически коммутативен в силу [6; п. 7.3].

Изоморфизм $\operatorname{Tor}_{H^*(B(T^m/H))}(R[\mathscr{K}], R) \to \operatorname{Tor}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathscr{K}}), R)$ мультипликативен, так как умножение в $\operatorname{Tor}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathscr{K}}), R)$ определяется через умножение коцепей $C^*(X) \otimes C^*(X) \to C^*(X)$, являющееся морфизмом в DASH и естественное по X. Теорема доказана.

Автор благодарен М. Францу за привлечение внимания к неполноте доказательства в [2; п. 7.37] и полезные обсуждения.

Список литературы

[**1**] F. Bosio, L. Meersseman, *Acta Math.*, **197**:1 (2006), 53–127. [**2**] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+144 pp. [**3**] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015. [**4**] V. Gugenheim, J. P. May, *On the theory and applications of differential torsion products*, Mem. Amer. Math. Soc., № 142, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974. [**5**] H. Ishida, *Complex manifolds with maximal torus actions*, 2013, arXiv: 1302.0633. [**6**] H. J. Munkholm, *J. Pure Appl. Algebra*, **5** (1974), 1–50. [**7**] T. Panov, Yu. Ustinovsky, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 149–172.

Т. Е. Панов (T. E. Panov)
МГУ; ИППИ РАН; ИТЭФ
E-mail: `tpanov@mech.math.msu.su`

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
10.06.2015