

УДК 515.16+515.14+514.76

Посвящается моему дорогому Учителю
Виктору Матвеевичу Бухштаберу,
к его 70-летию

Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях

Т. Е. Панов

Момент-угол-комплекс $\mathcal{L}\mathcal{K}$ представляет собой клеточный комплекс с действием тора, сопоставляемый конечному симплицальному комплексу \mathcal{K} . Если \mathcal{K} является триангуляцией сферы или, в частности, границей симплицального многогранника, то соответствующий момент-угол-комплекс $\mathcal{L}\mathcal{K}$ является многообразием. Момент-угол-многообразия и комплексы являются одними из основных объектов изучения в торической топологии и в настоящее время привлекают большое внимание в теории гомотопий, комплексной и симплектической геометрии.

Данный обзор посвящен геометрическим аспектам теории момент-угол-комплексов. Мы рассматриваем конструкции некэлеровых комплексных структур на момент-угол-многообразиях, соответствующих многогранникам и полным симплицальным веерам, и описываем инварианты этих структур, такие как числа Ходжа и кольца когомологий Дольбо. Также большой интерес представляют симплектические и лагранжевы аспекты теории момент-угол-многообразий. Эти многообразия возникают как множества уровней квадратичных гамильтонианов для действий тора и могут быть использованы для построения новых семейств гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий в комплексном пространстве, проективном пространстве и торических многообразиях.

Библиография: 59 названий.

Ключевые слова: момент-угол-многообразие, эрмитовы квадрики, простые многогранники, симплицальные вееры, некэлеровы комплексные многообразия, гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия.

DOI: 10.4213/rm9518

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	115
2. Предварительные сведения: многогранники и двойственность Гейла ...	117
3. Пересечения квадрик.....	124
3.1. От полиэдров к квадрикам.....	124
3.2. От квадрик к полиэдрам.....	125

Работа выполнена при поддержке грантами Президента РФ МД-111.2013.1 и НШ-4995-2012.1, грантами РФФИ 12-01-00873 и 13-01-91151-ГФЕН, грантом фонда “Династия” и грантом 11.G34.31.0053 Правительства РФ.

© Т. Е. Панов, 2013

4. Момент-угол-многообразия, происходящие из многогранников	128
5. Гамильтоновы торические многообразия и отображения моментов	130
5.1. Симплектическая редукция	131
5.2. Торический случай	132
6. Вееры и торические многообразия	137
6.1. Конусы и вееры	137
6.2. Торические многообразия	139
6.3. Факторпространства в алгебраической геометрии	140
6.4. Факторконструкция торических многообразий	142
7. Момент-угол-комплексы и полиэдральные произведения	145
7.1. Кубические разбиения	146
7.2. Момент-угол-комплексы	147
7.3. Полиэдральные произведения	151
7.4. Дополнения конфигураций координатных подпространств	152
8. LVM-многообразия	155
9. Момент-угол-многообразия, происходящие из симплицальных вееров	158
10. Комплексная геометрия момент-угол-многообразий	163
11. Голоморфные главные расслоения над торическими многообразиями и когомологии Дольбо	169
12. Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия	177
12.1. Предварительные сведения	178
12.2. Конструкция	178
12.3. Топология лагранжевых подмногообразий N	181
12.4. Обобщение на торические многообразия	185
Список литературы	186

1. Введение

Момент-угол-комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ представляет собой клеточный комплекс с действием тора, составленный из произведений дисков D^2 и окружностей S^1 , которые параметризованы гранями некоторого симплицального комплекса \mathcal{K} . Заменяя пару (D^2, S^1) на произвольную клеточную пару (X, A) , мы получаем *полиэдральное произведение* $(X, A)^{\mathcal{K}}$. Момент-угол-комплексы и полиэдральные произведения являются одними из основных объектов изучения в новой области исследований на границе топологии, алгебраической и симплектической геометрии и комбинаторики – *торической топологии* [15].

Как геометрическая, так и гомотопическая теория момент-угол-комплексов активно изучается в настоящее время. Гомотопические методы и, в частности, техника стабильных и нестабильных разложений, развитая в [14; гл. 6], [31], [4], [35], позволили продвинуться в понимании топологического строения момент-угол-комплексов и связанных с ними торических пространств.

В данном обзоре рассматриваются геометрические аспекты теории. Конструкция момент-угол-комплексов имеет множество интересных геометрических интерпретаций. Например, момент-угол-комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентен дополнению $U(\mathcal{K})$ конфигурации координатных подпространств в \mathbb{C}^m , определяемой комплексом \mathcal{K} . Пространство $U(\mathcal{K})$ играет важную

роль в геометрии торических многообразий и теории конфигурационных пространств.

В случае, когда комплекс \mathcal{K} является триангуляцией сферы, соответствующий момент-угол-комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ представляет собой топологическое многообразие. Момент-угол-многообразия, соответствующие симплицциальным многогранникам или, в более общем случае, полным симплицциальным веерам, являются гладкими. В случае многогранников гладкая структура возникает из реализации момент-угол-комплекса $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ в виде невырожденного пересечения эрмитовых квадратиков в \mathbb{C}^m , аналогично множеству уровня отображения моментов в конструкции симплектической редукции. Соответствие между многогранниками и системами квадратиков описывается в терминах выпукло-геометрической двойственности Гейла.

Другой способ ввести гладкую структуру на момент-угол-многообразии $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ заключается в реализации его в виде факторпространства дополнения конфигурации координатных подпространств $U(\mathcal{K})$ по действию мультипликативной группы $\mathbb{R}_{>}^{m-n}$. Этот подход аналогичен известной факторконструкции торических многообразий в алгебраической геометрии. Факторпространство некомпактного многообразия $U(\mathcal{K})$ по действию некомпактной группы $\mathbb{R}_{>}^{m-n}$ является хаусдорфовым, если комплекс \mathcal{K} происходит из симплицциального веера.

Если $m - n = 2\ell$, то действие вещественной группы $\mathbb{R}_{>}^{m-n}$ на $U(\mathcal{K})$ можно превратить в голоморфное действие комплексной (но не алгебраической) группы, изоморфной комплексному пространству \mathbb{C}^{ℓ} . Таким образом момент-угол-многообразии $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \cong U(\mathcal{K})/\mathbb{C}^{\ell}$ наделяется комплексно-аналитической структурой. Получаемое семейство некэлеровых комплексных многообразий обобщает известные серии многообразий Хопфа и Калаби–Экмана (см. [10] и [54]).

Наконец, пересечения эрмитовых квадратиков, задающие момент-угол-многообразия, были также использованы в [46] для построения лагранжевых подмногообразий в \mathbb{C}^m со специальными свойствами минимальности.

На протяжении всего обзора мы будем иметь дело с различными пространствами с действием тора, или *торическими пространствами*. Наиболее простым примером такого пространства является комплексное m -мерное пространство \mathbb{C}^m , на котором *стандартный тор*

$$\mathbb{T}^m = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m : |t_i| = 1 \text{ для } i = 1, \dots, m\}$$

действует покоординатно. Это действие задается формулой

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^m \times \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathbb{C}^m, \\ (t_1, \dots, t_m) \cdot (z_1, \dots, z_m) &= (t_1 z_1, \dots, t_m z_m). \end{aligned}$$

Факторпространство $\mathbb{C}^m/\mathbb{T}^m$ отождествляется с *положительным ортантом*

$$\mathbb{R}_{\geq}^m = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_i \geq 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\},$$

а проекцию на пространство орбит мы будем задавать формулой

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m, \\ (z_1, \dots, z_m) &\mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2). \end{aligned}$$

Мы будем использовать двойные заглавные буквы в обозначениях \mathbb{I}^m , \mathbb{T}^m , \mathbb{D}^m стандартного единичного куба в \mathbb{R}^m , стандартного (единичного) тора и единичного полидиска в \mathbb{C}^m соответственно. Символом T^m мы будем обозначать абстрактный m -тор, т.е. компактную абелеву группу Ли, изоморфную произведению m окружностей. Как топологическое пространство, \mathbb{D} является 2-мерным диском, который мы будем обозначать D^2 . Мы будем также иногда обозначать единичную окружность символами \mathbb{S} или \mathbb{T} , в отличие от абстрактной окружности S^1 .

2. Предварительные сведения: многогранники и двойственность Гейла

Пусть \mathbb{R}^n – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Выпуклым *полиэдром* P будем называть пересечение конечного числа полупространств в \mathbb{R}^n . Ограниченные полиэдры называются *многогранниками*. Многогранник можно также определить как выпуклую оболочку $\text{conv}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q)$ конечного набора точек $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \in \mathbb{R}^n$.

Несущей гиперплоскостью полиэдра P называется гиперплоскость H , которая имеет общие точки с P и для которой полиэдр содержится в одном из определяемых ею замкнутых полупространств. *Гранью* полиэдра P называется пересечение его $P \cap H$ с какой-нибудь несущей гиперплоскостью. Обозначим через ∂P и $\text{int } P = P \setminus \partial P$ топологические границу и внутренность полиэдра P соответственно. В случае $\dim P = n$ граница ∂P – это объединение всех граней полиэдра P . Нульмерные грани называются *вершинами*, одномерные грани называются *ребрами*, а грани коразмерности один называются *гипергранями*.

Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если между их гранями можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение включения. Классы комбинаторной эквивалентности называются *комбинаторными многогранниками*. Два многогранника комбинаторно эквивалентны, если между ними имеется гомеоморфизм, сохраняющий структуру граней.

Грани многогранника P образуют частично упорядоченное множество относительно включения. Многогранники комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их частично упорядоченные множества граней изоморфны.

Рассмотрим систему m линейных неравенств, задающих выпуклый полиэдр в \mathbb{R}^n :

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i \geq 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ и $b_i \in \mathbb{R}$. Мы будем называть систему (2.1) *представлением* полиэдра P неравенствами. Эти неравенства содержат несколько больше информации, чем сам полиэдр P , в силу следующих причин. Может оказаться, что некоторые из неравенств $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i \geq 0$ можно удалить из представления, не изменяя полиэдра P ; такие неравенства будем называть *лишними*. Представление без лишних неравенств называется *неизбыточным*. Неизбыточное представление данного полиэдра единственно с точностью до умножения пар (\mathbf{a}_i, b_i) на положительные числа.

Мы будем предполагать (если не оговорено противное), что полиэдр, задаваемый системой (2.1), имеет вершину, что эквивалентно тому, что векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ порождают все пространство \mathbb{R}^n . Это условие автоматически выполнено для многогранников.

Представление (2.1) называется *представлением общего положения*, если полиэдр P непуст и гиперплоскости, задаваемые уравнениями $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i = 0$, находятся в общем положении в каждой точке полиэдра P (т. е. в каждой точке $\mathbf{x} \in P$ нормальные векторы \mathbf{a}_i к гиперплоскостям, содержащим точку \mathbf{x} , линейно независимы). Если (2.1) является представлением общего положения, то полиэдр P имеет размерность n . Если P – многогранник, то из существования представления общего положения вытекает, что P является *простым*, т. е. в каждой его вершине сходится в точности n гиперграней. Представление общего положения может содержать лишние неравенства, но для каждого такого неравенства пересечение соответствующей гиперплоскости с P пусто (т. е. неравенство является строгим для всех точек $\mathbf{x} \in P$). Положим

$$F_i = \{\mathbf{x} \in P: \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i = 0\}.$$

Если (2.1) – представление общего положения, то каждое множество F_i либо является гипергранью, либо пусто.

Полярным множеством полиэдра $P \subset \mathbb{R}^n$ называется множество

$$P^* = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n: \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + 1 \geq 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \in P\}. \quad (2.2)$$

Множество P^* является выпуклым полиэдром. (В действительности, оно естественно является подмножеством в двойственном пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$, но мы не будем делать этого различия, считая пространство \mathbb{R}^n евклидовым.)

Следующие свойства хорошо известны в выпуклой геометрии.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [11; § 2.9] или [59; теорема 2.11]). (а) *Полиэдр P^* ограничен тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \text{int } P$.*

(б) *$P \subset (P^*)^*$; при этом $(P^*)^* = P$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in P$.*

(с) *Если многогранник Q задан выпуклой оболочкой, $Q = \text{conv}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$, то полярное множество Q^* задается неравенствами (2.1), где $b_i = 1$ при $1 \leq i \leq m$. В частности, Q^* является выпуклым, но не обязательно ограниченным полиэдром.*

(д) *Если многогранник P задан неравенствами (2.1) с $b_i = 1$, то $P^* = \text{conv}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$. При этом неравенство $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + 1 \geq 0$ является лишним тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_i \in \text{conv}(\mathbf{a}_j: j \neq i)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Полиэдр P допускает представление (2.1) с $b_i = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \text{int } P$. В общем случае $(P^*)^* = \text{conv}(P, \mathbf{0})$.

Для любого комбинаторного многогранника P существует представление (2.1) с $b_i = 1$ (чтобы получить его, сдвинем начало координат во внутренность многогранника P , а затем разделим каждое неравенство в (2.1) на соответствующее число b_i). Тогда P^* также является многогранником с $\mathbf{0} \in P^*$ и $(P^*)^* = P$. Мы будем называть комбинаторный многогранник P^* *двойственным* комбинаторному многограннику P . (Мы не будем вводить нового обозначения для двойственного многогранника, помня, что полярность является

выпукло-геометрическим понятием, а двойственность многогранников – комбинаторным.)

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [11; § 2.10]). *Если P и P^* – двойственные многогранники, то множество граней многогранника P^* получается из множества граней многогранника P обращением отношения частичного порядка.*

Из **предыдущей** теоремы вытекает, что если P – простой многогранник, то каждая грань двойственного многогранника P^* является симплексом. Такие многогранники называются *симплициальными*.

Следующая конструкция реализует многогранник (2.1) размерности n в виде пересечения ортанта \mathbb{R}_{\geq}^m с некоторой аффинной n -плоскостью. Данная конструкция будет использована в следующем разделе для определения пересечений квадрик и момент-угол-многообразий.

КОНСТРУКЦИЯ 2.3. Образует матрицу A размера $n \times m$, столбцами которой являются векторы \mathbf{a}_i , записанные в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^n . Заметим, что матрица A имеет полный ранг n тогда и только тогда, когда полиэдр P имеет вершину. Также положим $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^t \in \mathbb{R}^m$ – столбец из чисел b_i . Тогда мы можем переписать систему (2.1) в виде

$$P = P(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (A^t \mathbf{x} + \mathbf{b})_i \geq 0 \text{ при } i = 1, \dots, m\},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ – столбец координат. Рассмотрим аффинное отображение

$$i_{A, \mathbf{b}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad i_{A, \mathbf{b}}(\mathbf{x}) = A^t \mathbf{x} + \mathbf{b} = (\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle + b_1, \dots, \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{x} \rangle + b_m)^t.$$

Если P имеет вершину, то образ пространства \mathbb{R}^n при отображении $i_{A, \mathbf{b}}$ является n -мерной аффинной плоскостью в \mathbb{R}^m , которую можно задать $m - n$ линейными уравнениями:

$$\begin{aligned} i_{A, \mathbf{b}}(\mathbb{R}^n) &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{y} = A^t \mathbf{x} + \mathbf{b} \text{ для некоторого } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \Gamma \mathbf{y} = \Gamma \mathbf{b}\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\Gamma = (\gamma_{jk})$ – матрица размера $(m - n) \times m$, строки которой образуют базис линейных зависимостей между векторами \mathbf{a}_i . Другими словами, матрица Γ имеет полный ранг и удовлетворяет соотношению $\Gamma A^t = 0$.

Мы имеем $i_{A, \mathbf{b}}(P) = \mathbb{R}_{\geq}^m \cap i_{A, \mathbf{b}}(\mathbb{R}^n)$.

КОНСТРУКЦИЯ 2.4 (двойственность Гейла). Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ – конфигурация векторов, которые порождают все пространство \mathbb{R}^n . Образует $(m - n) \times m$ -матрицу $\Gamma = (\gamma_{jk})$, строки которой составляют базис в пространстве линейных зависимостей между векторами \mathbf{a}_i . Набор столбцов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ матрицы Γ называется *двойственной по Гейлу конфигурацией* для $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Переход от конфигурации векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ в \mathbb{R}^n к конфигурации векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ в \mathbb{R}^{m-n} называется (линейным) *преобразованием Гейла*. Каждая из двух конфигураций определяет другую с точностью до изоморфизма ее объемлющего пространства. Другими словами, каждая из матриц A и Γ определяет другую с точностью до умножения слева на невырожденную матрицу.

Используя бескоординатные обозначения, можно представить $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ как множество линейных функций на некотором n -мерном пространстве W . Тогда имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{A^t} \mathbb{R}^m \xrightarrow{G} L \longrightarrow 0,$$

где отображение A^t задается формулой $\mathbf{x} \mapsto (\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle, \dots, \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{x} \rangle)$, а отображение G переводит \mathbf{e}_i в $\gamma_i \in L \cong \mathbb{R}^{m-n}$. Аналогично, в двойственной точной последовательности

$$0 \longrightarrow L^* \xrightarrow{G^t} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} W^* \longrightarrow 0$$

отображение A переводит \mathbf{e}_i в $\mathbf{a}_i \in W^* \cong \mathbb{R}^n$. Таким образом, две конфигурации $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ двойственны по Гейлу тогда и только тогда, когда они получаются как образы стандартного базиса в \mathbb{R}^m при отображениях A и G из пары двойственных коротких точных последовательностей.

Вот важное свойство двойственности Гейла.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ – двойственные по Гейлу конфигурации векторов в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^{m-n} соответственно, и пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. В этом случае подмножество $\{\mathbf{a}_i : i \in I\}$ является линейно независимым тогда и только тогда, когда подмножество $\{\gamma_j : j \notin I\}$ порождает все пространство \mathbb{R}^{m-n} .

Доказательство использует следующую алгебраическую лемму.

ЛЕММА 2.6. Пусть \mathbf{k} – поле или кольцо \mathbb{Z} , и пусть дана диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & U & & & \\ & & & \downarrow i_1 & & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i_2} & S & \xrightarrow{p_2} & T \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow p_1 & & \\ & & & & V & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

в которой вертикальная и горизонтальные линии являются точными последовательностями векторных пространств над \mathbf{k} или свободных абелевых групп. В этом случае композиция $p_1 i_2$ сюръективна (соответственно инъективна или расщепимо инъективна) тогда и только тогда, когда композиция $p_2 i_1$ сюръективна (соответственно инъективна или расщепимо инъективна).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это простой диаграммный поиск. Пусть сначала $p_1 i_2$ сюръективно. Выберем элемент $\alpha \in T$; нам необходимо накрыть его элементом из U . Существует $\beta \in S$ такой, что $p_2(\beta) = \alpha$. Если $\beta \in i_1(U)$, то все доказано. В противном случае положим $\gamma = p_1(\beta) \neq 0$. Так как $p_1 i_2$ сюръективно, можно выбрать $\delta \in R$ так, что $p_1 i_2(\delta) = \gamma$. Положим $\eta = i_2(\delta) \neq 0$. Тогда $p_1(\eta) = p_1(\beta)$ ($= \gamma$) и существует такой $\xi \in U$, что $i_1(\xi) = \beta - \eta$. Тогда $p_2 i_1(\xi) = p_2(\beta - \eta) = \alpha - p_2 i_2(\delta) = \alpha$. Следовательно, отображение $p_2 i_1$ сюръективно.

Теперь пусть $p_1 i_2$ инъективно. Предположим, что $p_2 i_1(\alpha) = 0$ для ненулевого $\alpha \in U$. Положим $\beta = i_1(\alpha) \neq 0$. Так как $p_2(\beta) = 0$, существует ненулевой элемент $\gamma \in R$ такой, что $i_2(\gamma) = \beta$. Тогда $p_1 i_2(\gamma) = p_1(\beta) = p_1 i_1(\alpha) = 0$. Это противоречит предположению об инъективности отображения $p_1 i_2$. Следовательно, $p_2 i_1$ инъективно.

Наконец, если $p_1 i_2$ расщепимо инъективно, то двойственное отображение $i_2^* p_1^*: V^* \rightarrow R^*$ сюръективно. Тогда $i_1^* p_2^*: T^* \rightarrow U^*$ также сюръективно по доказанному выше. Следовательно, отображение $p_2 i_1$ расщепимо инъективно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5. Пусть A – матрица размера $n \times m$ со столбцами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, и пусть Γ – матрица размера $(m - n) \times m$ со столбцами $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Обозначим через A_I подматрицу размера $n \times k$, образованную столбцами $\{\mathbf{a}_i: i \in I\}$, и через $\Gamma_{\tilde{I}}$ подматрицу размера $(m - n) \times (m - k)$, образованную столбцами $\{\gamma_j: j \notin I\}$. Рассмотрим также соответствующие отображения $A_I: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\Gamma_{\tilde{I}}: \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$.

Пусть $i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ – вложение координатного подпространства, порожденного векторами $\mathbf{e}_i, i \in I$, и пусть $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ – проекция, переводящая каждый такой \mathbf{e}_i в нуль. Тогда $A_I = A \cdot i$ и $\Gamma_{\tilde{I}}^t = p \cdot \Gamma^t$. Векторы $\{\mathbf{a}_i: i \in I\}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда отображение $A_I = A \cdot i$ инъективно, а векторы $\{\gamma_j: j \notin I\}$ порождают все пространство \mathbb{R}^{m-n} тогда и только тогда, когда отображение $\Gamma_{\tilde{I}}^t = p \cdot \Gamma^t$ инъективно. Эти два условия эквивалентны согласно лемме 2.6. Теорема доказана.

КОНСТРУКЦИЯ 2.7 (диаграмма Гейла). Пусть P – многогранник, заданный системой (2.1) с $b_i = 1$, и пусть $P^* = \text{conv}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ – полярный многогранник. Введем $m \times (n + 1)$ -матрицу $\tilde{A}^t = (A^t \mathbf{1})$, получаемую добавлением столбца из единиц к A^t . Матрица \tilde{A}^t имеет полный ранг $n + 1$ (действительно, в противном случае существует $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, для которого $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = 1$ при всех i , и тогда $\lambda \mathbf{x}$ лежит в P при $\lambda \geq 1$, т. е. P неограничен). Конфигурация векторов $G = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ в \mathbb{R}^{m-n-1} , двойственная по Гейлу к \tilde{A} , называется *диаграммой Гейла* многогранника P^* . Таким образом, диаграмма Гейла $G = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ многогранника P^* определяется условиями

$$GA^t = 0, \quad \text{rank } G = m - n - 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i = \mathbf{0}.$$

Строки матрицы G образуют базис *аффинных зависимостей* между векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, т. е. базис в пространстве наборов $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^t$, удовлетворяющих условиям

$$y_1 \mathbf{a}_1 + \dots + y_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \quad y_1 + \dots + y_m = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Полиэдр $P = P(A, \mathbf{b})$ ограничен тогда и только тогда, когда матрицу $\Gamma = (\gamma_{jk})$ можно выбрать таким образом, что аффинная плоскость $i_{A, \mathbf{b}}(\mathbb{R}^n)$ задается уравнениями

$$i_{A, \mathbf{b}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \begin{array}{l} \gamma_{11}y_1 + \cdots + \gamma_{1m}y_m = c, \\ \gamma_{j1}y_1 + \cdots + \gamma_{jm}y_m = 0, \quad 2 \leq j \leq m - n \end{array} \right\}, \quad (2.4)$$

где $c > 0$ и $\gamma_{1k} > 0$ для всех k .

Если $b_i = 1$ в (2.1), то векторы $\mathbf{g}_i = (\gamma_{2i}, \dots, \gamma_{m-n,i})^t$, $i = 1, \dots, m$, образуют диаграмму Гейла полярного многогранника $P^* = \text{conv}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ $i_{A, \mathbf{b}}(P)$ является пересечением n -плоскости $L = i_{A, \mathbf{b}}(\mathbb{R}^n)$ с \mathbb{R}_{\geq}^m . Это пересечение ограничено тогда и только тогда, когда $L_0 \cap \mathbb{R}_{\geq}^m = \{\mathbf{0}\}$, где L_0 — n -плоскость, проходящая через $\mathbf{0}$ и параллельная плоскости L . Выберем гиперплоскость H_0 , проходящую через $\mathbf{0}$ и удовлетворяющую условиям $L_0 \subset H_0$ и $H_0 \cap \mathbb{R}_{\geq}^m = \{\mathbf{0}\}$. Пусть H — аффинная гиперплоскость, параллельная H_0 и содержащая L . Так как $L \subset H$, мы можем взять уравнение, задающее гиперплоскость H , в качестве первого уравнения системы $\Gamma \mathbf{y} = \Gamma \mathbf{b}$, задающей плоскость L . Из условий на H_0 вытекает, что пересечение $H \cap \mathbb{R}_{\geq}^m$ непусто и ограничено, т. е. $c > 0$ и $\gamma_{1k} > 0$ для всех k . Теперь, вычитая первое уравнение с подходящими коэффициентами из остальных уравнений системы $\Gamma \mathbf{y} = \Gamma \mathbf{b}$, можно добиться того, чтобы правые части оставшихся $m - n - 1$ уравнений были равны нулю.

Для доказательства последнего утверждения заметим, что в нашем случае

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_m \end{pmatrix}.$$

Из условий $\Gamma A^t = 0$ и $\text{rank } \Gamma = m - n$ вытекает, что $GA^t = 0$ и $\text{rank } G = m - n - 1$. Наконец, сравнивая (2.3) с (2.4), мы получаем $\Gamma \mathbf{b} = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Так как $b_i = 1$, отсюда следует, что $\sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i = \mathbf{0}$. Итак, $G = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ является диаграммой Гейла многогранника P^* . Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Полиэдр $P = P(A, \mathbf{b})$ является ограниченным тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ удовлетворяют соотношению $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ для некоторых положительных чисел α_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ удовлетворяют соотношению $\sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ с положительными α_k , то мы можем взять $\sum_{k=1}^m \alpha_k y_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k b_k$ в качестве первого из уравнений, задающих n -плоскость $i_{A, \mathbf{b}}(\mathbb{R}^n)$ в \mathbb{R}^m . Отсюда следует, что образ $i_{A, \mathbf{b}}(P)$ содержится в пересечении гиперплоскости $\sum_{k=1}^m \alpha_k y_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k b_k$ с \mathbb{R}_{\geq}^m , а это пересечение ограничено в силу положительности всех α_k . Следовательно, полиэдр P ограничен.

Обратно, если P ограничен, то из предложения 2.8 и двойственности Гейла следует, что векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ удовлетворяют соотношению $\gamma_{11}\mathbf{a}_1 + \dots + \gamma_{1m}\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ с $\gamma_{1k} > 0$. Следствие доказано.

Диаграмма Гейла многогранника P^* полностью определяет его комбинаторную структуру (и комбинаторную структуру многогранника P). Мы приводим соответствующее утверждение только в случае общего положения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Пусть (2.1) – представление общего положения с $b_i = 1$. Пусть $P^* = \text{conv}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ – полярный симплицальный многогранник, и пусть $G = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ – его диаграмма Гейла. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$ в многограннике $P = P(A, \mathbf{1})$;
- (b) $\text{conv}(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k})$ является гранью многогранника P^* ;
- (c) $\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathbf{g}_j : j \notin \{i_1, \dots, i_k\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (a) \Leftrightarrow (b) следует из теорем 2.1 и 2.2.

(b) \Rightarrow (c). Пусть $\text{conv}(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k})$ – грань многогранника P^* . Заметим, что каждый из векторов $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ является вершиной этой грани, так как в противном случае (2.1) не является представлением общего положения. По определению грани, существует линейная функция ξ такая, что $\xi(\mathbf{a}_j) = 0$ при $j \in \{i_1, \dots, i_k\}$ и $\xi(\mathbf{a}_j) > 0$ в противном случае. Условие $\mathbf{0} \in \text{int } P^*$ влечет $\xi(\mathbf{0}) > 0$, и мы можем предполагать, что ξ имеет вид $\xi(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + 1$ для некоторого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Положим $y_j = \xi(\mathbf{a}_j) = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle + 1$, т.е. $\mathbf{y} = A^t \mathbf{x} + \mathbf{1}$. Имеем

$$\sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \mathbf{g}_j y_j = \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j y_j = G\mathbf{y} = G(A^t \mathbf{x} + \mathbf{1}) = G\mathbf{1} = \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j = \mathbf{0},$$

где $y_j > 0$ при $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Тогда $\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathbf{g}_j : j \notin \{i_1, \dots, i_k\})$.

(c) \Rightarrow (b). Пусть $\sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} \mathbf{g}_j y_j = \mathbf{0}$, где $y_j \geq 0$ и хотя бы одно число y_j отлич-

но от нуля. Это – линейная зависимость между векторами \mathbf{g}_j . В пространстве таких линейных зависимостей столбцы матрицы $\tilde{A}^t = (A^t \mathbf{1})$ образуют базис. Следовательно, существуют $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}$, для которых $y_j = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle + b$. Линейная функция $\xi(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + b$ принимает нулевые значения на векторах \mathbf{a}_j с $j \in \{i_1, \dots, i_k\}$ и неотрицательные значения на остальных векторах \mathbf{a}_j . Следовательно, $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ является подмножеством вершин некоторой грани. Так как многогранник P^* симплицальный, $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ является множеством вершин грани. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы допускаем наличие лишних неравенств в предложении 2.10. В этом случае мы получаем эквивалентности

$$F_i = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \in \text{conv}(\mathbf{a}_j : j \neq i) \Leftrightarrow \mathbf{0} \notin \text{conv}(\mathbf{g}_j : j \neq i).$$

Конфигурация векторов $G = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ в \mathbb{R}^{m-n-1} со свойством

$$\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathbf{g}_j : j \notin \{i_1, \dots, i_k\}) \Leftrightarrow \text{conv}(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}) \text{ – грань в } P^*$$

называется *комбинаторной диаграммой Гейла* для $P^* = \text{conv}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$. Например, конфигурация, получаемая умножением каждого вектора диаграммы Гейла на положительное число, является комбинаторной диаграммой Гейла. Кроме того, векторы комбинаторной диаграммы Гейла можно двигать до тех пор, пока начало координат не пересекает “стенок”, т. е. аффинных гиперплоскостей, порожденных подмножествами набора $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$. Комбинаторная диаграмма Гейла многогранника P^* является диаграммой Гейла многогранника, комбинаторно эквивалентного P^* .

Диаграммы Гейла предоставляют эффективный инструмент для изучения комбинаторных свойств многогранников высокой размерности с небольшим числом вершин, так как в этом случае диаграмма Гейла переводит свойства объекта большой размерности в свойства объекта малой размерности. Например, диаграммы Гейла используются для классификации n -мерных многогранников с числом вершин $\leq n + 3$, а также для нахождения примеров многогранников с необычными свойствами в случае числа вершин $n + 4$, см. [59; § 6.5].

3. Пересечения квадрик

Здесь мы описываем соответствие между полиэдрами (2.1) и пересечениями квадрик.

3.1. От полиэдров к квадрикам.

Конструкция 3.1 ([14], см. также [16; § 3]). Пусть $P = P(A, \mathbf{b})$ – представление полиэдра (2.1), имеющего вершину. Рассмотрим отображение $i_{A, \mathbf{b}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A^t \mathbf{x} + \mathbf{b}$ (см. конструкцию 2.3). Оно вкладывает полиэдр P в ортант \mathbb{R}_{\geq}^m (отображение является вложением, так как векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ порождают пространство \mathbb{R}^n). Определим пространство $\mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}}$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}} & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_{A, \mathbf{b}}} & \mathbb{R}_{\geq}^m \end{array} \quad (3.1)$$

где $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$. Тор \mathbb{T}^m действует на $\mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}}$ с пространством орбит P , а i_Z является \mathbb{T}^m -эквивариантным вложением.

Заменяя y_k на $|z_k|^2$ в уравнениях, задающих аффинную плоскость $i_{A, \mathbf{b}}(\mathbb{R}^n)$ (см. (2.3)), мы получаем, что пространство $\mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}}$ вкладывается в \mathbb{C}^m как множество общих нулей $m - n$ квадратичных уравнений (*эрмитовых квадрик*):

$$i_Z(\mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}}) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} b_k \text{ при } 1 \leq j \leq m - n \right\}. \quad (3.2)$$

Следующее свойство пространства $\mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}}$ непосредственно вытекает из его конструкции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Для данной точки $z \in \mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}}$ j -я координата образа $i_Z(z) \in \mathbb{C}^m$ равна нулю тогда и только тогда, когда точка z проектируется в точку $\mathbf{x} \in P$, лежащую на j -й гипергранни, $\mathbf{x} \in F_j$.*

ТЕОРЕМА 3.3. Следующие условия эквивалентны:

- (а) представление (2.1), задаваемое данными (A, \mathbf{b}) , является представлением общего положения;
- (б) пересечение квадрик (3.2) непусто и невырождено, т. е. $\mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}$ является гладким многообразием размерности $m + n$.

При выполнении этих условий вложение $i_Z: \mathcal{L}_{A, \mathbf{b}} \rightarrow \mathbb{C}^m$ имеет \mathbb{T}^m -эquivariantно тривиальное нормальное расслоение; \mathbb{T}^m -оснащение задается выбором матрицы Γ в (2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты отождествим пространство $\mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}$ с его вложением $i_Z(\mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}) \subset \mathbb{C}^m$. Вычислим градиенты $m - n$ квадрик из (3.2) в точке $\mathbf{z} = (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) \in \mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}$, где $z_k = x_k + iy_k$:

$$2(\gamma_{j1}x_1, \gamma_{j1}y_1, \dots, \gamma_{jm}x_m, \gamma_{jm}y_m), \quad 1 \leq j \leq m - n. \quad (3.3)$$

Эти градиенты образуют строки $(m - n) \times 2m$ -матрицы $2\Gamma\Delta$, где

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_m & y_m \end{pmatrix}.$$

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\} = \{i: z_i = 0\}$ – множество нулевых координат точки \mathbf{z} . Тогда ранг матрицы градиентов $2\Gamma\Delta$ в точке \mathbf{z} равен рангу $(m - n) \times (m - k)$ -матрицы $\Gamma_{\hat{I}}$, получаемой удалением столбцов с номерами i_1, \dots, i_k из Γ .

Предположим теперь, что (2.1) – представление общего положения. В силу предложения 3.2, точка \mathbf{z} с $z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0$ проектируется в точку из пересечения $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$. Следовательно, векторы $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ линейно независимы. Из теоремы 2.5 получаем, что ранг матрицы $\Gamma_{\hat{I}}$ равен $m - n$. Поэтому пересечение квадрик (3.2) невырождено.

С другой стороны, если (2.1) не является представлением общего положения, то найдется точка $\mathbf{z} \in \mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}$, для которой векторы $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}: z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$ линейно зависимы. В силу теоремы 2.5, столбцы соответствующей матрицы $\Gamma_{\hat{I}}$ не порождают все пространство \mathbb{R}^{m-n} , а значит, ранг этой матрицы меньше $m - n$ и пересечение квадрик (3.2) вырождено в точке \mathbf{z} .

Последнее утверждение вытекает из того факта, что $\mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}$ является невырожденным пересечением квадратичных поверхностей, каждая из которых \mathbb{T}^m -инвариантна. Теорема доказана.

3.2. От квадрик к полиэдрам. Теперь мы начнем с рассмотрения пересечения $m - n$ эрмитовых квадрик в \mathbb{C}^m :

$$\mathcal{L}_{\Gamma, \delta} = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m: \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} |z_k|^2 = \delta_j \text{ при } 1 \leq j \leq m - n \right\}. \quad (3.4)$$

Коэффициенты квадрик образуют $(m - n) \times m$ -матрицу $\Gamma = (\gamma_{jk})$, столбцы которой мы обозначим через $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Мы также рассмотрим вектор-столбец правых частей уравнений, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{m-n})^t \in \mathbb{R}^{m-n}$.

Мы будем рассматривать такие пересечения квадрик с точностью до *линейной эквивалентности*, что соответствует применению невырожденного линейного преобразования пространства \mathbb{R}^{m-n} к матрице Γ и вектору δ . Очевидно, такая линейная эквивалентность не меняет множества $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$.

Обозначим через $\mathbb{R}_{\geq} \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$ конус, порожденный векторами $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ (т. е. множество линейных комбинаций этих векторов с неотрицательными коэффициентами).

Вариант следующего утверждения появлялся в работе [40], а доказательство, приводимое ниже, является модификацией рассуждения из [10; лемма 0.3]. Это утверждение позволяет определить, является ли пересечение квадрик невырожденным, непосредственно в терминах данных (Γ, δ) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Пересечение квадрик (3.4) является непустым и невырожденным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (а) $\delta \in \mathbb{R}_{\geq} \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$;
- (б) если $\delta \in \mathbb{R}_{\geq} \langle \gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_k} \rangle$, то $k \geq m - n$.

При этих условиях $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$ является гладким подмногообразием размерности $m + n$ в \mathbb{C}^m , а векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождают пространство \mathbb{R}^{m-n} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале предположим, что выполнены условия (а) и (б). Тогда из (а) вытекает, что $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta} \neq \emptyset$. Пусть $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$. Тогда ранг матрицы градиентов квадрик (3.4) в точке \mathbf{z} равен $\text{rk}\{\gamma_k : z_k \neq 0\}$. Так как $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$, вектор δ лежит в конусе, порожденном теми из векторов γ_k , для которых $z_k \neq 0$. По теореме Каратеодори вектор δ лежит в конусе, порожденном некоторыми $m - n$ из этих векторов, т. е. $\delta \in \mathbb{R}_{\geq} \langle \gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_{m-n}} \rangle$, где $z_{k_i} \neq 0$ при $i = 1, \dots, m - n$. Кроме того, векторы $\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_{m-n}}$ являются линейно независимыми (в противном случае, снова в силу теоремы Каратеодори, мы получаем противоречие с (б)). Отсюда следует, что $m - n$ градиентов квадрик (3.4) линейно независимы в точке \mathbf{z} , а значит, $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$ является гладким $(m + n)$ -мерным многообразием.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что если условие (б) не выполнено, т. е. вектор δ лежит в конусе, порожденном некоторыми $m - n - 1$ векторами из $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, то найдется точка $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$, у которой по меньшей мере $n + 1$ координат обращаются в нуль. Градиенты системы квадрик (3.4) не могут быть линейно независимы в такой точке \mathbf{z} . Предложение доказано.

На множестве $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$ действует тор \mathbb{T}^m , а пространство орбит $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}/\mathbb{T}^m$ отождествляется с множеством неотрицательных решений системы $m - n$ линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^m \gamma_k y_k = \delta. \quad (3.5)$$

Это множество может быть описано как выпуклый полиэдр $P(A, \mathbf{b})$, задаваемый неравенствами (2.1), где (b_1, \dots, b_m) – произвольное решение системы (3.5), а векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ образуют матрицу, транспонированную к матрице базиса решений однородной системы $\sum_{k=1}^m \gamma_k y_k = \mathbf{0}$. Мы будем называть $P(A, \mathbf{b})$ *ассоциированным полиэдром* пересечения квадрик $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$. Если

векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождают пространство \mathbb{R}^{m-n} , то векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ порождают пространство \mathbb{R}^n . В этом случае две конфигурации векторов двойственны по Гейлу.

Мы соберем результаты и конструкции этого раздела в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 3.5. *Представление полиэдра*

$$P = P(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i \geq 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\}$$

(с векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, порождающими \mathbb{R}^n) задает пересечение эрмитовых квадрик

$$\mathcal{L}_{\Gamma, \delta} = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} |z_k|^2 = \delta_j \text{ при } j = 1, \dots, m-n \right\}$$

(с векторами $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, порождающими \mathbb{R}^{m-n}) однозначно с точностью до линейного изоморфизма пространства \mathbb{R}^{m-n} , а пересечение квадрик $\mathcal{L}_{\Gamma, \delta}$ задает представление полиэдра $P(A, \mathbf{b})$ однозначно с точностью до изоморфизма пространства \mathbb{R}^n .

Конфигурации векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}^{m-n}$ двойственны по Гейлу, а векторы $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ и $\delta \in \mathbb{R}^{m-n}$ связаны соотношением $\delta = \Gamma \mathbf{b}$.

Пересечение квадрик $\mathcal{L}_{\Gamma, \delta}$ непусто и невырождено тогда и только тогда, когда $P(A, \mathbf{b})$ является представлением общего положения.

ПРИМЕР 3.6 ($m = n + 1$: одна квадрика). Если (2.1) является представлением общего положения и полиэдр P ограничен, то $m \geq n + 1$. Случай $m = n + 1$ соответствует симплексу. Стандартный симплекс задается следующими $n + 1$ неравенствами:

$$\Delta^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ при } i = 1, \dots, n \text{ и } -x_1 - \dots - x_n + 1 \geq 0\}.$$

В этом случае мы имеем $\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i$ (i -й вектор стандартного базиса) при $i = 1, \dots, n$ и $\mathbf{a}_{n+1} = -\mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_n$. Взяв $\Gamma = (1 \dots 1)$, мы получаем

$$\mathcal{L}_{A, \mathbf{b}} = \mathbb{S}^{2n+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$

В более общем случае представление (2.1) с $m = n + 1$ и векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, порождающими пространство \mathbb{R}^n , изоморфизмом пространства \mathbb{R}^n приводится к виду

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i + b_i \geq 0 \text{ при } i = 1, \dots, n \text{ и } -c_1 x_1 - \dots - c_n x_n + b_{n+1} \geq 0\}.$$

Мы имеем $\Gamma = (c_1 \dots c_n \ 1)$, а множество $\mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}$ задается одним уравнением

$$c_1 |z_1|^2 + \dots + c_n |z_n|^2 + |z_{n+1}|^2 = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n + b_{n+1}.$$

Если представление полиэдра общего положения и ограничено, то множество $\mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}$ непусто, невырождено и ограничено согласно теореме 3.3. Отсюда следует, что все c_i и правая часть предыдущего уравнения положительны, а $\mathcal{L}_{A, \mathbf{b}}$ является эллипсоидом.

4. Момент-угол-многообразия, происходящие из многогранников

Здесь мы рассматриваем случай, когда полиэдр, задаваемый системой неравенств (2.1), ограничен (или, эквивалентно, ограничено пересечение квадрик (3.4)) **ограничен**. Мы также будем предполагать, что (2.1) – представление общего положения, т. е. P является n -мерным **многогранником**, а $\mathcal{L}_{A,\mathbf{b}} = \mathcal{L}_{T,\delta}$ является $(m+n)$ -мерным замкнутым гладким многообразием.

Мы начнем с рассмотрения конструкции факторпространства по отношению эквивалентности, которая восходит к работе Винберга [58] по группам Коксетера, а в виде, описанном ниже, приведена в работе Дэвиса и Янушкевича [21]. Это было первой конструкцией того, что позже стало известно как момент-угол-многообразие.

Конструкция 4.1. Пусть $[m] = \{1, \dots, m\}$ – стандартное множество из m элементов. Для каждого $I \subset [m]$ рассмотрим координатный подтор

$$\mathbb{T}^I = \{(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{T}^m : t_j = 1 \text{ при } j \notin I\} \subset \mathbb{T}^m.$$

В частности, \mathbb{T}^\emptyset – это тривиальная подгруппа $\{1\} \subset \mathbb{T}^m$.

Определим отображение $\mathbb{R}_{\geq} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $(y, t) \mapsto yt$. Взяв произведение, получим отображение $\mathbb{R}_{\geq}^m \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$. Прообраз точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$ при этом отображении есть $\mathbf{y} \times \mathbb{T}^{\omega(\mathbf{z})}$, где $y_i = |z_i|$ при $1 \leq i \leq m$ и

$$\omega(\mathbf{z}) = \{i : z_i = 0\} \subset [m]$$

– множество нулевых координат точки \mathbf{z} . Следовательно, мы можем отождествить пространство \mathbb{C}^m с факторпространством

$$\mathbb{R}_{\geq}^m \times \mathbb{T}^m / \sim, \quad \text{где } (\mathbf{y}, \mathbf{t}_1) \sim (\mathbf{y}, \mathbf{t}_2) \text{ при } \mathbf{t}_1^{-1} \mathbf{t}_2 \in \mathbb{T}^{\omega(\mathbf{y})}. \quad (4.1)$$

Для точки $\mathbf{x} \in P$ мы положим

$$I_{\mathbf{x}} = \{i \in [m] : \mathbf{x} \in F_i\}$$

(множество гиперграней, содержащих \mathbf{x}).

Предложение 4.2. Многообразие $\mathcal{L}_{A,\mathbf{b}}$ \mathbb{T}^m -эквивариантно гомеоморфно факторпространству

$$P \times \mathbb{T}^m / \sim, \quad \text{где } (\mathbf{x}, \mathbf{t}_1) \sim (\mathbf{x}, \mathbf{t}_2) \text{ при } \mathbf{t}_1^{-1} \mathbf{t}_2 \in \mathbb{T}^{I_{\mathbf{x}}}.$$

Доказательство. Используя (3.1), мы отождествляем $\mathcal{L}_{A,\mathbf{b}}$ с факторпространством $i_{A,\mathbf{b}}(P) \times \mathbb{T}^m / \sim$, где \sim – отношение эквивалентности из (4.1). Отображение $i_{A,\mathbf{b}}$ переводит точку $\mathbf{x} \in P$ в точку $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\geq}^m$ с $I_{\mathbf{x}} = \omega(\mathbf{y})$. Предложение доказано.

Важным следствием этой конструкции является то, что топологический тип многообразия $\mathcal{L}_{A,\mathbf{b}}$ зависит только от комбинаторики многогранника P :

Предложение 4.3. Пусть даны два представления общего положения

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (A^t \mathbf{x} + \mathbf{b})_i \geq 0\} \quad \text{и} \quad P' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (A'^t \mathbf{x} + \mathbf{b}')_i \geq 0\}$$

такие, что простые многогранники P и P' комбинаторно эквивалентны.

(а) Если оба представления являются неизбыточными, то соответствующие многообразия $\mathcal{Z}_{A,B}$ и $\mathcal{Z}_{A',B'}$ эквивариантно гомеоморфны.

(б) Если второе представление получено из первого добавлением k лишних неравенств, то многообразие $\mathcal{Z}_{A',B'}$ гомеоморфно произведению многообразия $\mathcal{Z}_{A,B}$ и k -мерного тора T^k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Из предложения 4.2 получаем $\mathcal{Z}_{A,B} \cong P \times \mathbb{T}^m / \sim$ и $\mathcal{Z}_{A',B'} \cong P' \times \mathbb{T}^m / \sim$. Если оба представления являются неизбыточными, то все F_i являются гипергранями многогранника P , и отношение эквивалентности \sim зависит только от комбинаторной структуры P . Следовательно, любой гомеоморфизм $P \rightarrow P'$, сохраняющий структуру граней, продолжается до \mathbb{T}^m -эквивариантного гомеоморфизма $P \times \mathbb{T}^m / \sim \rightarrow P' \times \mathbb{T}^m / \sim$.

(б) Пусть первое представление содержит m неравенств, а второе – m' неравенств, т.е. $m' - m = k$. Пусть $J \subset [m']$ – подмножество, соответствующее k добавленным неравенствам; можно предполагать, что $J = \{m+1, \dots, m'\}$. Так как $F_j = \emptyset$ при $j \in J$, мы имеем $I_x \cap J = \emptyset$ для любой точки $x \in P'$. Следовательно, отношение эквивалентности \sim не влияет на множитель $\mathbb{T}^J \subset \mathbb{T}^{m'}$, и мы имеем

$$\mathcal{Z}_{A',B'} \cong P' \times \mathbb{T}^{m'} / \sim \cong (P \times \mathbb{T}^m / \sim) \times \mathbb{T}^J \cong \mathcal{Z}_{A,B} \times T^k.$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. В предложении 4.3, (а) гомеоморфизм можно заменить диффеоморфизмом (относительно гладких структур, задаваемых теоремой 3.3), но доказательство этого более техническое. Оно следует из того факта, что два простых многогранника комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда они диффеоморфны как “гладкие многообразия с углами”. Другое доказательство диффеоморфности можно найти в [10; следствие 4.7].

Утверждение (а) остается верным и без предположения общности положения, но в этом случае $\mathcal{Z}_{A,B}$ не является многообразием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Мы будем называть $(m+n)$ -мерное многообразие $\mathcal{Z}_{A,B}$, задаваемое неизбыточным представлением (2.1) n -мерного простого многогранника P с m гипергранями, *момент-угол-многообразием*, соответствующим многограннику P , и обозначать его через \mathcal{Z}_P . Такие момент-угол-многообразия называются *происходящими из многогранников*; в последующих разделах мы рассмотрим более общие момент-угол-многообразия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Момент-угол-многообразие \mathcal{Z}_P эквивариантно гомеоморфно невырожденному пересечению квадратик следующего вида:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^m |z_k|^2 = 1, \\ \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k |z_k|^2 = \mathbf{0} \end{array} \right\}, \quad (4.2)$$

где $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) \subset \mathbb{R}^{m-n-1}$ – комбинаторная диаграмма Гейла двойственного многогранника P^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.8 следует, что многообразию \mathcal{L}_P можно задать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m: \quad \gamma_{11}|z_1|^2 + \cdots + \gamma_{1m}|z_m|^2 = c, \\ \mathbf{g}_1|z_1|^2 + \cdots + \mathbf{g}_m|z_m|^2 = \mathbf{0} \end{array} \right\},$$

где числа γ_{1k} и c положительны. Разделим первое уравнение на c и заменим каждое z_k на $\sqrt{c/\gamma_{1k}} z_k$. В результате каждый вектор \mathbf{g}_k умножится на положительное число, так что набор $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$ по-прежнему будет комбинаторной диаграммой Гейла для P^* . Предложение доказано.

Приспосабливая предложение 3.4 к специальному случаю квадратик (4.2), мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Пересечение квадратик (4.2) является непустым и невырожденным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (а) $\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$;
- (б) если $\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathbf{g}_{i_1}, \dots, \mathbf{g}_{i_k})$, то $k \geq m - n$.

Следуя [10], мы будем называть невырожденное пересечение (4.2) набора из $m - n - 1$ однородных квадратик с единичной сферой в \mathbb{C}^m линком. Таким образом, каждое момент-угол-многообразие диффеоморфно линку, а каждый линк является произведением момент-угол-многообразия и тора.

Как мы видели в примере 3.6, момент-угол-многообразие, соответствующее n -мерному симплексу, является сферой S^{2n+1} . Оно также является линком пустой системы однородных квадратик, что соответствует случаю $m = n + 1$.

ПРИМЕР 4.7 ($m = n + 2$: две квадратик). Многогранник P , задаваемый $m = n + 2$ неравенствами, либо комбинаторно эквивалентен произведению двух симплексов (если нет лишних неравенств), либо является симплексом (если одно неравенство – лишнее). В случае $m = n + 2$ линк (4.2) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m: \quad |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1, \\ g_1|z_1|^2 + \cdots + g_m|z_m|^2 = 1 \end{array} \right\},$$

где $g_k \in \mathbb{R}$. Условие (б) из предложения 4.6 означает, что все числа g_i ненулевые; пусть среди них p положительных и $q = m - p$ отрицательных. Тогда условие (а) означает, что $p > 0$ и $q > 0$. Следовательно, линк является пересечением конуса над произведением двух эллипсоидов размерностей $2p - 1$ и $2q - 1$ (задаваемого второй квадратикой) с единичной сферой размерности $2m - 1$ (задаваемой первой квадратикой). Такой линк диффеоморфен произведению $S^{2p-1} \times S^{2q-1}$. Случай $p = 1$ или $q = 1$ соответствует одному лишнему неравенству. В избыточном случае (когда P является произведением $\Delta^{p-1} \times \Delta^{q-1}$, $p, q > 1$) мы получаем, что $\mathcal{L}_P \cong S^{2p-1} \times S^{2q-1}$.

5. Гамильтоновы торические многообразия и отображения моментов

Примеры момент-угол-многообразия \mathcal{L}_P возникают как множества уровня отображений моментов, используемых в конструкции гамильтоновых торических многообразий на основе симплектической редукции. В этом случае левые

части уравнений (3.2) являются квадратичными гамильтонианами для некоторого действия тора на \mathbb{C}^m .

5.1. Симплектическая редукция. Мы кратко изложим необходимые сведения из симплектической геометрии, отсылая читателя к монографиям М. Оден [3] и В. Гиллёммина [33] за более подробным изложением.

Симплектическим многообразием называют пару (W, ω) , состоящую из гладкого многообразия W и замкнутой дифференциальной 2-формы ω , которая невырождена в каждой точке. Симплектическое многообразие W имеет четную размерность.

Пусть теперь на W задано действие тора T , сохраняющее симплектическую форму ω . Обозначим алгебру Ли тора T через \mathfrak{t} (так как тор T коммутативен, его алгебра Ли тривиальна, но эту конструкцию можно обобщить и на случай некоммутативных групп Ли). Для данного элемента $\mathbf{v} \in \mathfrak{t}$ мы обозначим через $X_{\mathbf{v}}$ соответствующее T -инвариантное векторное поле на W . Действие тора называется *гамильтоновым*, если 1-форма $\omega(X_{\mathbf{v}}, \cdot)$ является точной для любого $\mathbf{v} \in \mathfrak{t}$. Другими словами, действие гамильтоново, если для любого $\mathbf{v} \in \mathfrak{t}$ существует функция $H_{\mathbf{v}}$ на W (называемая *гамильтонианом*), удовлетворяющая условию

$$\omega(X_{\mathbf{v}}, Y) = dH_{\mathbf{v}}(Y)$$

для любого векторного поля Y на W . Функция $H_{\mathbf{v}}$ определена с точностью до прибавления константы. Выберем базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в пространстве \mathfrak{t} и соответствующие гамильтонианы $\{H_{\mathbf{e}_i}\}$. Тогда определено *отображение моментов*

$$\mu: W \rightarrow \mathfrak{t}^*, \quad (x, \mathbf{e}_i) \mapsto H_{\mathbf{e}_i}(x),$$

где $x \in W$. Заметим, что добавление констант к гамильтонианам $H_{\mathbf{e}_i}$ приводит к сдвигу образа отображения μ на вектор из \mathfrak{t}^* . В силу теоремы Атьи и Гиллёммина–Стернберга, образ $\mu(W)$ отображения моментов является выпуклым, а если многообразие W компактно, то $\mu(W)$ является выпуклым многогранником в пространстве \mathfrak{t}^* .

ПРИМЕР 5.1. Простейшим примером является $W = \mathbb{C}^m$ с симплектической формой

$$\omega = i \sum_{k=1}^m dz_k \wedge d\bar{z}_k = 2 \sum_{k=1}^m dx_k \wedge dy_k, \quad z_k = x_k + iy_k.$$

Покоординатное действие тора \mathbb{T}^m на \mathbb{C}^m является гамильтоновым. Отображение моментов $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ задается формулой $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$. Образом отображения μ является положительный ортант \mathbb{R}_{\geq}^m .

КОНСТРУКЦИЯ 5.2 (симплектическая редукция). Пусть дано гамильтоново действие тора T на симплектическом многообразии W . Предположим, кроме того, что отображение моментов $\mu: W \rightarrow \mathfrak{t}^*$ является *собственным*, т. е. прообраз $\mu^{-1}(V)$ любого компактного подмножества $V \subset \mathfrak{t}^*$ компактен (это всегда так, если само многообразие W компактно). Пусть $\mathbf{u} \in \mathfrak{t}^*$ – *регулярное значение* отображения моментов, т. е. дифференциал $\mathcal{I}_x W \rightarrow \mathfrak{t}^*$ является сюръективным

отображением для любого $x \in \mu^{-1}(\mathbf{u})$. Тогда множество уровня $\mu^{-1}(\mathbf{u})$ является гладким компактным T -инвариантным подмногообразием в W . Кроме того, действие тора T на $\mu^{-1}(\mathbf{u})$ является почти свободным, т. е. все стабилизаторы являются конечными подгруппами.

Предположим теперь, что действие тора T на $\mu^{-1}(\mathbf{u})$ является свободным. Ограничение симплектической формы ω на $\mu^{-1}(\mathbf{u})$ может быть вырожденным. Тем не менее фактормногообразие $\mu^{-1}(\mathbf{u})/T$ наделяется единственной симплектической формой ω' , удовлетворяющей условию

$$p^*\omega' = i^*\omega,$$

где $i: \mu^{-1}(\mathbf{u}) \rightarrow W$ – вложение, а $p: \mu^{-1}(\mathbf{u}) \rightarrow \mu^{-1}(\mathbf{u})/T$ – проекция.

Итак, мы получаем новое симплектическое многообразие $(\mu^{-1}(\mathbf{u})/T, \omega')$, которое называется *симплектической редукцией* или *симплектическим факторпространством* многообразия (W, ω) по действию тора T .

Конструкция симплектической редукции также работает при более слабых ограничениях на действие (см. [25], где приведены дополнительные ссылки), но описанная выше общность будет достаточной для наших целей.

5.2. Торический случай. Мы хотим изучить симплектические факторпространства \mathbb{C}^m по действию подторов $T \subset \mathbb{T}^m$. Такая подгруппа размерности $m - n$ имеет вид

$$T_\Gamma = \{(e^{2\pi i \langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, e^{2\pi i \langle \gamma_m, \varphi \rangle}) \in \mathbb{T}^m\}, \quad (5.1)$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^{m-n} - (m-n)$ -мерный параметр, а $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ – набор из m векторов в \mathbb{R}^{m-n} . Для того чтобы подгруппа T_Γ действительно была $(m-n)$ -мерным тором, конфигурация векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ должна быть *рациональной*, т. е. набор $L = \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$ их всевозможных целочисленных линейных комбинаций должен быть $(m-n)$ -мерной дискретной подгруппой (*решеткой*) в \mathbb{R}^{m-n} . Пусть

$$L^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R}^{m-n} : \langle \lambda^*, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \lambda \in L\}$$

– двойственная решетка. Мы будем задавать элементы тора T_Γ векторами $\varphi \in \mathbb{R}^{m-n}$, заметив, что тор T_Γ отождествляется с факторгруппой \mathbb{R}^{m-n}/L^* .

Действие подгруппы $T_\Gamma \subset \mathbb{T}^m$ на \mathbb{C}^m очевидно гамильтоново, а соответствующее отображение моментов задается композицией

$$\mu_\Gamma: \mathbb{C}^m \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{t}_\Gamma^*, \quad (5.2)$$

где $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{t}_\Gamma^*$ – отображение двойственных алгебр Ли, соответствующее вложению $T_\Gamma \rightarrow \mathbb{T}^m$. Отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{t}_\Gamma^*$ переводит i -й базисный вектор $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$ в $\gamma_i \in \mathfrak{t}_\Gamma^*$. Выбрав базис в решетке $L \subset \mathfrak{t}_\Gamma^*$, мы можем записать отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{t}_\Gamma^*$ целочисленной матрицей $\Gamma = (\gamma_{jk})$. Тогда отображение моментов (5.2) задается формулой

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto \left(\sum_{k=1}^m \gamma_{1k} |z_k|^2, \dots, \sum_{k=1}^m \gamma_{m-n,k} |z_k|^2 \right).$$

Множество уровня $\mu_\Gamma^{-1}(\delta)$, соответствующее значению $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{m-n})^t \in \mathfrak{t}_\Gamma^*$, является в точности пересечением квадратик $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$, задаваемым системой (3.4).

Для того чтобы применить симплектическую редукцию, мы должны понять, когда отображение моментов μ_Γ является собственным, найти его регулярные значения δ и, наконец, определить, когда действие тора T_Γ на $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) = \mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$ является свободным. В теореме 5.3 ниже все эти условия выражены в терминах полиэдра P , ассоциированного с пересечением квадратик $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$, как описано в разделе 3. Для формулировки теоремы нам понадобятся следующие понятия.

Из двойственности Гейла вытекает, что конфигурация векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождает решетку L в \mathbb{R}^{m-n} тогда и только тогда, когда двойственная конфигурация $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ порождает решетку $N = \mathbb{Z}\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$ в \mathbb{R}^n . Будем называть представление полиэдра (2.1) *рациональным*, если $\mathbb{Z}\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$ является решеткой.

Напомним, что для любой точки $\mathbf{x} \in P$ мы определили

$$I_{\mathbf{x}} = \{i \in [m] : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i = 0\} = \{i \in [m] : \mathbf{x} \in F_i\}$$

(множество гиперграней, содержащих \mathbf{x}). Полиэдр P называется *дельзантовым*, если для него существует рациональное представление (2.1) такое, что для любой точки $\mathbf{x} \in P$ векторы $\{\mathbf{a}_i : i \in I_{\mathbf{x}}\}$ составляют часть базиса решетки $N = \mathbb{Z}\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$. Эквивалентно, полиэдр P является дельзантовым, если он простой и для любой вершины $\mathbf{x} \in P$ векторы \mathbf{a}_i , нормальные к n гиперграням, сходящимся в точке \mathbf{x} , образуют базис решетки N . Название происходит из классификации гамильтоновых торических многообразий, описанной Т. Дельзантом [22], которую мы кратко упомянем ниже.

Пусть $\delta \in \mathfrak{t}_\Gamma$ – некоторое значение отображения моментов $\mu_\Gamma : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathfrak{t}_\Gamma^*$, и пусть $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) = \mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$ – соответствующее множество уровня, которое является пересечением квадратик (3.4). Рассмотрим ассоциированное с $\mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$ представление полиэдра (2.1), как описано в разделе 3 (см. теорему 3.5).

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $T_\Gamma \subset \mathbb{T}^m$ – подтор (5.1), задаваемый рациональной конфигурацией векторов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

(а) Отображение моментов $\mu_\Gamma : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathfrak{t}_\Gamma^*$ является собственным тогда и только тогда, когда его множество уровня $\mu_\Gamma^{-1}(\delta)$ ограничено для некоторого (а тогда и для любого) значения $\delta \in \mathfrak{t}_\Gamma^*$. Эквивалентно, отображение μ_Γ является собственным тогда и только тогда, когда двойственная конфигурация $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ удовлетворяет условию $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ для некоторых положительных чисел α_k .

(б) $\delta \in \mathfrak{t}_\Gamma^*$ является регулярным значением отображения моментов μ_Γ тогда и только тогда, когда пересечение квадратик $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) = \mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$ непусто и невырождено. Эквивалентно, δ является регулярным значением тогда и только тогда, когда ассоциированное представление полиэдра $P = P(A, \mathbf{b})$ является представлением общего положения.

(с) Действие тора T_Γ на $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) = \mathcal{Z}_{\Gamma, \delta}$ свободно тогда и только тогда, когда ассоциированный полиэдр P является дельзантовым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Если отображение μ_Γ является собственным, то множество $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) \subset \mathfrak{t}_\Gamma^*$ компактно, а значит, оно ограничено.

Пусть теперь $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) = \mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ ограничено для некоторого значения δ . Тогда соответствующий полиэдр P также ограничен. В силу следствия 2.9, это эквивалентно тому, что некоторая положительная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ обращается в нуль. Это условие не зависит от δ , и мы заключаем, что $\mu_\Gamma^{-1}(\delta)$ ограничено для любого δ . Пусть $X \subset \mathfrak{t}_\Gamma^*$ – компактное подмножество. Так как множество $\mu_\Gamma^{-1}(X)$ замкнуто, его компактность эквивалентна ограниченности. Согласно предложению 2.8, мы можем предполагать, что для любого $\delta \in X$ первая квадрака, задающая множество $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) = \mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$, имеет вид $\gamma_{11}|z_1|^2 + \dots + \gamma_{1m}|z_m|^2 = \delta_1$, где все γ_{1k} положительны: $\gamma_{1k} > 0$. Пусть $c = \max_{\delta \in X} \delta_1$. Тогда $\mu_\Gamma^{-1}(X)$ содержится в ограниченном множестве

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : \gamma_{11}|z_1|^2 + \dots + \gamma_{1m}|z_m|^2 \leq c\}$$

и потому ограничено. Итак, множество $\mu_\Gamma^{-1}(X)$ компактно, а отображение μ_Γ собственно.

(б) Первое утверждение – это определение регулярного значения. Второе утверждение уже доказано в теореме 3.3.

(с) Вначале опишем стабилизаторы действия тора T_Γ на $\mu_\Gamma^{-1}(\delta)$. Хотя тот факт, что эти стабилизаторы конечны для регулярного значения δ , вытекает из конструкции симплектической редукции, это можно доказать непосредственно.

Для данной точки $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ определим подрешетку

$$L_{\mathbf{z}} = \mathbb{Z}\langle \gamma_i : z_i \neq 0 \rangle \subset L = \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle.$$

ЛЕММА 5.4. *Стабилизатор точки $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ для действия тора T_Γ имеет вид $L_{\mathbf{z}}^*/L^*$. Кроме того, если пересечение квадрик $\mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ невырождено, то все стабилизаторы конечны, т. е. действие тора T_Γ на $\mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ почти свободно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элемент $(e^{2\pi i\langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, e^{2\pi i\langle \gamma_m, \varphi \rangle}) \in T_\Gamma$ оставляет данную точку $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{\Gamma}$ неподвижной тогда и только тогда, когда $e^{2\pi i\langle \gamma_k, \varphi \rangle} = 1$ при $z_k \neq 0$. Это условие эквивалентно тому, что $\langle \gamma_k, \varphi \rangle \in \mathbb{Z}$ при $z_k \neq 0$, т. е. $\varphi \in L_{\mathbf{z}}^*$. Так как $\varphi \in L^*$ отображается 1 $\in T_\Gamma$, стабилизатор точки \mathbf{z} действительно отождествляется с факторгруппой $L_{\mathbf{z}}^*/L^*$.

Предположим теперь, что пересечение $\mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ невырождено. Конечность факторгруппы $L_{\mathbf{z}}^*/L^*$ эквивалентно тому, что подрешетка $L_{\mathbf{z}} = \mathbb{Z}\langle \gamma_i : z_i \neq 0 \rangle \subset L$ имеет полный ранг $m - n$. Мы знаем, что этот ранг $\text{rk}\{\gamma_i : z_i \neq 0\}$ – это ранг матрицы градиентов квадрака (3.4) в точке \mathbf{z} . Так как пересечение $\mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ невырождено, этот ранг равен $m - n$, как требуется. Лемма доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 5.3, (с). Предположим, что полиэдр P является дельзантовым. В силу леммы 5.4, действие тора T_Γ на $\mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ является свободным тогда и только тогда, когда $L_{\mathbf{z}} = L$ для любой точки $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$. Пусть $i: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^m$ – вложение координатной подрешетки, порожденной теми базисными векторами \mathbf{e}_i , для которых $z_i = 0$, и пусть

$p: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^{m-k}$ – проекция, переводящая каждый такой вектор \mathbf{e}_i в нуль. Мы также имеем отображения решеток

$$\Gamma^t: L^* \rightarrow \mathbb{Z}^m, \quad \mathbf{l} \mapsto (\langle \gamma_1, \mathbf{l} \rangle, \dots, \langle \gamma_m, \mathbf{l} \rangle) \quad \text{и} \quad A: \mathbb{Z}^m \rightarrow N, \quad \mathbf{e}_k \mapsto \mathbf{a}_k.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & L^* & & & \\ & & & \downarrow \Gamma^t & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^k & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}^{m-k} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow A & & \\ & & & & N & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array} \quad (5.3)$$

в которой вертикальная и горизонтальная последовательности точны. Тогда условие дельзантовости эквивалентно тому, что композиция $A \cdot i$ является расщепимо инъективной. Условие $L_{\mathbf{z}} = L$ эквивалентно тому, что композиция $\Gamma \cdot p^*$ является сюръективной, т. е. $p \cdot \Gamma^t$ – расщепимо инъективно. Эти два условия эквивалентны в силу леммы 2.6. Теорема 5.3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть $P = P(A, \mathbf{b})$ – дельзантов многогранник, пусть $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ – двойственная по Гейлу конфигурация векторов, и пусть \mathcal{X}_P – соответствующее момент-угол-многообразие. Тогда:

- (а) $\delta = \Gamma \mathbf{b}$ есть регулярное значение отображения моментов $\mu_\Gamma: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathfrak{t}_\Gamma^*$ для гамильтонова действия тора $T_\Gamma \subset \mathbb{T}^m$ на \mathbb{C}^m ;
- (б) \mathcal{X}_P является регулярным множеством уровня $\mu_\Gamma^{-1}(\Gamma \mathbf{b})$;
- (в) действие тора T_Γ на многообразии \mathcal{X}_P свободно.

Таким образом, мы можем рассмотреть симплектическое факторпространства \mathbb{C}^m по действию тора T_Γ . Оно является компактным $2n$ -мерным симплектическим многообразием, которое мы обозначим через $V_P = \mathcal{X}_P/T_\Gamma$. На этом многообразии имеется “остаточное” гамильтоново действие факторгруппы \mathbb{T}^m/T_Γ – n -мерного тора. Из вертикальной точной последовательности в (5.3) следует, что тор \mathbb{T}^m/T_Γ канонически отождествляется с $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{S} = \mathbb{R}^n/N$, и мы будем обозначать его через T_N . Итак, мы получаем точную последовательность торов

$$1 \rightarrow T_\Gamma \rightarrow \mathbb{T}^m \xrightarrow{\exp A} T_N \rightarrow 1, \quad (5.4)$$

где $\exp A: \mathbb{T}^m \rightarrow T_N$ – отображение торов, соответствующее отображению решеток $A: \mathbb{Z}^m \rightarrow N$.

Симплектическое $2n$ -многообразие $V_P = \mathcal{Z}_P/T_\Gamma$ с гамильтоновым действием n -мерного тора $T_N = \mathbb{T}^m/T_\Gamma$ называется *гамильтоновым торическим многообразием*, соответствующим дельзантову многограннику P .

Обозначим через $\mu_V: V_P \rightarrow \mathfrak{t}_N^*$ отображение моментов для действия тора T_N на V_P , где $\mathfrak{t}_N = N_{\mathbb{R}}$ – алгебра Ли тора T_N . Двойственная алгебра Ли \mathfrak{t}_N^* естественно вкладывается как подпространство в \mathbb{R}^m (алгебру Ли тора \mathbb{T}^m), причем вложение задается отображением $A^t: \mathfrak{t}_N^* \cong \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Образ отображения моментов $\mu_V: V_P \rightarrow \mathfrak{t}_N^*$ является многогранником P с точностью до сдвига на вектор из \mathfrak{t}_N^* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – стандартная симплектическая форма на \mathbb{C}^m и $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – отображение моментов для стандартного действия тора \mathbb{T}^m (см. пример 5.1). Пусть $p: \mathcal{Z}_P \rightarrow V_P$ – проекция на факторпространство по действию тора T_Γ , и пусть $i: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{C}^m$ – вложение, так что симплектическая форма ω' на V_P удовлетворяет соотношению $p^*\omega' = i^*\omega$. Пусть $H_{\mathbf{e}_i}: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – гамильтониан действия тора \mathbb{T}^m на \mathbb{C}^m , соответствующий i -му базисному вектору \mathbf{e}_i (в явном виде, $H_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{z}) = |z_i|^2$), и пусть $H_{\mathbf{a}_i}: V_P \rightarrow \mathbb{R}$ – гамильтониан действия тора T_N на V_P , соответствующий вектору $\mathbf{a}_i \in \mathfrak{t}_N$. Обозначим через $X_{\mathbf{e}_i}$ векторное поле на \mathcal{Z}_P , порожденное вектором \mathbf{e}_i , и через $Y_{\mathbf{a}_i}$ векторное поле на V_P , порожденное вектором \mathbf{a}_i . Заметим, что $p_*X_{\mathbf{e}_i} = Y_{\mathbf{a}_i}$. Для любого векторного поля Z на \mathcal{Z}_P мы имеем

$$\begin{aligned} dH_{\mathbf{e}_i}(Z) &= i^*\omega(X_{\mathbf{e}_i}, Z) = p^*\omega'(X_{\mathbf{e}_i}, Z) \\ &= \omega'(Y_{\mathbf{a}_i}, p_*Z) = dH_{\mathbf{a}_i}(p_*Z) = d(p^*H_{\mathbf{a}_i})(Z), \end{aligned}$$

следовательно, $H_{\mathbf{e}_i} = p^*H_{\mathbf{a}_i}$ или $H_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{z}) = H_{\mathbf{a}_i}(p(\mathbf{z}))$ с точностью до константы. По определению отображения моментов это означает, что $\mu_V(V_P) \subset \mathfrak{t}_N^* \subset \mathbb{R}^m$ отождествляется с $\mu(\mathcal{Z}_P) \subset \mathbb{R}^m$ с точностью до сдвига на вектор из \mathbb{R}^m . Вложение $\mathfrak{t}_N^* \subset \mathbb{R}^m$ задается отображением A^t , а $\mu(\mathcal{Z}_P) = i_{A, \mathbf{b}}(P) = A^t(P) + \mathbf{b}$ по определению многообразия \mathcal{Z}_P , см. (3.1). Отсюда следует, что существует такой вектор $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, что

$$A^t(\mu_V(V_P)) + \mathbf{c} = A^t(P) + \mathbf{b},$$

т.е. $A^t(\mu_V(V_P))$ и $A^t(P)$ отличаются на вектор $\mathbf{b} - \mathbf{c} \in A^t(\mathfrak{t}_N^*)$. Так как A^t является мономорфизмом, мы получаем требуемый результат. Предложение доказано.

Мы описали, как построить гамильтоново торическое многообразие по дельзантову многограннику. Согласно теореме Дельзанта [22], *любое* $2n$ -мерное компактное связное симплектическое многообразие W с эффективным гамильтоновым действием n -мерного тора T эквивариантно симплектоморфно гамильтонову торическому многообразию V_P , где P – образ отображения моментов $\mu: W \rightarrow \mathfrak{t}^*$ (это объясняет название “дельзантов многогранник”).

ПРИМЕР 5.7. Рассмотрим случай $m - n = 1$, т.е. тор T_Γ одномерен и $\gamma_k \in \mathbb{R}$. По теореме 5.3, (а) отображение моментов μ_Γ является собственным при условии, что каждое из его множеств уровня

$$\mu_\Gamma^{-1}(\delta) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m: \gamma_1|z_1|^2 + \dots + \gamma_m|z_m|^2 = \delta\}$$

ограничено. По теореме 5.3, (b) число δ является регулярным значением тогда и только тогда, когда квадратичная гиперповерхность $\gamma_1|z_1|^2 + \dots + \gamma_m|z_m|^2 = \delta$ непуста и невырождена. Вместе эти два условия означают, что гиперповерхность является эллипсоидом, а ассоциированный полиэдр есть n -симплекс (см. пример 3.6). Согласно лемме 5.4, действие тора T_Γ на $\mu_\Gamma^{-1}(\delta)$ свободно тогда и только тогда, когда $L_{\mathbf{z}} = L$ для любого $\mathbf{z} \in \mu_\Gamma^{-1}(\delta)$. Это означает, что каждое γ_k порождает ту же решетку, что и все множество $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, что влечет $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$. Двойственная по Гейлу конфигурация удовлетворяет соотношению $\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$. Тогда T_Γ – диагональная окружность в \mathbb{T}^m , гиперповерхность $\mu_\Gamma^{-1}(\delta) = \mathcal{X}_P$ является сферой, а ассоциированный многогранник P – стандартным симплексом с точностью до сдвига и умножения на положительный множитель δ . Гамильтоново торическое многообразие $V_P = \mathcal{X}_P/T_\Gamma$ является комплексным пространством CP^n .

6. Вееры и торические многообразия

Торическое многообразие – это нормальное алгебраическое многообразие, на котором *алгебраический тор* $(\mathbb{C}^\times)^n$ действует с плотной (открытой по Зарискому) орбитой. Торические многообразия могут быть описаны в комбинаторно-геометрических терминах – при помощи рациональных вееро.

Торическое многообразие, соответствующее рациональному вееру, можно построить при помощи алгебраической версии симплектической редукции, известной также под названием “конструкция Кокса”. Различные версии этой конструкции появлялись в работах нескольких авторов с начала 1990-х годов. В нашем изложении мы в основном следуем работе Д. Кокса [18] (а также ее более современному изложению в [19; гл. 5]); взаимосвязи между торическими многообразиями и момент-угол-многообразиями будут исследованы в последующих разделах.

6.1. Конусы и вееры. Набор векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ задает *выпуклый полиэдральный конус*, или просто *конус*,

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq} \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle = \{ \mu_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{a}_k : \mu_i \in \mathbb{R}_{\geq} \}.$$

Векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ называются *образующими* конуса σ . *Минимальный* набор образующих конуса определен с точностью до умножения векторов на положительные числа. Конус называется *рациональным*, если его образующие можно выбрать из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Если σ – рациональный конус, то его образующие $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ обычно выбираются *примитивными*, т. е. каждый \mathbf{a}_i является наименьшим целочисленным вектором в определяемом им луче.

Конус называется *строго выпуклым*, если он не содержит прямых. Конус называется *симплициальным*, если он порожден частью базиса пространства \mathbb{R}^n , и *регулярным*, если он порожден частью базиса решетки \mathbb{Z}^n .

Конус σ является (неограниченным) полиэдром, и его *границы* определяются как пересечения с несущими гиперплоскостями. Каждая грань конуса сама является конусом. Если конус является строго выпуклым, то он имеет единственную вершину; в противном случае вершин нет. Минимальный набор образующих конуса состоит из ненулевых векторов вдоль его ребер.

Веером называется конечный набор $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ строго выпуклых конусов в некотором пространстве \mathbb{R}^n такой, что грань каждого конуса из Σ лежит в Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Веер Σ называется *рациональным* (соответственно *симплициальным* и *регулярным*), если все конусы из Σ рациональны (соответственно симплициальны и регулярны). Веер $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ называется *полным*, если $\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s = \mathbb{R}^n$.

Конусы в веере можно отделять гиперплоскостями.

ЛЕММА 6.1 (лемма об отделении). *Пусть σ и σ' – два конуса, пересечение которых является гранью каждого из них. Тогда существует общая несущая гиперплоскость H для σ и σ' такая, что*

$$\tau = \sigma \cap H = \sigma' \cap H.$$

Доказательство можно найти, например, в [29; § 1.2]. Чудесным образом это выпукло-геометрическое свойство отделимости переходит в топологическую отделимость (хаусдорфовость) алгебраических многообразий и топологических пространств, происходящих из вееров, как описано ниже.

Для данного симплициального веера Σ с t ребрами, порожденными векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, определим *ассоциированный симплициальный комплекс* \mathcal{K}_Σ на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$ как набор подмножеств $I \subset [m]$ таких, что векторы $\{\mathbf{a}_i : i \in I\}$ порождают конус из веера Σ .

Таким образом, симплициальный веер Σ в \mathbb{R}^n задается двумя данными:

- симплициальный комплекс \mathcal{K} на множестве $[m]$;
- набор векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ в \mathbb{R}^n такой, что поднабор $\{\mathbf{a}_i : i \in I\}$ является линейно независимым для любого симплекса $I \in \mathcal{K}$.

Тогда для каждого симплекса $I \in \mathcal{K}$ мы можем определить симплициальный конус σ_I , порожденный векторами \mathbf{a}_i с $i \in I$. Полученный набор конусов $\{\sigma_I : I \in \mathcal{K}\}$ склеивается в веер Σ тогда и только тогда, когда любые два конуса σ_I и σ_J пересекаются по общей грани (которая обязана быть конусом $\sigma_{I \cap J}$). Эквивалентно, относительные внутренности конусов σ_I должны быть попарно непересекающимися. При этом условии мы говорим, что данные $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ задают веер Σ .

Следующая конструкция сопоставляет полный веер каждому выпуклому многограннику.

КОНСТРУКЦИЯ 6.2 (нормальный веер). Пусть P – многогранник (2.1) с t гипергранями F_1, \dots, F_m и нормальными векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Для каждой грани $Q \subset P$ мы скажем, что вектор \mathbf{a}_i *нормален* к Q , если $Q \subset F_i$. Определим *нормальный* конус σ_Q как конус, порожденный всеми векторами \mathbf{a}_i , нормальными к Q . Он задается следующим образом:

$$\sigma_Q = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}' \rangle \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \text{ для всех } \mathbf{x}' \in Q \text{ и } \mathbf{x} \in P\}.$$

Тогда

$$\Sigma_P = \{\sigma_Q : Q \text{ – грань в } P\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

является полным веером, называемым *нормальным веером* многогранника P . Если $\mathbf{0}$ содержится во внутренности многогранника P , то веер Σ_P может быть описан как набор конусов над гранями полярного многогранника P^* .

Нормальный веер Σ_P является симплициальным тогда и только тогда, когда многогранник P простой. В этом случае конусы веера Σ_P порождены подмножествами векторов $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}\}$, для которых пересечение $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ соответствующих гиперграней непусто. Ассоциированный симплициальный комплекс \mathcal{K}_{Σ_P} геометрически описывается как граница полярного симплициального многогранника P^* .

Нормальный веер Σ_P многогранника P содержит информацию о нормалях к гиперграням (это – образующие \mathbf{a}_i ребер веера Σ_P) и о комбинаторной структуре многогранника P (какие из наборов векторов \mathbf{a}_i порождают конусы в Σ_P , определяется тем, пересечения каких гиперграней образуют грани), но скаляры b_i в (2.1) теряются при переходе к нормальному вееру. Не любой полный веер может быть получен путем “забывания чисел b_i ” в представлении многогранника неравенствами, т. е. не любой полный веер является нормальным. Это неверно даже для регулярных вееров в \mathbb{R}^3 , см. пример в [29; § 1.5]. Более того, полные симплициальные вееры и симплициальные многогранники отличаются даже как комбинаторные объекты: существуют полные симплициальные вееры Σ , для которых ассоциированный симплициальный комплекс \mathcal{K}_Σ нельзя получить как границу некоторого симплициального многогранника (хотя примеры таких регулярных вееров не известны).

6.2. Торические многообразия. *Алгебраический тор* – это коммутативная комплексная алгебраическая группа, изоморфная произведению $(\mathbb{C}^\times)^n$ экземпляров мультипликативной группы $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Алгебраический тор содержит компактный тор T^n в качестве подгруппы Ли (но не алгебраической подгруппы). Мы будем часто отождествлять алгебраический тор со стандартной моделью $(\mathbb{C}^\times)^n$.

Торическим многообразием называется нормальное комплексное алгебраическое многообразие V , содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ в качестве открытого по Зарискому подмножества таким образом, что естественное действие тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ на себе продолжается до действия на многообразии V .

Таким образом, тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ действует на V с плотной орбитой.

Алгебраическая геометрия торических многообразий полностью переводится на язык выпуклой и комбинаторной геометрии. А именно, имеется взаимно однозначное соответствие между рациональными веерами в n -мерном пространстве и n -мерными торическими многообразиями. При этом

конусы \longleftrightarrow аффинные многообразия,
 полные вееры \longleftrightarrow компактные (полные) многообразия,
 нормальные вееры многогранников \longleftrightarrow проективные многообразия,
 регулярные вееры \longleftrightarrow неособые многообразия,
 симплициальные вееры \longleftrightarrow орбиобразия.

Это классическое соответствие описано во многих стандартных текстах по торической геометрии, см., например, [20], [29] или [19]. Наряду с классической конструкцией имеется альтернативный способ определять торические многообразия: как факторпространства открытого подмножества в \mathbb{C}^m (дополнения

конфигурации координатных подпространств) по действию коммутативной алгебраической группы (произведения алгебраического тора и конечной группы).

6.3. Факторпространства в алгебраической геометрии. Определение факторпространств для действий алгебраических групп на алгебраических многообразиях наталкивается на трудности как топологического, так и алгебраического характера. Во-первых, так как алгебраические группы некомпактны (как алгебраические торы), их орбиты могут быть незамкнутыми, а пространства орбит – не хаусдорфовыми. Во-вторых, даже если пространство орбит является хаусдорфовым как топологическое пространство, оно может не быть алгебраическим многообразием. Эти трудности могут быть преодолены до некоторой степени при помощи понятия категорного факторпространства.

Пусть X – алгебраическое многообразие с действием аффинной алгебраической группы G . Алгебраическое многообразие Y называется *категорным факторпространством* многообразия X по действию группы G , если существует морфизм алгебраических многообразий $\pi: X \rightarrow Y$, который постоянен на G -орбитах многообразия X и обладает следующим универсальным свойством: для любого морфизма $\varphi: X \rightarrow Z$, постоянного на G -орбитах, существует единственный морфизм $\hat{\varphi}: Y \rightarrow Z$ такой, что $\hat{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Это описывается диаграммой

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow \pi & \nearrow \hat{\varphi} \\ & Y & \end{array}$$

Категорное факторпространство Y единственно с точностью до изоморфизма, и мы будем обозначать его $X//G$ (хотя иногда это обозначение используется для категорных факторпространств с дополнительными хорошими свойствами).

Предположим теперь, что $X = \text{Spec } A$ – аффинное многообразие, где $A = \mathbb{C}[X]$ – алгебра регулярных функций на X , а G – алгебраический тор (на самом деле эта конструкция работает для любой *редуктивной* аффинной алгебраической группы). Тогда подалгебра $\mathbb{C}[X]^G$, состоящая из G -инвариантных функций (т. е. функций f , удовлетворяющих условию $f(gx) = f(x)$ для любых $g \in G$ и $x \in X$) конечно порождена, и соответствующее аффинное многообразие $\text{Spec } \mathbb{C}[X]^G$ является категорным факторпространством $X//G$. Морфизм факторизации $\pi: X \rightarrow X//G$ двойствен к вложению алгебр $\mathbb{C}[X]^G \rightarrow \mathbb{C}[X]$. Морфизм π сюръективен и индуцирует взаимно однозначное соответствие между точками многообразия $X//G$ и *замкнутыми* G -орбитами в X (т. е. прообраз $\pi^{-1}(x)$ любой точки $x \in X//G$ содержит единственную замкнутую G -орбиту, см. [19; предложение 5.0.7]).

Таким образом, если все G -орбиты аффинного многообразия X замкнуты, то категорное факторпространство $X//G$ отождествляется, как топологическое пространство, с обычным “топологическим” факторпространством X/G . В алгебраической геометрии факторпространства такого типа называются *геометрическими* и обозначаются через X/G .

ПРИМЕР 6.3. Рассмотрим действие группы \mathbb{C}^\times на $\mathbb{C} = \text{Spec}(\mathbb{C}[z])$ умножениями на скаляры. Имеется две орбиты: замкнутая орбита 0 и открытая орбита \mathbb{C}^\times . Топологическое пространство орбит $\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times$ состоит из двух точек, одна из которых незамкнута, так что это пространство не хаусдорфово.

С другой стороны, категорное факторпространство $\mathbb{C}/\mathbb{C}^\times = \text{Spec}(\mathbb{C}[z]^{\mathbb{C}^\times})$ это одна точка, так как любой \mathbb{C}^\times -инвариантный многочлен является константой (и имеется всего одна замкнутая орбита).

Аналогично, если группа \mathbb{C}^\times действует на $\mathbb{C}^n = \text{Spec}(\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n])$ диагонально, то инвариантный многочлен удовлетворяет условию $f(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n) = f(z_1, \dots, z_n)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Такой многочлен является константой, так что $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}^\times$ – снова одна точка.

В хороших случаях категорные факторпространства более общих (неаффинных) многообразий X могут быть построены путем “склейки из частей” следующим образом. Пусть группа G действует на X и $\pi: X \rightarrow Y$ – морфизм многообразий, постоянный на G -орбитах. Предположим, что многообразие Y имеет аффинное покрытие $Y = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ со следующими свойствами: все прообразы $\pi^{-1}(V_{\alpha})$ являются аффинными многообразиями, и каждое многообразие V_{α} является категорным факторпространством (т.е. $\pi|_{\pi^{-1}(V_{\alpha})}: \pi^{-1}(V_{\alpha}) \rightarrow V_{\alpha}$ – морфизм, двойственный к вложению алгебр $\mathbb{C}[\pi^{-1}(V_{\alpha})]^G \rightarrow \mathbb{C}[V_{\alpha}]$). Тогда многообразие Y является категорным факторпространством $X//G$.

ПРИМЕР 6.4. Пусть группа \mathbb{C}^\times действует на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ диагонально, где $\mathbb{C}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[z_0, z_1])$. Мы имеем аффинное покрытие $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} = U_0 \cup U_1$, где

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathbb{C}^2 \setminus \{z_0 = 0\} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} = \text{Spec}(\mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1]), \\ U_1 &= \mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = 0\} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times = \text{Spec}(\mathbb{C}[z_0, z_1^{\pm 1}]), \\ U_0 \cap U_1 &= \mathbb{C}^2 \setminus \{z_0 z_1 = 0\} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times = \text{Spec}(\mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1^{\pm 1}]). \end{aligned}$$

Алгебры \mathbb{C}^\times -инвариантных функций суть

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1]^{\mathbb{C}^\times} &= \mathbb{C}[z_1/z_0], \quad \mathbb{C}[z_0, z_1^{\pm 1}]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[z_0/z_1], \\ \mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1^{\pm 1}]^{\mathbb{C}^\times} &= \mathbb{C}[(z_1/z_0)^{\pm 1}]. \end{aligned}$$

Многообразия $V_i = U_i/\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}$ склеиваются вдоль $V_0 \cap V_1 = (U_0 \cap U_1)/\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^\times$ стандартным образом, и в результате получается проективная прямая $\mathbb{C}P^1$. При этом все \mathbb{C}^\times -орбиты в $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ замкнуты, так что $\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ является геометрическим факторпространством.

Аналогично, проективное пространство $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ является геометрическим факторпространством диагонального действия группы \mathbb{C}^\times .

ПРИМЕР 6.5. Пусть теперь группа \mathbb{C}^\times действует на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ следующим образом: $\lambda \cdot (z_0, z_1) = (\lambda z_0, \lambda^{-1} z_1)$. Используя аффинное покрытие многообразия $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ из предыдущего примера, мы получаем следующие алгебры \mathbb{C}^\times -инвариантных функций:

$$\mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[z_0 z_1], \quad \mathbb{C}[z_0, z_1^{\pm 1}]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[z_0 z_1], \quad \mathbb{C}[z_0^{\pm 1}, z_1^{\pm 1}]^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{C}[(z_0 z_1)^{\pm 1}].$$

В этом случае склейка многообразий $V_i = U_i // \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}$ вдоль $V_0 \cap V_1 = (U_0 \cap U_1) // \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^\times$ дает пространство, получаемое из двух экземпляров пространства \mathbb{C} отождествлением всех ненулевых точек. Это пространство не хаусдорфово (два нуля не имеют непересекающихся окрестностей в обычной топологии), и поэтому оно не может быть категорным факторпространством, так как алгебраические многообразия хаусдорфовы в обычной топологии.

Далее торическое многообразие V_Σ будет описано как категорное (а в хороших случаях – геометрическое) факторпространство “тотального пространства” $U(\Sigma)$ по действию коммутативной алгебраической группы G . Мы начнем с описания группы G и пространства $U(\Sigma)$.

6.4. Факторконструкция торических многообразий. Следуя алгебраической традиции, здесь мы будем использовать бескоординатные обозначения. Фиксируем решетку N ранга n и обозначим через $N_{\mathbb{R}}$ ее объемлющее n -мерное вещественное пространство $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$. Мы также введем алгебраический тор $\mathbb{C}_N^\times = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$.

Пусть Σ – рациональный веер в пространстве $N_{\mathbb{R}}$ с m ребрами, порожденными примитивными векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ из решетки N . Мы будем предполагать, что $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ порождают все пространство $N_{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим отображение решеток $A: \mathbb{Z}^m \rightarrow N$, переводящее i -й базисный вектор из \mathbb{Z}^m в $\mathbf{a}_i \in N$. Соответствующее отображение алгебраических торов

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times: (\mathbb{C}^\times)^m \rightarrow \mathbb{C}_N^\times$$

сюръективно. Мы будем обозначать его через $\exp A$.

Определим группу $G = G_\Sigma$ как ядро отображения $\exp A$. Таким образом, имеется точная последовательность алгебраических групп

$$1 \rightarrow G \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^m \xrightarrow{\exp A} \mathbb{C}_N^\times \rightarrow 1. \quad (6.1)$$

В явном виде группа G задается следующим образом:

$$G = \left\{ (z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m : \prod_{i=1}^m z_i^{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u} \rangle} = 1 \text{ для всех } \mathbf{u} \in N^* \right\}. \quad (6.2)$$

Группа G изоморфна произведению тора $(\mathbb{C}^\times)^{m-n}$ и конечной абелевой группы. Если Σ – регулярный веер, содержащий хотя бы один n -мерный конус, то $G \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n}$.

Для данного конуса $\sigma \in \Sigma$ положим $g(\sigma) = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$, если конус σ порождается векторами $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$. Определим симплициальный комплекс \mathcal{K}_Σ , порожденный всеми подмножествами $g(\sigma) \subset [m]$:

$$\mathcal{K}_\Sigma = \{I: I \subset g(\sigma) \text{ для некоторого } \sigma \in \Sigma\}.$$

Если Σ – симплициальный веер, то каждое подмножество $I \subset g(\sigma)$ есть $g(\tau)$ для некоторого конуса $\tau \in \Sigma$, и мы получаем “ассоциированный симплициальный комплекс” веера Σ , определенный в начале этого раздела. Если Σ является

нормальным веером непростого многогранника P (т. е. веером над гранями полярного многогранника P^*), то комплекс \mathcal{K}_Σ получается заменой каждой грани многогранника ∂P^* на симплекс с тем же множеством вершин.

Теперь определим пространство $U(\Sigma)$ как дополнение набора координатных подпространств в \mathbb{C}^m , задаваемого комплексом \mathcal{K}_Σ :

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}_\Sigma} \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}. \quad (6.3)$$

Заметим, что множество $U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$ зависит лишь от комбинаторной структуры веера Σ , в то время как подгруппа $G \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ определяется геометрическими данными – примитивными образующими одномерных конусов.

Подмножество $U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$ инвариантно относительно покоординатного действия тора $(\mathbb{C}^\times)^m$, и мы получаем действие группы G на $U(\Sigma)$ путем ограничения.

ТЕОРЕМА 6.6 (Д. Кокс [18; теорема 2.1]). *Предположим, что одномерные конусы веера Σ порождают все пространство $N_{\mathbb{R}}$. Тогда:*

(а) *торическое многообразие V_Σ естественно изоморфно категорному факторпространству $U(\Sigma)//G$;*

(б) *многообразие V_Σ является геометрическим факторпространством $U(\Sigma)/G$ тогда и только тогда, когда веер Σ симплициален.*

Тор, действующий на $V_\Sigma = U(\Sigma)//G$, – это факторгруппа $\mathbb{C}_N^\times = (\mathbb{C}^\times)^m/G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. (а) *Если Σ – симплициальный веер, то действие группы G на $U(\Sigma)$ почти свободно.*

(б) *Если Σ – регулярный веер, то действие группы G на $U(\Sigma)$ свободно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стабилизатор точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$ под действием группы $(\mathbb{C}^\times)^m$ есть

$$(\mathbb{C}^\times)^{\omega(\mathbf{z})} = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m : t_i = 1 \text{ при } z_i \neq 0\},$$

где $\omega(\mathbf{z})$ – множество нулевых координат точки \mathbf{z} . Стабилизатор точки \mathbf{z} для действия группы G есть $G_{\mathbf{z}} = (\mathbb{C}^\times)^{\omega(\mathbf{z})} \cap G$. Так как G есть ядро отображения $\exp A: (\mathbb{C}^\times)^m \rightarrow \mathbb{C}_N^\times$, индуцированного отображением решеток $\mathbb{Z}^m \rightarrow N$, подгруппа $G_{\mathbf{z}}$ есть ядро композиции

$$(\mathbb{C}^\times)^{\omega(\mathbf{z})} \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^m \xrightarrow{\exp A} \mathbb{C}_N^\times. \quad (6.4)$$

Этот гомоморфизм торов индуцирован отображением решеток $\mathbb{Z}^{\omega(\mathbf{z})} \rightarrow \mathbb{Z}^m \rightarrow N$, где $\mathbb{Z}^{\omega(\mathbf{z})} \rightarrow \mathbb{Z}^m$ – вложение координатной подрешетки.

Пусть Σ – симплициальный веер и $\mathbf{z} \in U(\Sigma)$. Тогда $\omega(\mathbf{z}) = g(\sigma)$ для некоторого конуса $\sigma \in \Sigma$. В частности, набор примитивных образующих $\{\mathbf{a}_i : i \in \omega(\mathbf{z})\}$ является линейно независимым. Следовательно, отображение $\mathbb{Z}^{\omega(\mathbf{z})} \rightarrow \mathbb{Z}^m \rightarrow N$, переводящее \mathbf{e}_i в \mathbf{a}_i , является мономорфизмом. Отсюда следует, что ядро отображения (6.4) является конечной группой.

Если же веер Σ является регулярным, то набор $\{\mathbf{a}_i : i \in \omega(\mathbf{z})\}$ является частью базиса решетки N . В этом случае отображение (6.4) является мономорфизмом и $G_{\mathbf{z}} = \{1\}$. Предложение доказано.

Алгебраическая факторконструкция многообразия V_Σ и конструкция многообразия V_P на основе симплектической редукции, описанная в предыдущем разделе, связаны следующим образом. Пусть P – дельзантов многогранник, задаваемый неравенствами (2.1). Тогда условие Дельзанта означает в точности, что нормальный веер Σ_P регулярен. Торы из точной последовательности (5.4) являются максимальными компактными подгруппами алгебраических торов из (6.1). Кроме того, из предложения 3.2 следует, что множество уровня $\mu_G^{-1}(\Gamma\mathbf{b})$ (момент-угол-многообразие \mathcal{X}_P) содержится в $U(\Sigma_P)$.

ТЕОРЕМА 6.8. Пусть P – дельзантов многогранник с нормальным веером Σ_P . Пусть V_P – соответствующее гамильтоново торическое многообразие, а V_{Σ_P} – соответствующее неособое проективное торическое многообразие. Вложение $\mathcal{X}_P \subset U(\Sigma_P)$ индуцирует диффеоморфизм

$$V_P = \mathcal{X}_P/T_\Gamma \xrightarrow{\cong} U(\Sigma_P)/G = V_{\Sigma_P}.$$

Следовательно, любое неособое проективное торическое многообразие может быть получено как симплектическое факторпространство пространства \mathbb{C}^m по действию $(m - n)$ -мерного тора.

Доказательство можно найти в [3; предложение VI.3.1.1] или [33; приложение 2]; мы также дадим доказательство более общего утверждения в разделе 10.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вложения многообразия V_{Σ_P} в проективное пространство соответствуют решеточным дельзантовым многогранникам P , т.е. дельзантовым многогранникам с вершинами в решетке N . Каждое такое вложение задает на V_{Σ_P} симплектическую структуру, индуцированную из проективного пространства. Можно показать (см. [33; приложение 2]), что диффеоморфизм из теоремы 6.8 сохраняет класс когомологий симплектической формы или, эквивалентно, симплектические структуры на V_P и V_{Σ_P} являются T_N -эквивариантно симплектоморфными.

ПРИМЕР 6.9. Пусть V_σ – аффинное торическое многообразие, соответствующее n -мерному симплицальному конусу σ . Мы имеем $V_\sigma = V_\Sigma$, где Σ – симплицальный веер, состоящий из всех граней конуса σ . Тогда $m = n$, $U(\Sigma) = \mathbb{C}^n$ и $A: \mathbb{Z}^n \rightarrow N$ – мономорфизм на решетку полного ранга, порожденную векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Следовательно, G – конечная группа и $V_\sigma = \mathbb{C}^n/G = \text{Спек } \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^G$.

В частности, если мы рассмотрим конус σ , порожденный векторами $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_2 в \mathbb{R}^2 , то G есть группа \mathbb{Z}_2 , вложенная как $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ в $(\mathbb{C}^\times)^2$. Факторконструкция реализует квадратичный конус

$$V_\sigma = \text{Спек } \mathbb{C}[z_1, z_2]^G = \text{Спек } \mathbb{C}[z_1^2, z_1 z_2, z_2^2] = \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3: v^2 = uw\}$$

как факторпространство \mathbb{C}^2 по действию группы \mathbb{Z}_2 .

ПРИМЕР 6.10. Пусть Σ – полный веер в \mathbb{R}^2 с тремя максимальными конусами: $\sigma_0 = \mathbb{R}_{\geq}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq}(\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ и $\sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$. Тогда \mathcal{H}_Σ есть граница треугольника, т.е. единственным не-симплексом является множество $\{1, 2, 3\}$. Следовательно,

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z_1 = z_2 = z_3 = 0\} = \mathbb{C}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Подгруппа G , задаваемая формулой (6.2), есть диагональная подгруппа \mathbb{C}^\times в $(\mathbb{C}^\times)^3$. Следовательно, $V_\Sigma = U(\Sigma)/G = \mathbb{C}P^2$. Так как Σ является нормальным веером стандартного 2-симплекса, эта конструкция согласуется с симплектическим факторпространством $V_P = \mathcal{Z}_P/T_G$ из примера 5.7.

ПРИМЕР 6.11. Рассмотрим веер Σ в \mathbb{R}^2 с тремя одномерными конусами, порожденными векторами \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Этот веер не является полным, но его одномерные конусы порождают все \mathbb{R}^2 , так что мы можем применить теорему 6.6. Симплициальный комплекс \mathcal{K}_Σ состоит из 3 отдельных точек. Пространство $U(\Sigma)$ есть дополнение до 3 координатных прямых в \mathbb{C}^3 :

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^3 \setminus (\{z_1 = z_2 = 0\} \cup \{z_1 = z_3 = 0\} \cup \{z_2 = z_3 = 0\}).$$

Группа G есть диагональ \mathbb{C}^\times в $(\mathbb{C}^\times)^3$. Следовательно, $V_\Sigma = U(\Sigma)/G$ – это квазипроективное многообразие, получаемое удалением трех точек из $\mathbb{C}P^2$.

7. Момент-угол-комплексы и полиэдральные произведения

Для каждого простого многогранника $P = P(A, \mathbf{b})$, заданного неравенствами (2.1), мы определили момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_P = \mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}}$ из диаграммы (3.1) или, эквивалентно, как пересечение квадрик (3.2). Здесь, используя комбинаторное разложение многогранника P на кубы, мы представим многообразие \mathcal{Z}_P в виде объединения произведений $(D^2)^I \times (S^1)^{[m] \setminus I}$ дисков и окружностей, параметризованных симплексами I в ассоциированном симплициальном комплексе $\mathcal{K}_P = \partial P^*$. Эта конструкция может быть обобщена на произвольные симплициальные комплексы \mathcal{K} , что приводит к понятию *момент-угол-комплекса* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. В нашем описании момент-угол-комплексов в этом разделе мы следуем работе [13] (а также более детальному изложению в [14]).

Основным строительным блоком в “момент-угол-разложении” пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является пара (D^2, S^1) , состоящая из диска и окружности, и вся конструкция естественно обобщается на произвольные пары пространств (X, A) . Получаемый комплекс $(X, A)^{\mathcal{K}}$ стал известен как “полиэдральное произведение” над симплициальным комплексом \mathcal{K} ; эта терминология была предложена Уильямом Браудером, см. [4]. Многие пространства, изучаемые в торической топологии, допускают разложения в полиэдральные произведения.

Конструкция момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и его обобщения – полиэдрального произведения $(X, A)^{\mathcal{K}}$ весьма естественна и обладает замечательными функториальными свойствами. Одним из основных таких свойств является то, что конструкция момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является функтором из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений. Если \mathcal{K} является триангуляцией сферы, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является многообразием, и наиболее важные геометрические примеры возникают именно таким образом.

Другим важным аспектом теории момент-угол-комплексов является ее взаимосвязь с конфигурациями координатных подпространств и их дополнениями. Эти дополнения уже появлялись у нас как “тотальные пространства” $U(\Sigma)$ в алгебраической факторконструкции торических многообразий, рассмотренной в предыдущем разделе. Конфигурации подпространств и их дополнения

также играют важную роль в теории особенностей и, с недавнего времени, в теории шарнирных механизмов и планировании движений роботов. Конфигурации координатных подпространств в \mathbb{C}^m взаимно однозначно соответствуют симплициальным комплексам \mathcal{K} на множестве $[m]$, а дополнение такой конфигурации подпространств гомотопически эквивалентно соответствующему момент-угол-комплексу $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ (см. [13; теорема 5.2.5] и теорему 7.12 ниже).

7.1. Кубические разбиения.

КОНСТРУКЦИЯ 7.1 (кубическое разбиение простого многогранника). Пусть P – простой n -многогранник с m гипергранями F_1, \dots, F_m . Мы построим кусочно линейное вложение многогранника P в стандартный единичный куб $\mathbb{I}^m \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ и тем самым индуцируем кубическое разбиение $\mathcal{C}(P)$ многогранника P прообразами граней куба \mathbb{I}^m .

Обозначим через \mathcal{S} множество барицентров всех граней многогранника P , включая вершины и барицентр всего многогранника. Это будет множеством вершин кубического разбиения $\mathcal{C}(P)$. Каждая $(n - k)$ -мерная грань G многогранника P есть пересечение k гиперграней: $G = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$. Мы отобразим барицентр грани G в вершину $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \mathbb{I}^m$, где $\varepsilon_i = 0$ при $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$ и $\varepsilon_i = 1$ в противном случае. Получаемое отображение $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{I}^m$ может быть продолжено линейно на симплексах барицентрического подразделения многогранника P до вложения $c_P: P \rightarrow \mathbb{I}^m$. Случай $n = 2, m = 3$ показан на рис. 7.1.

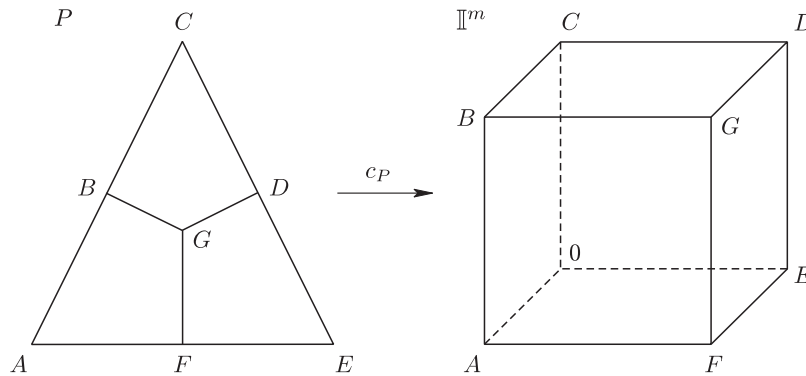


Рис. 7.1. Вложение $c_P: P \rightarrow \mathbb{I}^m$ при $n = 2, m = 3$

Каждая грань куба \mathbb{I}^m имеет вид

$$C_{JCI} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{I}^m : y_j = 0 \text{ при } j \in J, y_j = 1 \text{ при } j \notin J\},$$

где $J \subset I$ – пара вложенных (возможно, пустых) подмножеств в $[m]$. Для упрощения обозначений мы также положим

$$C_I = C_{\emptyset CI} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{I}^m : y_j = 1 \text{ при } j \notin I\}.$$

Образ $c_P(P) \subset \mathbb{I}^m$ есть объединение всех граней $C_{J \subset I}$, для которых $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Для каждой такой грани куба $C_{J \subset I}$ прообраз $c_P^{-1}(C_{J \subset I})$ является гранью кубического комплекса $\mathcal{C}(P)$. Множество вершин грани $c_P^{-1}(C_{J \subset I})$ есть подмножество в \mathcal{S} , состоящее из барицентров всех граней между гранями G и H многогранника P , где $G = \bigcap_{j \in J} F_j$ и $H = \bigcap_{i \in I} F_i$. Следовательно, грани кубического

комплекса $\mathcal{C}(P)$ соответствуют парам вложенных граней $G \supset H$ многогранника P , и мы будем обозначать их через $C_{G \supset H}$. В частности, максимальные (n -мерные) грани в $\mathcal{C}(P)$ соответствуют парам $G = P$, $H = v$, где v – вершина многогранника P . Для максимальных граней мы будем использовать сокращенное обозначение $C_v = C_{P \supset v}$.

Для любой вершины $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \in P$ с $I_v = \{i_1, \dots, i_n\}$ мы имеем

$$c_P(C_v) = C_{I_v} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{I}^m : y_j = 1 \text{ при } v \notin F_j\}. \quad (7.1)$$

Итак, мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Простой многогранник P с t гипергранями допускает кубическое разбиение, максимальные грани C_v которого соответствуют вершинам $v \in P$. Получаемый кубический комплекс $\mathcal{C}(P)$ канонически вкладывается в куб \mathbb{I}^m , в соответствии с формулой (7.1).*

7.2. Момент-угол-комплексы. Отображение $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m$ (см. выше пример 5.1) отождествляет единичный куб $\mathbb{I}^m \subset \mathbb{R}_{\geq}^m$ с пространством орбит единичного полидиска

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i| \leq 1\}$$

по стандартному действию тора \mathbb{T}^m .

Теперь мы определим пространство $\widetilde{\mathcal{Z}}_P$ из диаграммы, аналогичной диаграмме (3.1) (из определения многообразия $\mathcal{Z}_P = \mathcal{Z}_{A, \mathbf{b}}$), в которой нижнее отображение заменено на $c_P: P \rightarrow \mathbb{I}^m$:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{Z}}_P & \xrightarrow{\tilde{i}_z} & \mathbb{D}^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{c_P} & \mathbb{I}^m \end{array} \quad (7.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Пространство $\widetilde{\mathcal{Z}}_P$ гомеоморфно момент-угол-многообразию \mathcal{Z}_P , причем гомеоморфизм является \mathbb{T}^m -эquivариантным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано в предложении 4.2, многообразии \mathcal{Z}_P эквивариантно гомеоморфно факторпространству

$$P \times \mathbb{T}^m / \sim, \quad \text{где } (\mathbf{x}, \mathbf{t}_1) \sim (\mathbf{x}, \mathbf{t}_2) \text{ при } \mathbf{t}_1^{-1} \mathbf{t}_2 \in \mathbb{T}^{I_{\mathbf{x}}}.$$

Ограничивая отношение эквивалентности (4.1) на $\mathbb{D}^m \subset \mathbb{C}^m$, мы получаем

$$\mathbb{D}^m \cong \mathbb{I}^m \times \mathbb{T}^m / \sim, \quad \text{где } (\mathbf{y}, \mathbf{t}_1) \sim (\mathbf{y}, \mathbf{t}_2) \text{ при } \mathbf{t}_1^{-1} \mathbf{t}_2 \in \mathbb{T}^{\omega(\mathbf{y})}.$$

Как и при доказательстве предложения 4.2, пространство $\widetilde{\mathcal{Z}}_P$ отождествляется с факторпространством $c_P(P) \times \mathbb{T}^m / \sim$. Под действием отображения c_P точка $\mathbf{x} \in P$ переходит в точку $\mathbf{y} \in \mathbb{I}^m$ с $I_{\mathbf{x}} = \omega(\mathbf{y}) = \{i \in [m] : \mathbf{x} \in F_i\}$. Таким образом, оба пространства \mathcal{Z}_P и $\widetilde{\mathcal{Z}}_P$ эквивариантно гомеоморфны факторпространству $P \times \mathbb{T}^m / \sim$. Предложение доказано.

Далее мы не будем различать пространства \mathcal{Z}_P и $\widetilde{\mathcal{Z}}_P$ и будем рассматривать отображения i_Z и \tilde{i}_Z из (3.1) и (7.2) как различные вложения одного многообразия \mathcal{Z}_P в \mathbb{C}^m (первое из них является гладким, а второе – нет).

Для данной вершины $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \in P$ рассмотрим ограничение отображения $\tilde{i}_Z: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{D}^m$ на подмножество $C_v \times \mathbb{T}^m / \sim \subset P \times \mathbb{T}^m / \sim = \mathcal{Z}_P$:

$$\begin{aligned} \tilde{i}_Z(C_v \times \mathbb{T}^m / \sim) &= c_P(C_v) \times \mathbb{T}^m / \sim = C_{I_v} \times \mathbb{T}^m / \sim = \mu^{-1}(C_{I_v}) \\ &= \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{D}^m : |z_j|^2 = 1 \text{ при } v \notin F_j\}. \end{aligned}$$

Так как $P = \bigcup_v C_v$, мы получаем

$$\tilde{i}_Z(\mathcal{Z}_P) = \bigcup_v \mu^{-1}(C_{I_v}).$$

Заметим, что $\mu^{-1}(C_{I_v})$ есть произведение $|I_v| = n$ дисков и $m - n$ окружностей. Так как $\mu^{-1}(C_I) \cap \mu^{-1}(C_J) = \mu^{-1}(C_{I \cap J})$ для любых подмножеств $I, J \subset [m]$, мы можем переписать предыдущую формулу следующим образом:

$$\tilde{i}_Z(\mathcal{Z}_P) = \bigcup_{I \in \mathcal{H}_P} \mu^{-1}(C_I), \quad (7.3)$$

где

$$\mathcal{H}_P = \{I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m] : F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset\}$$

есть граница полярного симплицального многогранника P^* .

Представление (7.3) многообразия \mathcal{Z}_P в виде объединения произведений дисков и окружностей может быть обобщено на произвольные симплицальные комплексы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Пусть \mathcal{K} – симплицальный комплекс на множестве $[m]$. Мы всегда предполагаем, что $\emptyset \in \mathcal{K}$. *Момент-угол-комплекс*, соответствующий симплицальному комплексу \mathcal{K} , есть пространство

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} B_I, \quad (7.4)$$

где

$$B_I = \mu^{-1}(C_I) = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{D}^m : |z_j|^2 = 1 \text{ при } j \notin I\}.$$

При этом объединение (7.4) берется внутри полидиска \mathbb{D}^m . Топологически, каждое множество B_I есть произведение $|I|$ дисков D^2 и $m - |I|$ окружностей S^1 . Таким образом, мы можем переписать (7.4) как следующее разложение пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в объединение произведений дисков и окружностей:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1 \right). \quad (7.5)$$

Далее мы будем обозначать множество B_I через $(D^2, S^1)^I$.

Соотношение (7.3) выражает тот факт, что отображение $\tilde{i}_Z: \mathcal{L}_P \rightarrow \mathbb{D}^m$ отождествляет момент-угол-многообразие \mathcal{L}_P с момент-угол-комплексом $\mathcal{L}_{\mathcal{K}_P}$, соответствующим симплициальному комплексу $\mathcal{K}_P = \partial P^*$.

Призрачная вершина комплекса \mathcal{K} – это одноэлементное подмножество $\{i\} \in [m]$, которое не лежит в \mathcal{K} (т.е. не является вершиной). Так как гиперграни простого многогранника P соответствуют вершинам комплекса \mathcal{K}_P , естественно добавить к \mathcal{K}_P по одной призрачной вершине для каждого лишнего неравенства в представлении (2.1).

ПРИМЕР 7.5. 1. Пусть $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$ – полный симплекс (симплициальный комплекс, состоящий из всех подмножеств в $[m]$). Тогда $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mathbb{D}^m$.

2. Пусть \mathcal{K} – симплициальный комплекс на множестве $[m]$, и пусть \mathcal{K}° – комплекс на множестве $[m+1]$, полученный добавлением одной призрачной вершины $\circ = \{m+1\}$ к \mathcal{K} . Тогда в разложении (7.4) для $\mathcal{L}_{\mathcal{K}^\circ}$ каждое подмножество B_I содержит множитель S^1 по последней координате и

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}^\circ} = \mathcal{L}_{\mathcal{K}} \times S^1.$$

В случае $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ это согласуется с предложением 4.3, (b).

В частности, если \mathcal{K} – “пустой” симплициальный комплекс на множестве $[m]$, состоящий только из пустого симплекса \emptyset , то $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mu^{-1}(1, \dots, 1) = \mathbb{T}^m$ есть стандартный тор.

Для произвольного комплекса \mathcal{K} на $[m]$ момент-угол-комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ содержит тор \mathbb{T}^m (соответствующий случаю $\mathcal{K} = \emptyset$) и содержится в полидиске \mathbb{D}^m (соответствующем случаю $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$).

3. Пусть \mathcal{K} – комплекс, состоящий из двух отдельных точек. Тогда

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2) = \partial(D^2 \times D^2) \cong S^3$$

есть стандартное разложение 3-мерной сферы на два полнотория.

4. В более общем случае, если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$ (граница симплекса), то

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{K}} &= (D^2 \times \dots \times D^2 \times S^1) \cup (D^2 \times \dots \times S^1 \times D^2) \cup \dots \cup (S^1 \times \dots \times D^2 \times D^2) \\ &= \partial((D^2)^m) \cong S^{2m-1}. \end{aligned}$$

5. Пусть $\begin{array}{ccc} 4 & \square & 2 \\ 1 & \square & 3 \end{array}$ есть граница четырехугольника. Тогда мы имеем четыре максимальных симплекса $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{K}} &= (D^2 \times S^1 \times D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2 \times D^2 \times S^1) \\ &\quad \cup (D^2 \times S^1 \times S^1 \times D^2) \cup (S^1 \times D^2 \times S^1 \times D^2) \\ &= ((D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)) \times D^2 \times S^1 \cup ((D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)) \times S^1 \times D^2 \\ &= ((D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)) \times ((D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)) \cong S^3 \times S^3. \end{aligned}$$

Этот пример можно обобщить следующим образом. Напомним, что *соединением (джойном)* симплициальных комплексов \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 на множествах \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 соответственно называется симплициальный комплекс

$$\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 = \{I \subset \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2 : I = I_1 \cup I_2, I_1 \in \mathcal{K}_1, I_2 \in \mathcal{K}_2\}$$

на множестве $\mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. Мы имеем $\mathcal{L}_{\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2} = \mathcal{L}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{L}_{\mathcal{K}_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2} &= \bigcup_{I_1 \in \mathcal{K}_1, I_2 \in \mathcal{K}_2} (D^2, S^1)^{I_1 \sqcup I_2} = \bigcup_{I_1 \in \mathcal{K}_1, I_2 \in \mathcal{K}_2} (D^2, S^1)^{I_1} \times (D^2, S^1)^{I_2} \\ &= \left(\bigcup_{I_1 \in \mathcal{K}_1} (D^2, S^1)^{I_1} \right) \times \left(\bigcup_{I_2 \in \mathcal{K}_2} (D^2, S^1)^{I_2} \right) = \mathcal{L}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{L}_{\mathcal{K}_2}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 7.7. Пусть P, Q – два простых многогранника. Тогда $\mathcal{L}_{P \times Q} \cong \mathcal{L}_P \times \mathcal{L}_Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\mathcal{K}_{P \times Q} = \mathcal{K}_P * \mathcal{K}_Q$.

Так как $\mathcal{L}_{\mathcal{K}_P} \cong \mathcal{L}_P$, момент-угол-комплекс, соответствующий границе симплицального многогранника, является многообразием. Это также верно для момент-угол-комплекса, соответствующего произвольной триангулированной сфере (хотя не любая триангуляция сферы происходит из границы симплицального многогранника, см., например, [14; § 2.3]).

ТЕОРЕМА 7.8 [14; лемма 7.13]. Пусть \mathcal{K} – триангуляция сферы S^{n-1} с t вершинами. Тогда $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ является (замкнутым) топологическим многообразием размерности $t + n$.

Как мы увидим в следующем разделе, момент-угол-комплексы, соответствующие полным симплицальным веерам, являются гладкими многообразиями. В общем случае неизвестно, существует ли гладкая структура на момент-угол-многообразиях, соответствующих произвольным триангуляциям сферы.

Момент-угол-комплексы $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ топологически устроены достаточно сложно. Кольцо когомологий комплекса $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ было описано в [13; § 4.2] (с коэффициентами в поле) и в [6] и [28] (с целочисленными коэффициентами). Известно [31], что если \mathcal{K} является k -мерным остовом симплекса Δ^{m-1} (для любых k, m), то соответствующий момент-угол-комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентен букету сфер. Также известно, что если многогранник P получается из симплекса последовательной срезкой вершин гиперплоскостями (в этом случае двойственный многогранник P^* является *многогранником пирамидальной надстройки*¹), то момент-угол-многообразие \mathcal{L}_P диффеоморфно связной сумме произведений сфер, по две сферы в каждом произведении (это результат принадлежит Макгаврану, см. [10; теорема 6.3], а также [30]). Нахождение других серий многогранников или симплицальных комплексов, для которых топология момент-угол-комплекса $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ может быть явно описана, является интересной и трудной задачей. Многие нетривиальные топологические свойства проявляются уже на уровне когомологий комплекса $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. Например, момент-угол-многообразия, вообще говоря, не являются *формальными* (в смысле рациональной теории гомотопий); примеры многообразий \mathcal{L}_P с нетривиальными произведениями Масси в когомологиях появляются уже для 3-мерных многогранников P (см. [5]).

¹В английской терминологии *stacked*.

7.3. Полиэдральные произведения. Разложение момента-угол-комплекса $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ (7.5), использующее диск и окружность (D^2, S^1) , легко обобщается на произвольные пары пространств.

КОНСТРУКЦИЯ 7.9 (полиэдральное произведение). Пусть \mathcal{K} – симплициальный комплекс на множестве $[m]$ и пусть

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

– набор из m пар пространств, $A_i \subset X_i$. Для симплекса $I \in \mathcal{K}$ положим

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^m X_i : x_i \in A_i \text{ при } i \notin I \right\} \quad (7.6)$$

и определим *полиэдральное произведение* набора (\mathbf{X}, \mathbf{A}) , соответствующее комплексу \mathcal{K} , по формуле

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right).$$

В случае, когда все пары (X_i, A_i) одинаковы, т.е. $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \dots, m$, мы будем использовать обозначение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ вместо $(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathcal{K}}$.

ПРИМЕР 7.10. 1. Момент-угол-комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ есть полиэдральное произведение $(D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ (когда рассматривается абстрактно) или $(\mathbb{D}, \mathbb{S})^{\mathcal{K}}$ (когда рассматривается как подкомплекс в полидиске \mathbb{D}^m).

2. Кубический комплекс $c_P(P) \subset \mathbb{I}^m$ из конструкции 7.1 есть

$$c_P(P) = (\mathbb{I}, 1)^{\mathcal{K}_P},$$

где $\mathbb{I} = [0, 1]$ – единичный отрезок, а 1 – его конец. Для общих симплициальных комплексов \mathcal{K} полиэдральное произведение $(\mathbb{I}, 1)^{\mathcal{K}}$ является кубическим подкомплексом в \mathbb{I}^m , который можно отождествить с пространством орбит действия тора \mathbb{T}^m на $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. Пространство $(\mathbb{I}, 1)^{\mathcal{K}}$ гомеоморфно конусу над \mathcal{K} (см. [14; предложение 5.12]). Мы обозначим $cc(\mathcal{K}) = (\mathbb{I}, 1)^{\mathcal{K}}$.

3. Если \mathcal{K} состоит из m отдельных точек, а $A_i = \text{pt}$ (точка), то

$$(\mathbf{X}, \text{pt})^{\mathcal{K}} = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_m$$

– *букет* пространств X_i .

ЗАМЕЧАНИЕ. Разложение пространства $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ на произведения дисков и окружностей впервые появилось в работе [13], где и был введен термин “момент-угол-комплекс” для пространства $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$. В [13] был также рассмотрен ряд других примеров полиэдральных произведений $(X, A)^{\mathcal{K}}$ (включая перечисленные в примере 7.10). Определение пространства $(X, A)^{\mathcal{K}}$ для произвольной пары (X, A) были предложены авторам Н. Стрикландом (в частном сообщении, а также в неопубликованной заметке) как общая схема для конструкций из [13]; это определение было включено в окончательную версию работы [13] и в [14]. Дальнейшие обобщения конструкции $(X, A)^{\mathcal{K}}$ наборы пар пространств (\mathbf{X}, \mathbf{A}) были предложены в работе Грбич–Терио [31],

а также в работе Бари, Бендерского, Коэна и Гитлера [4], где и был введен термин “полиэдральное произведение” (следуя предложению У. Браудера). С начала 2000-х годов пространства $(X, A)^{\mathcal{K}}$ также назывались “обобщенными момент-угол-комплексами”, “ \mathcal{K} -степенями” и “частичными произведениями”.

7.4. Дополнения конфигураций координатных подпространств.

Такие пространства дают еще одну важную серию примеров полиэдральных произведений. Мы можем определить дополнение набора координатных подпространств аналогично (6.3) для произвольного симплицциального комплекса \mathcal{K} :

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}} \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}. \quad (7.7)$$

Легко видеть, что дополнение любого набора координатных подпространств в \mathbb{C}^m имеет вид $U(\mathcal{K})$ для некоторого симплицциального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$. Если конфигурация координатных подпространств содержит гиперплоскость $\mathbf{z}_i = 0$, то $\{i\}$ является призрачной вершиной соответствующего симплицциального комплекса \mathcal{K} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.11. $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ определим координатное подпространство $L_I = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$. Для $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ мы обозначали $\omega(\mathbf{z}) = \{i \in [m] : z_i = 0\} \subset [m]$. Мы имеем

$$\begin{aligned} U(\mathcal{K}) &= \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}} L_I = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}} \{\mathbf{z} : \omega(\mathbf{z}) \supset I\} = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}} \{\mathbf{z} : \omega(\mathbf{z}) = I\} \\ &= \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \{\mathbf{z} : \omega(\mathbf{z}) = I\} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \{\mathbf{z} : \omega(\mathbf{z}) \subset I\} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^I = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Так как каждое координатное подпространство инвариантно относительно стандартного действия тора \mathbb{T}^m на \mathbb{C}^m , дополнение $U(\mathcal{K})$ также является \mathbb{T}^m -инвариантным подмножеством в \mathbb{C}^m .

Напомним, что *деформационная ретракция* пространства X на подпространство A – это непрерывное семейство отображений (гомотопия) $F_t : X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{I}$, такое, что $F_0 = \text{id}$ (тождественное отображение), $F_1(X) = A$ и $F_t|_A = \text{id}$ для всех t . Часто термин “деформационная ретракция” используют только для последнего отображения $f = F_1 : X \rightarrow A$ в семействе. Это отображение является гомотопической эквивалентностью.

ТЕОРЕМА 7.12 [14]. Момент-угол-комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ является \mathbb{T}^m -инвариантным подпространством в $U(\mathcal{K})$, и существует \mathbb{T}^m -эквивариантная деформационная ретракция

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \hookrightarrow U(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{K}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ и $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}^\times$, мы имеем $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}, \mathbb{S})^{\mathcal{K}} \subset (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}} = U(\mathcal{K})$, а подмножество $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \subset U(\mathcal{K})$ очевидно \mathbb{T}^m -инвариантно.

Любой симплициальный комплекс \mathcal{K} можно получить из симплекса Δ^{m-1} последовательным удалением максимальных граней (так что на каждом промежуточном шаге получается симплициальный комплекс), и мы будем строить деформационную ретракцию $U(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ по индукции.

База индукции: если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m$, $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mathbb{D}^m$ и ретракция $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{D}^m$ очевидно существует.

Пространство орбит $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/\mathbb{T}^m$ является кубическим комплексом $cc(\mathcal{K}) = (\mathbb{I}, 1)^{\mathcal{K}}$ (см. пример 7.10.2). Пространство орбит $U(\mathcal{K})/\mathbb{T}^m$ можно отождествить с пространством

$$U(\mathcal{K})_{\geq} = U(\mathcal{K}) \cap \mathbb{R}_{\geq}^m = (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}},$$

где ортант \mathbb{R}_{\geq}^m рассматривается как подмножество в \mathbb{C}^m .

Мы построим деформационную ретракцию $r: U(\mathcal{K})_{\geq} \rightarrow cc(\mathcal{K})$ пространств орбит, которую затем накроем деформационной ретракцией $\tilde{r}: U(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$.

Предположим, что симплициальный комплекс \mathcal{K} получен из комплекса \mathcal{K}' удалением одного максимального симплекса $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, т.е. $\mathcal{K} \cup J = \mathcal{K}'$. Тогда кубический комплекс $cc(\mathcal{K}')$ получается из $cc(\mathcal{K})$ добавлением одной k -мерной грани $C_J = (\mathbb{I}, 1)^J$. Мы также имеем $U(\mathcal{K}) = U(\mathcal{K}') \setminus L_J$ и

$$U(\mathcal{K})_{\geq} = U(\mathcal{K}')_{\geq} \setminus \{\mathbf{y}: y_{j_1} = \dots = y_{j_k} = 0\}.$$

Мы можем предположить по индукции, что уже построена деформационная ретракция $r': U(\mathcal{K}')_{\geq} \rightarrow cc(\mathcal{K}')$ такая, что $\omega(r'(\mathbf{y})) = \omega(\mathbf{y})$, где $\omega(\mathbf{y})$ обозначает множество нулевых координат точки \mathbf{y} . В частности, ограничение отображения r' задает деформационную ретракцию

$$r': U(\mathcal{K}')_{\geq} \setminus \{\mathbf{y}: y_{j_1} = \dots = y_{j_k} = 0\} \rightarrow cc(\mathcal{K}') \setminus \mathbf{y}_J,$$

где \mathbf{y}_J – точка с координатами $y_{j_1} = \dots = y_{j_k} = 0$ и $y_j = 1$ при $j \notin J$.

Так как $J \notin \mathcal{K}$, мы имеем $\mathbf{y}_J \notin cc(\mathcal{K})$. С другой стороны, точка \mathbf{y}_J принадлежит новой грани $C_J = (\mathbb{I}, 1)^J$ комплекса $cc(\mathcal{K}')$. Следовательно, мы можем применить деформационную ретракцию r_J , изображенную на рис. 7.2 на грани C_J , с центром в точке \mathbf{y}_J . В координатах, гомотопия F_t между тождественной ретракцией и r_J задается формулой $F_t(\mathbf{y}) = (1-t)\mathbf{y} + t r_J(\mathbf{y})$.

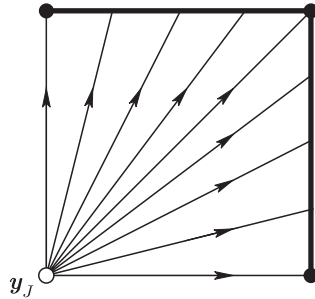


Рис. 7.2. Ретракция $r_J: cc(\mathcal{K}') \setminus \mathbf{y}_J \rightarrow cc(\mathcal{K})$

дественным отображением $cc(\mathcal{K}') \setminus \mathbf{y}_J \rightarrow cc(\mathcal{K}') \setminus \mathbf{y}_J$ (при $t = 0$) и ретракцией $r_J: cc(\mathcal{K}') \setminus \mathbf{y}_J \rightarrow cc(\mathcal{K})$ (при $t = 1$) задается формулой

$$F_t: cc(\mathcal{K}') \setminus \mathbf{y}_J \rightarrow cc(\mathcal{K}') \setminus \mathbf{y}_J, \\ (y_1, \dots, y_m, t) \mapsto (y_1 + t\alpha_1 y_1, \dots, y_m + t\alpha_m y_m),$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1 - \max_{j \in J} y_j}{\max_{j \in J} y_j} & \text{при } i \in J, \\ 0 & \text{при } i \notin J, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Заметим, что $\omega(F_t(\mathbf{y})) = \omega(\mathbf{y})$ для любых t и $\mathbf{y} \in cc(\mathcal{K}')$. Далее, композиция

$$r: U(\mathcal{K})_{\geq} = U(\mathcal{K}')_{\geq} \setminus \{\mathbf{y}: y_{j_1} = \dots = y_{j_k} = 0\} \xrightarrow{r'} cc(\mathcal{K}') \setminus \mathbf{y}_J \xrightarrow{r_J} cc(\mathcal{K}) \quad (7.8)$$

является деформационной ретракцией и удовлетворяет соотношению $\omega(r(\mathbf{y})) = \omega(\mathbf{y})$, так как оно выполнено для r_J и r' . Тем самым шаг индукции завершен. Теперь требуемая ретракция $\tilde{r}: U(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ накрывает ретракцию r , как показано в следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}_{\mathcal{K}} & \hookrightarrow & U(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\tilde{r}} & \mathcal{L}_{\mathcal{K}} \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ cc(\mathcal{K}) & \hookrightarrow & U_{\geq}(\mathcal{K}) & \xrightarrow{r} & cc(\mathcal{K}) \end{array}$$

В явном виде отображение \tilde{r} раскладывается индуктивно аналогично (7.8),

$$\tilde{r}: U(\mathcal{K}) = U(\mathcal{K}') \setminus L_J \xrightarrow{\tilde{r}'} \mathcal{L}_{\mathcal{K}'} \setminus \mu^{-1}(\mathbf{y}_J) \xrightarrow{\tilde{r}_J} \mathcal{L}_{\mathcal{K}},$$

где $\mu^{-1}(\mathbf{y}_J) = \prod_{j \in J} \{0\} \times \prod_{j \notin J} \mathbb{S}$, а отображение \tilde{r}_J в координатах $(z_1, \dots, z_m) = (\sqrt{y_1} e^{i\varphi_1}, \dots, \sqrt{y_m} e^{i\varphi_m})$ задается формулой

$$(\sqrt{y_1} e^{i\varphi_1}, \dots, \sqrt{y_m} e^{i\varphi_m}) \mapsto (\sqrt{y_1 + \alpha_1 y_1} e^{i\varphi_1}, \dots, \sqrt{y_m + \alpha_m y_m} e^{i\varphi_m}),$$

числа α_i определены выше. Теорема доказана.

Как мы увидим в разделе 9, в случае, когда $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\Sigma}$ – ассоциированный комплекс полного симплициального веера Σ , деформационная ретракция $U(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ может быть реализована как проекция на пространство орбит для действия группы \mathbb{R}^{m-n} на $U(\mathcal{K})$.

Оставшиеся разделы будут посвящены геометрическим аспектам теории момент-угол-комплексов, и нас в основном будут интересовать момент-угол-многообразия, соответствующие многогранникам или полным симплициальным веерам. Тем не менее гомотопическая теория общих момент-угол-комплексов представляет самостоятельный интерес; с ее развитием можно ознакомиться по работам [14; гл. 7], [23], [31], [53] и [4].

8. LVM-многообразия

В работе Босио и Мерсмана [10] момент-угол-многообразия \mathcal{Z}_P , происходящие из многогранников, были отождествлены с классом некэлеровых комплексно-аналитических многообразий, введенных в работах Лопеса де Медрано, Верховского и Мерсмана (LVM-многообразиями). Это послужило началом дальнейшего изучения комплексных структур на момент-угол-многообразиях. В этом разделе мы изложим конструкцию LVM-многообразий и опишем их связь с момент-угол-многообразиями.

Начальными данными в конструкции LVM-многообразия является линк однородной системы квадратик, аналогичной (4.2), но с *комплексными* коэффициентами:

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m |z_k|^2 = 1, \\ \sum_{k=1}^m \zeta_k |z_k|^2 = \mathbf{0} \end{array} \right\}, \quad (8.1)$$

где $\zeta_k \in \mathbb{C}^s$. Такой линк очевидно можно записать в виде (4.2), отождествляя пространство \mathbb{C}^s с \mathbb{R}^{2s} стандартным образом, так что каждый вектор ζ_k переходит в $\mathbf{g}_k \in \mathbb{R}^{m-n-1}$, где $n = m - 2s - 1$. Мы будем предполагать, что линк (8.1) является невырожденным, т.е. набор комплексных векторов $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ (или соответствующий набор вещественных векторов $(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m)$) удовлетворяет условиям (а) и (б) из предложения 4.6.

Теперь определим многообразие \mathcal{N} как проективизацию пересечения однородных квадратик из (8.1):

$$\mathcal{N} = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}P^{m-1} : \zeta_1 |z_1|^2 + \dots + \zeta_m |z_m|^2 = \mathbf{0} \}, \quad \zeta_k \in \mathbb{C}^s. \quad (8.2)$$

Таким образом, мы имеем главное S^1 -расслоение $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 8.1 (Мерсман [43]). *Многообразие \mathcal{N} имеет голоморфный атлас, задающий на нем структуру компактного комплексного многообразия комплексной размерности $m - 1 - s$.*

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Рассмотрим голоморфное действие группы \mathbb{C}^s на \mathbb{C}^m , задаваемое формулой

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathbb{C}^m, \\ (\mathbf{w}, \mathbf{z}) &\mapsto (z_1 e^{\langle \zeta_1, \mathbf{w} \rangle}, \dots, z_m e^{\langle \zeta_m, \mathbf{w} \rangle}), \end{aligned} \quad (8.3)$$

где $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_s) \in \mathbb{C}^s$ и $\langle \zeta_k, \mathbf{w} \rangle = \zeta_{1k} w_1 + \dots + \zeta_{sk} w_s$.

Пусть \mathcal{K} – симплициальный комплекс, состоящий из множеств нулевых координат точек линка \mathcal{L} :

$$\mathcal{K} = \{ \omega(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \mathcal{L} \}.$$

Заметим, что $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$, где P – простой многогранник, ассоциированный с линком \mathcal{L} . Пусть $U = U(\mathcal{K})$ – соответствующее дополнение конфигурации координатных подпространств (см. (7.7)). Из предложения 2.10 вытекает, что

пространство U можно также задать в виде

$$U = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \mathbf{0} \in \text{conv}(\zeta_j : z_j \neq 0)\}.$$

Рассуждение, аналогичное использованному в доказательстве леммы 5.4, показывает, что ограничение действия (8.3) на подмножество $U \subset \mathbb{C}^m$ свободно. Кроме того, это действие собственно (мы докажем это утверждение в более общем контексте в теореме 10.3 ниже). Следовательно, пространство орбит U/\mathbb{C}^s хаусдорфово. Используя голоморфный атлас, трансверсальный к орбитам свободного действия группы \mathbb{C}^s на комплексном многообразии U , мы получаем, что пространство U/\mathbb{C}^s имеет структуру комплексного многообразия.

С другой стороны, можно показать, что ограничение функции $|z_1|^2 + \dots + |z_m|^2$ на каждую орбиту свободного действия группы \mathbb{C}^s на U имеет единственный минимум. Множество этих минимумов есть

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \setminus \{\mathbf{0}\} : \zeta_1 |z_1|^2 + \dots + \zeta_m |z_m|^2 = \mathbf{0}\}.$$

Отсюда следует, что факторпространство U/\mathbb{C}^s можно отождествить с множеством \mathcal{T} , а значит, множество \mathcal{T} имеет структуру комплексного многообразия размерности $m - s$.

Переходя к проективизации, мы отождествляем множество \mathcal{N} с факторпространством дополнения конфигурации координатных подпространств в $\mathbb{C}P^{m-1}$ (проективизации множества U) по голоморфному действию группы \mathbb{C}^s . Тем самым множество \mathcal{N} приобретает структуру компактного комплексного многообразия.

Многообразию \mathcal{N} с комплексной структурой, задаваемой теоремой 8.1, называется *LVM-многообразием*. Эти многообразия были описаны Мерсманом [43] как обобщение конструкции Лопеса де Медрано и Верховского [41].

ЗАМЕЧАНИЕ. Вложение \mathcal{T} в \mathbb{C}^m и вложение \mathcal{N} в $\mathbb{C}P^{m-1}$, задаваемое формулой (8.2), не являются голоморфными.

Момент-угол-многообразию \mathcal{Z}_P диффеоморфно линку (4.2), который можно превратить в комплексный линк (8.1) при условии, что $m + n$ нечетно. Следовательно, факторпространство \mathcal{Z}_P/S^1 нечетномерного момент-угол-многообразия допускает комплексно-аналитическую структуру LVM-многообразия. Путем добавления лишних неравенств и используя S^1 -расслоение $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}$, Босио и Мерсман показали, что многообразию \mathcal{Z}_P или $\mathcal{Z}_P \times S^1$ также допускает структуру LVM-многообразия, в зависимости от того, является ли $m + n$ четным или нечетным.

Вначале мы опишем эффект, оказываемый лишними неравенствами в (2.1) на различные пространства, появившиеся выше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Пусть (2.1) – представление общего положения. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i \geq 0$ является лишним неравенством в (2.1) (т. е. $F_i = \emptyset$);
- (b) $\mathcal{Z}_P \subset \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m : z_i \neq 0\}$;
- (c) $\{i\}$ является призрачной вершиной в \mathcal{K}_P ;

- (d) пространство $U(\mathcal{X}_P)$ имеет множитель \mathbb{C}^\times по i -й координате;
 (e) $\mathbf{0} \notin \text{conv}(\mathbf{g}_k: k \neq i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность первых четырех условий следует из определений. Эквивалентность (a) \Leftrightarrow (e) вытекает из предложения 2.10.

ТЕОРЕМА 8.3 [10]. Пусть \mathcal{Z}_P есть момент-угол-многообразие, соответствующее n -мерному простому многограннику (2.1), задаваемому t неравенствами.

- (a) Если $t+n$ четно, то \mathcal{Z}_P допускает комплексную структуру LVM-многообразия.
 (b) Если $t+n$ нечетно, то $\mathcal{Z}_P \times S^1$ допускает комплексную структуру LVM-многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Добавим одно лишнее неравенство вида $1 \geq 0$ к (2.1) и обозначим получаемое многообразие (3.1) через \mathcal{Z}'_P . Мы имеем $\mathcal{Z}'_P \cong \mathcal{Z}_P \times S^1$. В силу предложения 4.5, многообразие \mathcal{Z}_P диффеоморфно линку (4.2). Тогда многообразие \mathcal{Z}'_P задается пересечением квадрик

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{m+1}: \quad |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1, \\ \mathbf{g}_1 |z_1|^2 + \cdots + \mathbf{g}_m |z_m|^2 = \mathbf{0}, \\ |z_{m+1}|^2 = 1 \end{array} \right\},$$

которое диффеоморфно линку вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{m+1}: \quad |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 + |z_{m+1}|^2 = 1, \\ \mathbf{g}_1 |z_1|^2 + \cdots + \mathbf{g}_m |z_m|^2 = \mathbf{0}, \\ |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 - |z_{m+1}|^2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Если мы обозначим через $\Gamma^* = (\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_m)$ матрицу размера $(m-n-1) \times m$, состоящую из коэффициентов однородных квадрик для \mathcal{Z}_P , то соответствующая матрица для \mathcal{Z}'_P есть

$$\Gamma^{*'} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_m & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ее высота $m-n$ четна, так что мы можем представить ее i -й столбец комплексным вектором ζ_i (отождествляя \mathbb{R}^{m-n} с $\mathbb{C}^{(m-n)/2}$) для $i = 1, \dots, m+1$. Теперь определим

$$\mathcal{N}' = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}P^m: \zeta_1 |z_1|^2 + \cdots + \zeta_{m+1} |z_{m+1}|^2 = \mathbf{0}\}. \quad (8.4)$$

Тогда \mathcal{N}' допускает комплексную структуру LVM-многообразия в силу теоремы 8.1. С другой стороны,

$$\mathcal{N}' \cong \mathcal{Z}'_P / S^1 = (\mathcal{Z}_P \times S^1) / S^1 \cong \mathcal{Z}_P,$$

так что многообразие \mathcal{Z}_P также допускает комплексную структуру.

(b) Здесь рассуждение аналогично, только мы добавляем два лишних неравенства $1 \geq 0$ к представлению (2.1). Тогда многообразие $\mathcal{L}'_P \cong \mathcal{L}_P \times S^1 \times S^1$ задается линком

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{m+2}: \quad |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 + |z_{m+1}|^2 + |z_{m+2}|^2 = 1, \\ \mathbf{g}_1 |z_1|^2 + \cdots + \mathbf{g}_m |z_m|^2 = 0, \\ |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 - |z_{m+1}|^2 = 0, \\ |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 - |z_{m+2}|^2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Матрица коэффициентов однородных квадратик есть

$$\Gamma^{*l} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_m & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы будем рассматривать ее столбцы как набор из $m+2$ комплексных векторов $\zeta_1, \dots, \zeta_{m+2}$ и определим

$$\mathcal{N}' = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}P^{m+1} : \zeta_1 |z_1|^2 + \cdots + \zeta_{m+2} |z_{m+2}|^2 = 0 \}. \quad (8.5)$$

Тогда \mathcal{N}' допускает комплексную структуру LVM-многообразия. С другой стороны,

$$\mathcal{N}' \cong \mathcal{L}'_P / S^1 = (\mathcal{L}_P \times S^1 \times S^1) / S^1 \cong \mathcal{L}_P \times S^1,$$

и, следовательно, многообразие $\mathcal{L}_P \times S^1$ допускает комплексную структуру.

Теорема доказана.

В следующих двух разделах мы опишем более прямой метод введения комплексной структуры на многообразиях \mathcal{L}_P , который не прибегает к проективным квадратикам и LVM-многообразиям. Этот подход, разработанный в [54], работает не только в случае многогранников, но также и для момент-угол-многообразий $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, соответствующих полным симплицальным веерам.

9. Момент-угол-многообразия, происходящие из симплицальных вееров

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\Sigma}$ – ассоциированный комплекс полного симплицального веера Σ , и пусть $U(\mathcal{K})$ – дополнение конфигурации координатных подпространств (7.7), задаваемое комплексом \mathcal{K} . Здесь мы отождествим момент-угол-многообразие $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ с факторпространством дополнения $U(\mathcal{K})$ по гладкому действию некомпактной группы, изоморфной пространству \mathbb{R}^{m-n} , и тем самым зададим на $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ гладкую структуру. При помощи модификации этой конструкции в следующем разделе мы наделим многообразие $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ комплексной структурой. Эти результаты были получены в работе [54] Устиновского и автора.

Напомним (см. п. 6.1), что симплицальный веер Σ задается набором данных $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, где

- \mathcal{K} – симплицальный комплекс на множестве $[m]$;
- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ – конфигурация векторов в пространстве $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ такая, что для любого симплекса $I \in \mathcal{K}$ набор векторов $\{\mathbf{a}_i: i \in I\}$ является линейно независимым.

Вот важное отличие нашего подхода к веерам от стандартного, принятого в торической геометрии: так как мы допускаем призрачные вершины в комплексе \mathcal{K} , мы не требуем, чтобы каждый вектор \mathbf{a}_i порождал одномерный конус веера Σ . Векторы \mathbf{a}_i , соответствующие призрачным вершинам $\{i\} \in [m]$, могут быть нулевыми. Этот формализм также использовался в работе [7] под названием *триангулированных конфигураций векторов*.

КОНСТРУКЦИЯ 9.1. Для данного набора векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ рассмотрим линейное отображение

$$A: \mathbb{R}^m \rightarrow N_{\mathbb{R}}, \quad \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{a}_i, \quad (9.1)$$

где $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ – стандартный базис в \mathbb{R}^m . Пусть

$$\mathbb{R}_{>}^m = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m: y_i > 0\}$$

– мультипликативная группа наборов из m положительных вещественных чисел; определим подгруппу

$$\begin{aligned} R &= \exp(\text{Ker } A) = \{(e^{y_1}, \dots, e^{y_m}): (y_1, \dots, y_m) \in \text{Ker } A\} \\ &= \left\{ (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}_{>}^m: \prod_{i=1}^m t_i^{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u} \rangle} = 1 \text{ для всех } \mathbf{u} \in N_{\mathbb{R}}^* \right\}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Рассмотрим действие группы $\mathbb{R}_{>}^m$ на пространстве $U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$ по координатными умножениями и ограничение этого действия на подгруппу $R \subset \mathbb{R}_{>}^m$. Напомним, что действие топологической группы G на пространстве X называется *собственным*, если *отображение действия* $h: G \times X \rightarrow X \times X, (g, x) \mapsto (gx, x)$, является собственным (т. е. прообраз компактного подмножества компактен).

ТЕОРЕМА 9.2 [54]. Пусть задан набор данных $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, удовлетворяющих условиям выше. Тогда:

- (а) группа R (9.2) действует на пространстве $U(\mathcal{K})$ свободно;
- (б) если данные $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ задают симплицальный веер Σ , то действие группы R на $U(\mathcal{K})$ собственное, так что пространство орбит $U(\mathcal{K})/R$ является гладким хаусдорфовым $(m+n)$ -мерным многообразием;
- (в) если веер Σ является полным, то пространство орбит $U(\mathcal{K})/R$ гомеоморфно момент-угол-многообразию $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$.

Таким образом, $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ имеет структуру гладкого многообразия в случае, когда $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\Sigma}$ для полного симплицального веера Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (а) доказывается так же, как предложение 6.7. Действительно, точка $\mathbf{z} \in U(\mathcal{K})$ имеет нетривиальный стабилизатор

для действия группы $\mathbb{R}_{>}^m$ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из ее координат обращается в нуль. Стабилизаторы действия группы $\mathbb{R}_{>}^m$ имеют вид $(\mathbb{R}_{>}, 1)^I$ (см. (7.6)), где $I \in \mathcal{K}$. Ограничение отображения $\exp A$ на каждую такую подгруппу $(\mathbb{R}_{>}, 1)^I$ является мономорфизмом. Следовательно, пересечение группы $R = \exp(\text{Ker } A)$ с каждым стабилизатором действия группы $\mathbb{R}_{>}^m$ тривиально, что означает, что действие группы R на $U(\mathcal{K})$ свободно.

Теперь докажем (b). Рассмотрим отображение

$$h: R \times U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K}), \quad (\mathbf{g}, \mathbf{z}) \mapsto (\mathbf{g}\mathbf{z}, \mathbf{z}),$$

где $\mathbf{g} \in R$, $\mathbf{z} \in U(\mathcal{K})$. Пусть $V \subset U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K})$ – компактное подмножество; нам нужно показать, что его прообраз $h^{-1}(V)$ также компактен. Так как пространство $R \times U(\mathcal{K})$ метризуемо, достаточно доказать, что любая бесконечная последовательность $\{(\mathbf{g}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)}): k = 1, 2, \dots\}$ точек из $h^{-1}(V)$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как подмножество $V \subset U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K})$ компактно, переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что последовательность

$$\{h(\mathbf{g}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)})\} = \{(\mathbf{g}^{(k)}\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)})\}$$

имеет предел в $U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K})$. Положим $\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)}\mathbf{z}^{(k)}$, и пусть

$$\{\mathbf{w}^{(k)}\} \rightarrow \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m), \quad \{\mathbf{z}^{(k)}\} \rightarrow \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$$

для некоторых $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in U(\mathcal{K})$. Нам нужно показать, что подпоследовательность последовательности $\{\mathbf{g}^{(k)}\}$ имеет предел в R . Запишем

$$\mathbf{g}^{(k)} = (g_1^{(k)}, \dots, g_m^{(k)}) = (e^{\alpha_1^{(k)}}, \dots, e^{\alpha_m^{(k)}}) \in R \subset \mathbb{R}_{>}^m,$$

где $\alpha_j^{(k)} \in \mathbb{R}$. Переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что каждая последовательность $\{\alpha_j^{(k)}\}$, $j = 1, \dots, m$, имеет конечный или бесконечный предел (включая $\pm\infty$). Положим

$$I_+ = \{j: \alpha_j^{(k)} \rightarrow +\infty\} \subset [m], \quad I_- = \{j: \alpha_j^{(k)} \rightarrow -\infty\} \subset [m].$$

Так как последовательности $\{\mathbf{z}^{(k)}\}$, $\{\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)}\mathbf{z}^{(k)}\}$ сходятся к $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in U(\mathcal{K})$ соответственно, мы имеем $z_j = 0$ при $j \in I_+$ и $w_j = 0$ при $j \in I_-$. Тогда из разложения $U(\mathcal{K}) = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^I$ следует, что подмножества I_+ и I_- являются симплексами в \mathcal{K} . Пусть σ_+, σ_- – соответствующие конусы симплицеального веера Σ . Тогда $\sigma_+ \cap \sigma_- = \{\mathbf{0}\}$ по определению веера. В силу леммы 6.1 существует линейная функция $\mathbf{u} \in N_{\mathbb{R}}^*$ такая, что $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle > 0$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{a} \in \sigma_+$ и $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle < 0$ для любого ненулевого $\mathbf{a} \in \sigma_-$. Так как $\mathbf{g}^{(k)} \in R$, из (9.2) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j^{(k)} \langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_j \rangle = 0. \quad (9.3)$$

Это означает, что оба множества I_+ и I_- пусты, так как в противном случае сумма выше стремилась бы к бесконечности. Следовательно, каждая последовательность $\{\alpha_j^{(k)}\}$ имеет конечный предел α_j , и подпоследовательность

в $\{\mathbf{g}^{(k)}\}$ сходится к $(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m})$. Переходя к пределу в (9.3), мы получаем, что $(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}) \in R$. Это доказывает собственность действия. Мы получаем, что группа Ли $R(\Sigma)$ действует гладко, свободно и собственнно на гладком многообразии $U(\mathcal{K})$. Тогда пространство орбит $U(\mathcal{K})/R$ хаусдорфово и гладко согласно стандартному результату [39; теорема 9.16].

В случае полного веера можно явно построить гладкий атлас многообразия $U(\mathcal{K})/R$. Для этого удобно предварительно профакторизовать все по действию тора \mathbb{T}^m , как в доказательстве теоремы 7.12. Мы имеем

$$U(\mathcal{K})/\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^I.$$

Так как Σ является полным веером, в объединении выше можно брать только n -элементные симплексы $I = \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{K}$. Рассмотрим один такой симплекс I ; соответствующий n -мерный конус $\sigma \in \Sigma$ порожден векторами $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}$. Пусть $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ – двойственный базис пространства $N_{\mathbb{R}}^*$, т. е. $\langle \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{kj}$. Теперь рассмотрим отображение

$$p_I: (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^n, \\ (y_1, \dots, y_m) \mapsto \left(\prod_{i=1}^m y_i^{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u}_1 \rangle}, \dots, \prod_{i=1}^m y_i^{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u}_n \rangle} \right),$$

где мы положили $0^0 = 1$. Заметим, что нуль никогда не входит с отрицательным показателем в правую часть, т. е. отображение p_I определено и является непрерывным. Каждое подмножество $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^I$ является R -инвариантным, и из формулы (9.2) следует, что отображение p_I индуцирует вложение

$$q_I: (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^I/R \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^n.$$

Это отображение сюръективно, так как каждая точка $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ имеет прообраз (y_1, \dots, y_m) , где $y_{i_j} = x_j$ при $1 \leq j \leq n$ и $y_k = 1$ при $k \notin \{i_1, \dots, i_n\}$. Следовательно, отображение q_I является гомеоморфизмом. Оно накрывается \mathbb{T}^m -эквивариантным гомеоморфизмом

$$\bar{q}_I: (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^I/R \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{T}^{m-n},$$

где \mathbb{C}^n отождествлено с факторпространством $\mathbb{R}_{\geq}^n \times \mathbb{T}^n / \sim$ (см. (4.1)). Так как пространство $U(\mathcal{K})/R$ покрыто открытыми подмножествами $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^I/R$, а произведение $\mathbb{C}^n \times \mathbb{T}^{m-n}$ вкладывается как открытое подмножество в \mathbb{R}^{m+n} , набор гомеоморфизмов $\{\bar{q}_I: I \in \mathcal{K}\}$ задает атлас на $U(\mathcal{K})/R$. Непосредственно проверяется, что замены координат $\bar{q}_j \bar{q}_I^{-1}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{T}^{m-n} \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{T}^{m-n}$ являются гладкими, т. е. факторпространство $U(\mathcal{K})/R$ является гладким многообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ. Набор гомеоморфизмов $\{q_I: (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^I/R \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^n\}$ задает атлас для $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/\mathbb{T}^m$ как гладкого многообразия с углами. Если $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ для некоторого простого многогранника P , то эта гладкая структура совпадает со структурой, задаваемой самим многогранником.

Остается доказать утверждение (с), т. е. отождествить $U(\mathcal{K})/R$ с $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. Если X – хаусдорфово локально компактное пространство с собственным действием группы G , а $Y \subset X$ – компактное подмножество, пересекающее каждую G -орбиту в одной точке, то пространство Y гомеоморфно пространству орбит X/G . Поэтому нам необходимо проверить, что каждая R -орбита пересекает подмножество $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \subset U(\mathcal{K})$ в одной точке. Сначала мы докажем, что R -орбита любой точки $\mathbf{y} \in U(\mathcal{K})/\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}}$ пересекает факторпространство $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/\mathbb{T}^m$ в одной точке. Для этого мы используем кубическое разбиение $ss(\mathcal{K}) = (\mathbb{I}, 1)^{\mathcal{K}}$ пространства $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/\mathbb{T}^m$ (см. пример 7.10.2).

Сначала предположим, что $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{>}^m$. Действие группы R на $\mathbb{R}_{>}^m$ получается взятием экспоненты линейного действия группы $\text{Ker } A$ на \mathbb{R}^m . Рассмотрим подмножество $(\mathbb{R}_{\leq}, 0)^{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}^m$, где \mathbb{R}_{\leq} обозначает множество неположительных вещественных чисел. Ограничение отображения $\exp: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{>}^m$ на подмножество $(\mathbb{R}_{\leq}, 0)^{\mathcal{K}}$ задает его гомеоморфизм на $ss^{\circ}(\mathcal{K}) = ((0, 1], 1)^{\mathcal{K}} \subset \mathbb{R}_{>}^m$, где $(0, 1]$ обозначает полуинтервал $\{y \in \mathbb{R}: 0 < y \leq 1\}$. Отображение

$$A: (\mathbb{R}_{\leq}, 0)^{\mathcal{K}} \rightarrow N_{\mathbb{R}} \quad (9.4)$$

переводит $(\mathbb{R}_{\leq}, 0)^I$ в $-\sigma$, где $\sigma \in \Sigma$ – конус, соответствующий симплексу $I \in \mathcal{K}$. Так как веер Σ является полным, отображение (9.4) взаимно однозначно.

Орбита точки \mathbf{y} под действием группы R состоит из точек $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{>}^m$, для которых $\exp A\mathbf{w} = \exp A\mathbf{y}$. Так как $A\mathbf{y} \in N_{\mathbb{R}}$, а отображение (9.4) взаимно однозначно, существует единственная точка $\mathbf{y}' \in (\mathbb{R}_{\leq}, 0)^{\mathcal{K}}$ такая, что $A\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Так как $\exp A\mathbf{y}' \subset ss^{\circ}(\mathcal{K})$, мы получаем, что R -орбита точки \mathbf{y} пересекает $ss^{\circ}(\mathcal{K})$, а значит, и $ss(\mathcal{K})$ в единственной точке.

Пусть теперь $\mathbf{y} \in (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}}$ – произвольная точка. Рассмотрим $\omega(\mathbf{y}) \in \mathcal{K}$ – множество нулевых координат точки \mathbf{y} , и пусть $\sigma \in \Sigma$ – конус, соответствующий симплексу $\omega(\mathbf{y})$. Конусы, содержащие σ , образуют веер $\text{St } \sigma$ (называемый *звездой* конуса σ) в факторпространстве $N_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}\langle \mathbf{a}_i: i \in \omega(\mathbf{y}) \rangle$. Симплициальный комплекс, ассоциированный с веером $\text{St } \sigma$, представляет собой *линку* $\text{lk } \omega(\mathbf{y})$ симплекса $\omega(\mathbf{y})$ в \mathcal{K} . Теперь заметим, что действие группы R на множестве

$$\{(y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}}: y_i = 0 \text{ при } i \in \omega(\mathbf{y})\} \cong (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\text{lk } \omega(\mathbf{y})}$$

совпадает с действием группы $R_{\text{St } \sigma}$ (задаваемой веером $\text{St } \sigma$). Теперь мы можем повторить предыдущее рассуждение для полного веера $\text{St } \sigma$ и действия группы $R_{\text{St } \sigma}$ на $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\text{lk } \omega(\mathbf{y})}$. В результате мы получаем, что каждая R -орбита пересекает множество $ss(\mathcal{K})$ в единственной точке.

Для завершения доказательства утверждения (с) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathcal{K}} & \longrightarrow & U(\mathcal{K}) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ ss(\mathcal{K}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}} \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки являются вложениями, а вертикальные – проекциями на пространства орбит действий тора \mathbb{T}^m . Заметим, что проекция π коммутирует с действиями группы R на $U(\mathcal{K})$ и $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}}$, а подгруппы R и \mathbb{T}^m в $(\mathbb{C}^{\times})^m$ имеют тривиальное пересечение. Отсюда уже следует, что

каждая R -орбита пересекает полный прообраз $\pi^{-1}(cc(\mathcal{K})) = \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ в единственной точке. Действительно, пусть в $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ лежат точки \mathbf{z} и $r\mathbf{z}$, где $\mathbf{z} \in U(\mathcal{K})$ и $r \in R$. Тогда точки $\pi(\mathbf{z})$ и $\pi(r\mathbf{z}) = r\pi(\mathbf{z})$ лежат в $cc(\mathcal{K})$, а значит, $\pi(\mathbf{z}) = \pi(r\mathbf{z})$. Следовательно, $\mathbf{z} = \mathbf{t}r\mathbf{z}$ для некоторого $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^m$. Можно предположить, что $\mathbf{z} \in (\mathbb{C}^\times)^m$, где действие каждой из групп R и \mathbb{T}^m свободно (в противном случае рассмотрим действие на множестве $U(\text{lk}\omega(\mathbf{z}))$). Мы получаем $\mathbf{t}r = \mathbf{1}$, откуда следует, что $r = \mathbf{1}$, так как R и \mathbb{T}^m имеют тривиальное пересечение. Теорема доказана.

Мы не знаем, обобщается ли теорема 9.2 на другие триангуляции сфер.

ВОПРОС 9.3. Описать класс триангуляций сфер \mathcal{K} , для которых момент-угол-многообразие $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ допускает гладкую структуру.

ЗАМЕЧАНИЕ. Даже в случае, когда момент-угол-комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ допускает гладкую структуру для некоторого симплицального комплекса \mathcal{K} , который не ассоциирован с веером, такая структура не может происходить из факторпространства $U(\mathcal{K})/R$, задаваемого данными $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$. Можно показать, что действие группы R на $U(\mathcal{K})$ собственно и пространство орбит $U(\mathcal{K})/R$ хаусдорфово тогда и *только тогда*, когда данные $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ задают веер (т. е. симплицальные конусы, порожденные любыми двумя подмножествами $\{\mathbf{a}_i: i \in I\}$ и $\{\mathbf{a}_j: j \in J\}$ с $I, J \in \mathcal{K}$, могут быть разделены гиперплоскостью). Это наблюдение изначально принадлежит Босио [9] (см. также [2; § II.3] и [7]).

10. Комплексная геометрия момент-угол-многообразий

Здесь мы показываем, что четномерное момент-угол-многообразие $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, соответствующее полному симплицальному вееру Σ , допускает структуру комплексного многообразия. Идея заключается в том, чтобы заменить действие группы $R \cong \mathbb{R}_{>}^{m-n}$ на $U(\mathcal{K})$ (с пространством орбит $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$) на голоморфное действие группы $\mathbb{C}^{(m-n)/2}$ на том же пространстве.

В этом разделе мы предполагаем, что число $m - n$ четно. Этого можно добиться, добавляя при необходимости призрачную вершину и соответствующий ей вектор к нашим данным $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$; топологический эффект этого заключается в умножении $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ на окружность. Мы положим $\ell = (m - n)/2$.

Мы отождествим \mathbb{C}^m (как вещественное векторное пространство) с \mathbb{R}^{2m} , используя отображение

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m),$$

где $z_k = x_k + iy_k$, и рассмотрим \mathbb{R} -линейное отображение

$$\text{Re}: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (z_1, \dots, z_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m).$$

Для того чтобы задать комплексную структуру на пространстве орбит $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \cong U(\mathcal{K})/R$, мы заменим действие группы R на действие голоморфной подгруппы $C \subset (\mathbb{C}^\times)^m$, определяемой ниже.

КОНСТРУКЦИЯ 10.1. Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ – конфигурация векторов, порождающих пространство $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$. Предположим, что число $m - n = 2\ell$ чётно. Некоторые из векторов \mathbf{a}_i могут быть нулевыми. Рассмотрим отображение $A: \mathbb{R}^m \rightarrow N_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{a}_i$.

Выберем комплексное ℓ -мерное подпространство в \mathbb{C}^m , которое проектируется изоморфно на вещественное $(m - n)$ -мерное подпространство $\text{Ker } A \subset \mathbb{R}^m$. Более точно, пусть $\mathfrak{c} \cong \mathbb{C}^\ell$ и задано линейное отображение $\Psi: \mathfrak{c} \rightarrow \mathbb{C}^m$, удовлетворяющее двум условиям:

- (а) композиция $\mathfrak{c} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\text{Re}} \mathbb{R}^m$ является мономорфизмом;
- (б) композиция $\mathfrak{c} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\text{Re}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} N_{\mathbb{R}}$ является нулевой.

Эти два условия эквивалентны следующим:

- (а') $\Psi(\mathfrak{c}) \cap \overline{\Psi(\mathfrak{c})} = \{\mathbf{0}\}$;
- (б') $\Psi(\mathfrak{c}) \subset \text{Ker}(A_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^m \rightarrow N_{\mathbb{C}})$,

где $\overline{\Psi(\mathfrak{c})}$ – комплексное сопряженное подпространство и $A_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^m \rightarrow N_{\mathbb{C}}$ – комплексификация вещественного отображения $A: \mathbb{R}^m \rightarrow N_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{c} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}^m & \xrightarrow{\text{Re}} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{A} & N_{\mathbb{R}} \\ & & \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} & & \\ & & (\mathbb{C}^\times)^m & \xrightarrow{|\cdot|} & \mathbb{R}_{>}^m & & \end{array} \quad (10.1)$$

где вертикальные стрелки являются покоординатными экспонентами, а $|\cdot|$ обозначает отображение $(z_1, \dots, z_m) \mapsto (|z_1|, \dots, |z_m|)$. Теперь положим

$$C_\Psi = \text{exp } \Psi(\mathfrak{c}) = \{ (e^{\langle \psi_1, \mathbf{w} \rangle}, \dots, e^{\langle \psi_m, \mathbf{w} \rangle}) \in (\mathbb{C}^\times)^m \}, \quad (10.2)$$

где $\mathbf{w} \in \mathfrak{c}$, а $\psi_i \in \mathfrak{c}^*$ задается i -й координатной проекцией $\mathfrak{c} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда $C_\Psi \cong \mathbb{C}^\ell$ является комплексно-аналитической (но не алгебраической) подгруппой в $(\mathbb{C}^\times)^m$. Имеются голоморфные действия подгруппы C_Ψ на \mathbb{C}^m и на $U(\mathcal{K})$, получаемые ограничением действий группы $(\mathbb{C}^\times)^m$.

ПРИМЕР 10.2. Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ – конфигурация из $m = 2\ell$ нулевых векторов и \mathcal{K} – пустой симплицальный комплекс на множестве $[m]$ (с m призрачными вершинами). Таким образом, данные $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ задают полный веер в 0-мерном пространстве. Тогда отображение $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^0$ нулевое и условие (б) из конструкции 10.1 тривиально выполняется. Условие (а) означает, что $\mathfrak{c} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^{2\ell} \xrightarrow{\text{Re}} \mathbb{R}^{2\ell}$ – изоморфизм вещественных пространств.

Рассмотрим пространство орбит $(\mathbb{C}^\times)^m / C_\Psi$ (заметим, что в нашем случае $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}^\times)^m$). Экспоненциальное отображение $\mathbb{C}^m \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^m$ отождествляет $(\mathbb{C}^\times)^m$ с факторпространством пространства \mathbb{C}^m по мнимой решетке $\Gamma = \mathbb{Z}\langle 2\pi i \mathbf{e}_1, \dots, 2\pi i \mathbf{e}_m \rangle$. Из условия (а) следует, что проекция $p: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m / \Psi(\mathfrak{c})$ невырождена на мнимом подпространстве в \mathbb{C}^m . В частности, $p(\Gamma)$ является решеткой ранга $m = 2\ell$ в $\mathbb{C}^m / \Psi(\mathfrak{c}) \cong \mathbb{C}^\ell$. Следовательно,

$$(\mathbb{C}^\times)^m / C_\Psi \cong (\mathbb{C}^m / \Gamma) / \Psi(\mathfrak{c}) = (\mathbb{C}^m / \Psi(\mathfrak{c})) / p(\Gamma) \cong \mathbb{C}^\ell / \mathbb{Z}^{2\ell}$$

– компактный комплексный ℓ -мерный тор.

Любой комплексный тор может быть получен таким образом. Действительно, рассмотрим отображение $\Psi: \mathfrak{c} \rightarrow \mathbb{C}^m$, заданное $(2\ell \times \ell)$ -матрицей $\begin{pmatrix} -B \\ E \end{pmatrix}$, где E – единичная матрица, а B – квадратная матрица размера ℓ . Тогда проекция $p: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m/\Psi(\mathfrak{c})$ задается матрицей $(E \ B)$ в соответствующих базисах, и комплексный тор $(\mathbb{C}^\times)^m/C_\Psi$ изоморфен факторпространству \mathbb{C}^ℓ по решетке $\mathbb{Z}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_\ell, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_\ell \rangle$, где \mathbf{b}_k – k -й столбец матрицы B . (Из условия (b) следует, что мнимая часть матрицы B невырождена.)

Например, при $\ell = 1$ отображение $\Psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ имеет вид $w \mapsto (\beta w, w)$ для некоторого $\beta \in \mathbb{C}$, а подгруппа (10.2) есть

$$C_\Psi = \{(e^{\beta w}, e^w)\} \subset (\mathbb{C}^\times)^2.$$

Условие (a) означает, что $\beta \notin \mathbb{R}$. Тогда $\exp \Psi: \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^2$ – мономорфизм и

$$(\mathbb{C}^\times)^2/C_\Psi \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}) = T_{\mathbb{C}}^1(\beta)$$

– комплексный 1-мерный тор с параметром решетки $\beta \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 10.3 [54]. Пусть данные $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ задают полный веер Σ в $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ и $m - n = 2\ell$. Рассмотрим подгруппу $C_\Psi \cong \mathbb{C}^\ell$, заданную формулой (10.2). Тогда:

(a) голоморфное действие группы C_Ψ на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственнo, и пространство орбит $U(\mathcal{K})/C_\Psi$ является компактным комплексным многообразием;

(b) пространство $U(\mathcal{K})/C_\Psi$ диффеоморфно многообразию $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$.

Таким образом, момент-угол-многообразие $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ допускает комплексную структуру, в которой тор \mathbb{T}^m действует голоморфными преобразованиями.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат, аналогичный теореме 10.3, был также получен Тамбуром [57]. Подход Тамбура несколько отличался от нашего; им были построены комплексные структуры на многообразиях $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, происходящих из рациональных звездчатых сфер \mathcal{K} (ассоциированных комплексов полных рациональных симплицальных вееров), путем отождествления многообразий $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ с классом обобщенных LVM-многообразий, описанных в работе Босио [9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10.3. Сначала докажем утверждение (a). Стабилизаторы действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ на $U(\mathcal{K})$ имеют вид $(\mathbb{C}^\times, 1)^I$, где $I \in \mathcal{K}$. Для того чтобы доказать, что подгруппа $C_\Psi \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ действует свободно, необходимо проверить, что C_Ψ имеет тривиальное пересечение со всеми стабилизаторами действия группы $(\mathbb{C}^\times)^m$. Так как группа C_Ψ мономорфно отображается в $\mathbb{R}_{>}^m$ (см. (10.1)), достаточно проверить, что ее образ в $\mathbb{R}_{>}^m$ пересекает образ $(\mathbb{C}^\times, 1)^I$ в $\mathbb{R}_{>}^m$ тривиально. Образ группы C_Ψ есть R , а образ группы $(\mathbb{C}^\times, 1)^I$ есть $(\mathbb{R}_{>}, 1)^I$; тривиальность их пересечения вытекает из теоремы 9.2, (a).

Теперь докажем собственность действия. Рассмотрим проекцию $\pi: U(\mathcal{K}) \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}}$ на пространство орбит действия тора \mathbb{T}^m и коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} C_\Psi \times U(\mathcal{K}) & \xrightarrow{h_{\mathbb{C}}} & U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K}) \\ \downarrow f \times \pi & & \downarrow \pi \times \pi \\ R \times (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}} & \xrightarrow{h_{\mathbb{R}}} & (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}} \times (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}} \end{array}$$

где $h_{\mathbb{C}}$ обозначают $h_{\mathbb{R}}$ отображения действий групп, а $f: C_{\Psi} \rightarrow R$ – изоморфизм, задаваемый ограничением отображения $|\cdot|: (\mathbb{C}^{\times})^m \rightarrow \mathbb{R}_{>}^m$. Прообраз $h_{\mathbb{C}}^{-1}(V)$ компактного подмножества $V \in U(\mathcal{K}) \times U(\mathcal{K})$ является замкнутым множеством в $W = (f \times \pi)^{-1} \circ h_{\mathbb{R}}^{-1} \circ (\pi \times \pi)(V)$. Образ $(\pi \times \pi)(V)$ компактен, действие группы R на $(\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}}$ существенно по теореме 9.2, (а), а отображение $f \times \pi$ существенно как проекция на пространство орбит действия компактной группы. Следовательно, W – компактное подмножество в $C_{\Psi} \times U(\mathcal{K})$, а $h_{\mathbb{C}}^{-1}(V)$ компактно как замкнутое подмножество в W .

Группа $C_{\Psi} \cong \mathbb{C}^I$ действует голоморфно, свободно и существенно на комплексном многообразии $U(\mathcal{K})$, и пространство орбит $U(\mathcal{K})/C_{\Psi}$ имеет комплексную структуру.

Как и в доказательстве теоремы 9.2, можно построить голоморфный атлас многообразия $U(\mathcal{K})/C_{\Psi}$. Так как действие группы C_{Ψ} на факторпространстве $U(\mathcal{K})/\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^{\mathcal{K}}$ совпадает с действием группы R на том же пространстве, пространство орбит действия тора \mathbb{T}^m на $U(\mathcal{K})/C_{\Psi}$ имеет ту же самую структуру гладкого многообразия с углами, что и пространство орбит действия \mathbb{T}^m на $U(\mathcal{K})/R$ (см. доказательство теоремы 9.2). Эта структура задается атласом $\{q_I: (\mathbb{R}_{\geq}, \mathbb{R}_{>})^I/R \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^n\}$, который поднимается до покрытия многообразия $U(\mathcal{K})/C_{\Psi}$ открытыми подмножествами $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{\times})^I/C_{\Psi}$. Для любого $I \in \mathcal{K}$ подмножество $(\mathbb{C}, \mathbb{T})^I \subset (\mathbb{C}, \mathbb{C}^{\times})^I$ пересекает каждую орбиту действия группы C_{Ψ} на $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{\times})^I$ трансверсально в единственной точке. Поэтому каждое факторпространство $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{\times})^I/C_{\Psi} \cong (\mathbb{C}, \mathbb{T})^I$ наделяется структурой комплексного многообразия. Так как $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{\times})^I \cong \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^{\times})^{m-n}$, а действие группы C_{Ψ} на множителе $(\mathbb{C}^{\times})^{m-n}$ свободно, комплексное многообразие $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{\times})^I/C_{\Psi}$ является тотальным пространством голоморфного \mathbb{C}^n -расслоения над комплексным тором $(\mathbb{C}^{\times})^{m-n}/C_{\Psi}$ (см. пример 10.2). Записав тривиализации этих \mathbb{C}^n -расслоений для всех I , мы получим голоморфный атлас для $U(\mathcal{K})/C_{\Psi}$.

Доказательство утверждения (b) повторяет доказательство утверждения (b) теоремы 9.2. Нам необходимо показать, что каждая C_{Ψ} -орбита пересекает подмножество $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \subset U(\mathcal{K})$ в единственной точке. Вначале мы показываем, что C_{Ψ} -орбита любой точки факторпространства $U(\mathcal{K})/\mathbb{T}^m$ пересекает $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/\mathbb{T}^m = \text{ss}(\mathcal{K})$ в единственной точке; это следует из того, что действия групп C_{Ψ} и R на $U(\mathcal{K})/\mathbb{T}^m$ совпадают. Затем мы показываем, что каждая C_{Ψ} -орбита пересекает прообраз $\pi^{-1}(\text{ss}(\mathcal{K}))$ в единственной точке, используя тот факт, что подгруппы C_{Ψ} и \mathbb{T}^m имеют тривиальное пересечение в $(\mathbb{C}^{\times})^m$. Теорема доказана.

ПРИМЕР 10.4 (многообразие Хопфа). Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}$ – набор векторов, которые порождают пространство $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют линейному соотношению $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_{n+1} \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{0}$, где все λ_k положительны: $\lambda_k > 0$. Пусть Σ – полный симплицальный веер в $N_{\mathbb{R}}$, конусы которого порождены собственными подмножествами множества $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}$. Чтобы сделать число $m - n$ четным, мы добавим еще один призрачный вектор \mathbf{a}_{n+2} . Тогда $m = n + 2$, $\ell = 1$, и мы имеем еще одно соотношение $\mu_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \mu_{n+1} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} = \mathbf{0}$, где $\mu_k \in \mathbb{R}$. Подпространство $\text{Ker } A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ порождено наборами $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, 0)$ и $(\mu_1, \dots, \mu_{n+1}, 1)$.

Тогда $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ есть граница n -мерного симплекса с $n + 1$ вершиной и одной призрачной вершиной, $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \cong S^{2n+1} \times S^1$ и $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{C}^\times$.

Условия (а) и (б) из конструкции 10.1 означают, что C_Ψ есть 1-мерная подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^m$, заданная в соответствующих координатах формулой

$$C_\Psi = \{(e^{\zeta_1 w}, \dots, e^{\zeta_{n+1} w}, e^w) : w \in \mathbb{C}\} \subset (\mathbb{C}^\times)^m,$$

где $\zeta_k = \mu_k + \alpha \lambda_k$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Заменяя базис в пространстве Кер A при необходимости, можно считать, что $\alpha = i$. Момент-угол-многообразие $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \cong S^{2n+1} \times S^1$ приобретает комплексную структуру как факторпространство $U(\mathcal{K})/C_\Psi$:

$$\begin{aligned} & (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbb{C}^\times / \{(z_1, \dots, z_{n+1}, t) \sim (e^{\zeta_1 w} z_1, \dots, e^{\zeta_{n+1} w} z_{n+1}, e^w t)\} \\ & \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) / \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \sim (e^{2\pi i \zeta_1} z_1, \dots, e^{2\pi i \zeta_{n+1}} z_{n+1})\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $t \in \mathbb{C}^\times$. В правой части стоит пространство орбит диагонализруемого действия группы \mathbb{Z} на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Оно называется *многообразием Хопфа*. При $n = 0$ мы получаем комплексный тор (эллиптическую кривую) из примера 10.2.

Теорему 10.3 можно обобщить следующим образом на многообразия, получаемые факторизацией момент-угол-многообразий $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ по свободно действующим подгруппам $H \subset \mathbb{T}^m$ (см. [14; §8.5]). Эта конструкция включает торические многообразия и LVM-многообразия.

Конструкция 10.5. Пусть Σ – полный симплицальный веер в пространстве $N_{\mathbb{R}}$, задаваемый данными $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, и $H \subset \mathbb{T}^m$ – подгруппа, действующая свободно на соответствующем момент-угол-многообразии $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. Тогда H представляет собой произведение тора и конечной группы, а $h = \dim H \leq m - n$ согласно предложению 6.7 (подгруппа H должна иметь тривиальное пересечение с n -мерными координатными подгруппами в \mathbb{T}^m). При некоторых дополнительных условиях на подгруппу H мы определим голоморфную подгруппу D в $(\mathbb{C}^\times)^m$ и введем комплексную структуру на факторпространстве $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/H$ путем отождествления его с факторпространством $U(\mathcal{K})/D$.

Дополнительное условие заключается в согласованности с данными, задающими веер. Рассмотрим отображение $A_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^m \rightarrow N_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{a}_i$, и пусть $\mathfrak{h} \subset \mathbb{R}^m$ – алгебра Ли подгруппы $H \subset \mathbb{T}^m$. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{h} \subset \text{Ker } A_{\mathbb{R}}$. Кроме того, мы предположим, что число $m - n - h = 2\ell$ чётно (этого всегда можно достичь, добавляя нулевой вектор к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$). Пусть $T = \mathbb{T}^m/H$ с алгеброй Ли \mathfrak{t} и пусть $\rho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{t}$ – отображение алгебр Ли, соответствующее проекции $\mathbb{T}^m \rightarrow T$ на факторгруппу.

Рассмотрим комплексное пространство $\mathfrak{c} \cong \mathbb{C}^\ell$ и выберем линейное отображение $\Omega: \mathfrak{c} \rightarrow \mathbb{C}^m$, удовлетворяющее двум условиям:

- (а) композиция $\mathfrak{c} \xrightarrow{\Omega} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\text{Re}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\rho} \mathfrak{t}$ является мономорфизмом;
- (б) композиция $\mathfrak{c} \xrightarrow{\Omega} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\text{Re}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} N_{\mathbb{R}}$ является нулевой.

Эквивалентно, выберем комплексное подпространство $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ такое, что композиция $\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{Re}} \mathfrak{t}$ является мономорфизмом.

Как и в конструкции 10.1, $\exp \Omega(\mathfrak{c}) \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ является голоморфной подгруппой, изоморфной \mathbb{C}^ℓ . Пусть $H_{\mathbb{C}} \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ – комплексификация группы H (группа $H_{\mathbb{C}}$ изоморфна произведению алгебраического тора размерности h и конечной группы). Из условия (а) следует, что подгруппы $H_{\mathbb{C}}$ и $\exp \Omega(\mathfrak{c})$ имеют тривиальное пересечение в $(\mathbb{C}^\times)^m$. Поэтому мы можем определить комплексную $(h + \ell)$ -мерную подгруппу

$$D_{H,\Omega} = H_{\mathbb{C}} \times \exp \Omega(\mathfrak{c}) \subset (\mathbb{C}^\times)^m. \quad (10.3)$$

ТЕОРЕМА 10.6 [54; теорема 3.7]. Пусть Σ , \mathcal{X} и $D_{H,\Omega}$ определены как выше.

(а) Голоморфное действие группы $D_{H,\Omega}$ на $U(\mathcal{X})$ свободно и собственнo, а пространство орбит $U(\mathcal{X})/D_{H,\Omega}$ имеет структуру компактного комплексного многообразия комплексной размерности $m - h - \ell$.

(б) Существует диффеоморфизм между $U(\mathcal{X})/D_{H,\Omega}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}/H$, задающий комплексную структуру на многообразии $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}/H$, в которой тор $T = \mathbb{T}^m/H$ действует голоморфными преобразованиями.

Мы опустим доказательство; оно аналогично доказательству теоремы 10.3.

ПРИМЕР 10.7. 1. Если H – тривиальная подгруппа ($h = 0$), то мы получаем теорему 10.3.

2. Пусть H – диагональная окружность в \mathbb{T}^m . Условие $\mathfrak{h} \subset \text{Ker } A_{\mathbb{R}}$ означает, что сумма векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ равна нулю; этого всегда можно добиться, растягивая векторы (так как Σ – полный веер). В результате мы получаем комплексную структуру на пространстве орбит $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}/S^1$ диагонального действия окружности, при условии, что $m - n$ нечетно. В случае многогранников, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_P$, пространство орбит $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}/S^1$ вкладывается в $\mathbb{C}^m \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}P^{m-1}$ как пересечение однородных квадратиков (8.2) и комплексная структура на $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}/S^1$ совпадает со структурой *LVM-многообразия* (см. раздел 8).

3. Пусть $h = \dim H = m - n$. Тогда $\mathfrak{h} = \text{Ker } A$. Так как \mathfrak{h} является алгеброй Ли тора, $(m - n)$ -мерное подпространство $\text{Ker } A \subset \mathbb{R}^m$ рационально. В силу двойственности Гейла, веер Σ также рационален. Мы имеем $\ell = 0$, $D_{H,\Omega} = H_{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n}$ и $U(\mathcal{X})/H_{\mathbb{C}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{X}}/H$ – торическое многообразие, соответствующее вееру Σ .

Как показано в работе Исиды [36], любое компактное комплексное многообразие с *максимальным* эффективным голоморфным действием тора биголоморфно факторпространству $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}/H$ момент-угол-многообразия с комплексной структурой, задаваемой теоремой 10.6. (Эффективное действие тора T^k на m -мерном многообразии M называется *максимальным*, если стабилизатор некоторой точки $x \in M$ имеет размерность $m - k$; двумя крайними случаями являются свободное действие тора на себе и действие тора половинной размерности на торическом многообразии.) Рассуждение, использованное в [36] для восстановления веера Σ по максимальному голоморфному действию тора, основано на работах [37] и [38], где этот результат был доказан в частных случаях. Основной результат работы [38] дает следующее чисто комплексно-аналитическое описание неособых компактных торических многообразий V_{Σ} .

ТЕОРЕМА 10.8 [38; теорема 1]. Пусть M – компактное связное комплексное многообразие комплексной размерности n , на котором тор T^n действует голоморфными преобразованиями. Если действие имеет неподвижные точки, то существуют полный регулярный веер Σ и T^n -эквивариантный биголоморфизм между V_Σ и M .

11. Голоморфные главные расслоения над торическими многообразиями и когомологии Дольбо

В случае рациональных симплицальных нормальных вееров Σ_P конструкция Мерсмана–Верховского [44] описывает соответствующее проективное торическое многообразие V_P как базу голоморфного главного расслоения Зейферта, тотальным пространством которого является момент-угол-многообразие \mathcal{Z}_P с комплексной структурой LVM-многообразия, а слоем является компактный комплексный тор комплексной размерности $\ell = (m-n)/2$. (Расслоения Зейферта являются обобщениями голоморфных расслоений на случай, когда база является орбиобразом.) Если проективное торическое многообразие V_P неособо, то имеется голоморфное свободное действие комплексного ℓ -мерного тора $T_\mathbb{C}^\ell$ на \mathcal{Z}_P с пространством орбит V_P .

С использованием конструкции комплексной структуры на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, описанной в предыдущем разделе, в работе [54] были построены голоморфные расслоения (Зейферта) с тотальным пространством $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для произвольных полных рациональных вееров Σ . Применяя спектральную последовательность Бореля к голоморфному расслоению $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \rightarrow V_\Sigma$, можно описать когомологии Дольбо многообразия $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и явно вычислить некоторые числа Ходжа.

Здесь мы дополнительно предполагаем, что множество целочисленных линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ является решеткой полного ранга (дискретной подгруппой, изоморфной \mathbb{Z}^n) в пространстве $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$. Мы обозначим эту решетку через $N_\mathbb{Z}$ или просто N . Наше предположение означает, что полный симплицальный веер Σ , задаваемый данными $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, является рациональным. Мы считаем число $m - n$ четным и полагаем $\ell = (m - n)/2$.

В силу предположения о рациональности, формула (6.2) задает алгебраическую группу G . Кроме того, так как мы определили N как решетку, порожденную векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, группа G изоморфна $(\mathbb{C}^\times)^{2\ell}$ (т. е. не содержит конечных сомножителей). Заметим, что группа C_Ψ лежит в G как ℓ -мерная комплексная подгруппа. Это вытекает из условия (b') в конструкции 10.1.

Факторконструкция (см. п. 6.4) описывает торическое многообразие V_Σ как пространство орбит $U(\mathcal{K})/G$ при условии, что векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ суть примитивные образующие ребер веера Σ . В нашем наборе данных $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ не обязательно примитивны в решетке, порожденной ими. Тем не менее пространство орбит $U(\mathcal{K})/G$ по-прежнему изоморфно торическому многообразию V_Σ (см. [2; предложение II.3.1.7]). Действительно, пусть $\mathbf{a}'_i \in N$ – примитивный вектор вдоль \mathbf{a}_i , т. е. $\mathbf{a}_i = r_i \mathbf{a}'_i$ для некоторого положительного целого r_i . Тогда мы имеем конечное разветвленное накрытие

$$U(\mathcal{K}) \rightarrow U(\mathcal{K}), \quad (z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_1^{r_1}, \dots, z_m^{r_m}),$$

которое отображает группу G , задаваемую векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, в группу G , задаваемую векторами $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_m$ (см. (6.2)). Таким образом, мы получаем накрытие $U(\mathcal{X})/G \rightarrow U(\mathcal{X})/G'$ торического многообразия $V_\Sigma \cong U(\mathcal{X})/G \cong U(\mathcal{X})/G'$ над самим собой. Имея это в виду, мы можем связать пространства орбит $V_\Sigma \cong U(\mathcal{X})/G$ и $\mathcal{Z}_\mathcal{X} \cong U(\mathcal{X})/C_\Psi$ следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. Пусть данные $\{\mathcal{X}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ задают полный симплицальный рациональный веер Σ , и пусть G и C_Ψ – группы, заданные формулами (6.2) и (10.2).

(а) Торическое многообразие V_Σ гомеоморфно пространству орбит голоморфного действия компактного комплексного тора G/C_Ψ на $\mathcal{Z}_\mathcal{X}$.

(б) Если веер Σ регулярен, то многообразие V_Σ является базой голоморфного главного расслоения с тотальным пространством $\mathcal{Z}_\mathcal{X}$ и слоем – компактный комплексный тор G/C_Ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения (а) заметим, что

$$V_\Sigma = U(\mathcal{X})/G = (U(\mathcal{X})/C_\Psi)/(G/C_\Psi) \cong \mathcal{Z}_\mathcal{X}/(G/C_\Psi),$$

где мы воспользовались теоремой 10.3. Факторгруппа G/C_Ψ является компактным комплексным ℓ -тором, как описано в примере 10.2. Для доказательства утверждения (б) заметим, что голоморфное действие группы G на $U(\mathcal{X})$ свободно в силу предложения 6.7, и то же верно для действия группы G/C_Ψ на $\mathcal{Z}_\mathcal{X}$. Голоморфное свободное действие тора G/C_Ψ задает главное расслоение. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и в случае проективных многообразий, рассмотренном в [44], если веер Σ не является регулярным, то проекция на пространство орбит $\mathcal{Z}_\mathcal{X} \rightarrow V_\Sigma$ из предложения 11.1, (а) является голоморфным расслоением Зейферта для соответствующей структуры орбиобразия на V_Σ .

Пусть M – комплексное n -мерное многообразие. Пространство $\Omega_{\mathbb{C}}^*(M)$ комплексных дифференциальных форм на M раскладывается в прямую сумму пространств (p, q) -форм, $\Omega_{\mathbb{C}}^*(M) = \bigoplus_{0 \leq p, q \leq n} \Omega^{p, q}(M)$, и определен дифференциал

Дольбо $\bar{\partial}: \Omega^{p, q}(M) \rightarrow \Omega^{p, q+1}(M)$. Размерности $h^{p, q}(M)$ групп когомологий Дольбо $H_{\bar{\partial}}^{p, q}(M)$ называются числами Ходжа многообразия M . Они являются важными инвариантами комплексной структуры на M .

Когомологии Дольбо компактного комплексного ℓ -мерного тора $T_{\mathbb{C}}^\ell$ изоморфны внешней алгебре от 2ℓ образующих:

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(T_{\mathbb{C}}^\ell) \cong \Lambda[\xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell], \quad (11.1)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_\ell \in H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^\ell)$ – классы базисных голоморфных 1-форм, а $\eta_1, \dots, \eta_\ell \in H_{\bar{\partial}}^{0,1}(T_{\mathbb{C}}^\ell)$ – классы базисных антиголоморфных 1-форм. В частности, числа Ходжа задаются формулой $h^{p, q}(T_{\mathbb{C}}^\ell) = \binom{\ell}{p} \binom{\ell}{q}$.

Когомологии де Рама неособого полного торического многообразия V_Σ допускают разложение Ходжа, нетривиальные компоненты которого имеют биградуировку (p, p) , $0 \leq p \leq n$ [20; § 12]. Это вместе с результатом Данилова–Юркевича (см. [20; § 10]), описывающим обычные когомологии многообразия V_Σ , дает следующее описание когомологий Дольбо:

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(V_\Sigma) \cong \mathbb{C}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I}_{\mathcal{K}} + \mathcal{I}_\Sigma), \quad (11.2)$$

где $v_i \in H_{\bar{\partial}}^{1,1}(V_\Sigma)$ – классы когомологий, соответствующие инвариантным дивизорам (по одному на каждый одномерный конус в Σ), идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ порожден мономами $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, для которых векторы $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}$ не порождают конус в Σ (идеал *Стенли–Райснера* симплицциального комплекса \mathcal{K}), а идеал \mathcal{I}_Σ порожден линейными формами $\sum_{j=1}^m \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u} \rangle v_j$, $\mathbf{u} \in N^*$. Мы имеем $h^{p,p}(V_\Sigma) = h_p$, где (h_0, h_1, \dots, h_n) есть h -вектор комплекса \mathcal{K} [14; § 2.1] и $h^{p,q}(V_\Sigma) = 0$ при $p \neq q$.

ТЕОРЕМА 11.2 [54]. Пусть данные $\{\mathcal{K}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ задают полный регулярный веер Σ в $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, $m - n = 2\ell$, и пусть $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ – соответствующее момент-угол-многообразию с комплексной структурой, определяемой теоремой 10.3. Тогда алгебра когомологий Дольбо $H_{\bar{\partial}}^{*,*}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ изоморфна когомологиям дифференциальной биградуированной алгебры

$$[\Lambda[\xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell] \otimes H_{\bar{\partial}}^{*,*}(V_\Sigma), d] \quad (11.3)$$

с дифференциалом d бистепени $(0, 1)$, заданным следующим образом:

$$dv_i = d\eta_j = 0, \quad d\xi_j = c(\xi_j), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq \ell,$$

где $c: H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^\ell) \rightarrow H^2(V_\Sigma, \mathbb{C}) = H_{\bar{\partial}}^{1,1}(V_\Sigma)$ – отображение первого класса Чженя главного $T_{\mathbb{C}}^\ell$ -расслоения $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow V_\Sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем понятие минимальной модели Дольбо комплексного многообразия [27; § 4.3]. Пусть $[B, d_B]$ – такая модель для V_Σ , т. е. $[B, d_B]$ – минимальная коммутативная биградуированная дифференциальная алгебра, для которой задан квазиизоморфизм $f: B^{*,*} \rightarrow \Omega^{*,*}(V_\Sigma)$ (т. е. f коммутирует с дифференциалами d_B и \bar{d} и индуцирует изоморфизм в когомологиях). Рассмотрим дифференциальную биградуированную алгебру

$$[\Lambda[\xi_1, \dots, \xi_\ell, \eta_1, \dots, \eta_\ell] \otimes B, d], \quad (11.4)$$

где $d|_B = d_B$, $d(\xi_i) = c(\xi_i) \in B^{1,1} = H_{\bar{\partial}}^{1,1}(V_\Sigma)$, $d(\eta_i) = 0$.

Согласно [27; следствие 4.66], эта алгебра является моделью для когомологий Дольбо тотального пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ главного $T_{\mathbb{C}}^\ell$ -расслоения $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow V_\Sigma$ при условии, что многообразие V_Σ формально в сильном смысле. Напомним (см. [27; определение 4.58]), что комплексное многообразие M формально

в сильном смысле, если существует дифференциальная биградуированная алгебра $[Z, \delta]$ вместе с квазиизоморфизмами

$$\begin{array}{ccc} [\Omega^{*,*}, \bar{\partial}] & \xleftarrow{\simeq} & [Z, \delta] & \xrightarrow{\simeq} & [\Omega^*, d_{\text{DR}}] \\ & & \downarrow \simeq & & \\ & & [H_{\bar{\partial}}^{*,*}(M), 0] & & \end{array}$$

связывающими алгебры форм де Рама, Дольбо и когомологии Дольбо.

Торическое многообразие V_{Σ} формально в обычном смысле (когомологий де Рама) в силу [53; следствие 7.2]. Кроме того, наличие разложения Ходжа из [20; § 12] влечет, что V_{Σ} удовлетворяет $\partial\bar{\partial}$ -лемме [27; лемма 4.24]. Рассуждение, использованное при доказательстве результата [27; теорема 4.59] показывает, что многообразие V_{Σ} формально в сильном смысле, а (11.4) является моделью для его когомологий Дольбо.

Обычная формальность многообразия V_{Σ} означает существование квазиизоморфизма $\phi_B: B \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{*,*}(V_{\Sigma})$, который продолжается до квазиизоморфизма

$$\text{id} \otimes \phi_B: [\Lambda[\xi_1, \dots, \xi_{\ell}, \eta_1, \dots, \eta_{\ell}] \otimes B, d] \rightarrow [\Lambda[\xi_1, \dots, \xi_{\ell}, \eta_1, \dots, \eta_{\ell}] \otimes H_{\bar{\partial}}^{*,*}(V_{\Sigma}), d]$$

в силу [26; лемма 14.2]. Следовательно, дифференциальная биградуированная алгебра $[\Lambda[\xi_1, \dots, \xi_{\ell}, \eta_1, \dots, \eta_{\ell}] \otimes H_{\bar{\partial}}^{*,*}(V_{\Sigma}), d]$ является моделью когомологий Дольбо многообразия $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$, что и требовалось. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если торическое многообразие V_{Σ} проективно, то оно кэлерово. В этом случае модель из теоремы 11.2 совпадает с моделью для когомологий Дольбо тотального пространства голоморфного главного торического расслоения над кэлеровым многообразием [27; теорема 4.65].

Отображение первого класса Чженя c из теоремы 11.2 можно описать явно в терминах отображения Ψ , задающего комплексную структуру на момент-угломногообразии $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$. Рассмотрим отображение $A_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^m \rightarrow N_{\mathbb{C}}$, $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{a}_i$, и двойственную по Гейлу матрицу $\Gamma = (\gamma_{jk})$ размера $(m-n) \times m$, столбцы которой образуют базис линейных зависимостей между векторами $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Согласно конструкции 10.1, $\text{Im } \Psi \subset \text{Ker } A_{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\text{Ann } U$ аннулятор линейного подпространства $U \subset \mathbb{C}^m$, т. е. подпространство линейных функций на \mathbb{C}^m , обращающихся в нуль на U .

ЛЕММА 11.3. *Отображение первого класса Чженя*

$$c: H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^{\ell}) \rightarrow H^2(V_{\Sigma}, \mathbb{C}) = H_{\bar{\partial}}^{1,1}(V_{\Sigma})$$

главного $T_{\mathbb{C}}^{\ell}$ -расслоения $\mathcal{X}_{\mathcal{H}} \rightarrow V_{\Sigma}$ задается композицией

$$\text{Ann Im } \Psi / \text{Ann Ker } A_{\mathbb{C}} \xrightarrow{i} \mathbb{C}^m / \text{Ann Ker } A_{\mathbb{C}} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^{m-k} / \text{Ann Ker } A_{\mathbb{C}},$$

где i – вложение, k есть число нулевых векторов среди $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, а p – проекция, забывающая координаты в \mathbb{C}^m , соответствующие нулевым векторам.

В явном виде значение отображения c на образующих группы $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^{\ell})$ задается формулой

$$c(\xi_j) = \mu_{j1}v_1 + \dots + \mu_{jm}v_m, \quad 1 \leq j \leq \ell,$$

где $M = (\mu_{jk})$ – матрица размера $\ell \times m$, удовлетворяющая двум условиям:

- (а) $GM^t: \mathbb{C}^{\ell} \rightarrow \mathbb{C}^{2\ell}$ – мономорфизм;
- (б) $M\Psi = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_{\mathbb{C}}^t: N_{\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathbb{C}^m$, $\mathbf{u} \mapsto (\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{u} \rangle, \dots, \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{u} \rangle)$, – двойственное отображение. Мы имеем

$$H^1(T_{\mathbb{C}}^{\ell}; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^m / \text{Im } A_{\mathbb{C}}^t = (\text{Ker } A_{\mathbb{C}})^*, \quad H^2(V_{\Sigma}; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{m-k} / \text{Im } A_{\mathbb{C}}^t.$$

Отображение первого класса Чженя $c: H^1(T_{\mathbb{C}}^{\ell}; \mathbb{C}) \rightarrow H^2(V_{\Sigma}; \mathbb{C})$ (трансгрессия) задается проекцией $p: \mathbb{C}^m / \text{Im } A_{\mathbb{C}}^t \rightarrow \mathbb{C}^{m-k} / \text{Im } A_{\mathbb{C}}^t$. Для того чтобы выделить голоморфную часть отображения c , нам нужно выделить подпространство голоморфных дифференциалов $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^{\ell}) \cong \mathbb{C}^{\ell}$ внутри пространства всех 1-форм $H^1(T_{\mathbb{C}}^{\ell}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2\ell}$. Так как

$$T_{\mathbb{C}}^{\ell} = G/C_{\Psi} = (\text{Ker } \exp A_{\mathbb{C}}) / (\exp \text{Im } \Psi),$$

голоморфные дифференциалы на торе $T_{\mathbb{C}}^{\ell}$ соответствуют \mathbb{C} -линейным функциям на $\text{Ker } A_{\mathbb{C}}$, которые обращаются в нуль на $\text{Im } \Psi$. Пространство функций на $\text{Ker } A_{\mathbb{C}}$ есть $\mathbb{C}^m / \text{Im } A_{\mathbb{C}}^t = \mathbb{C}^m / \text{Ann } \text{Ker } A_{\mathbb{C}}$, а функции, обращающиеся в нуль на $\text{Im } \Psi$, образуют подпространство $\text{Ann } \text{Im } \Psi / \text{Ann } \text{Ker } A_{\mathbb{C}}$. Условие (б) означает в точности, что линейные функции на \mathbb{C}^m , соответствующие строкам матрицы M , обращаются в нуль на $\text{Im } \Psi$. Условие (а) означает, что строки матрицы M составляют базис в дополнении к $\text{Ann } \text{Ker } A_{\mathbb{C}}$ в $\text{Ann } \text{Im } \Psi$. Лемма доказана.

Интересно сравнить теорему 11.2 со следующим описанием когомологий де Рама многообразия $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$.

ТЕОРЕМА 11.4 [14; теорема 7.36]. Пусть многообразия $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ и V_{Σ} – те же, что и в теореме 11.2. Когомологии де Рама $H^*(\mathcal{X}_{\mathcal{H}})$ изоморфны когомологиям дифференциальной градуированной алгебры

$$[\Lambda[u_1, \dots, u_{m-n}] \otimes H^*(V_{\Sigma}), d],$$

где $\deg u_j = 1$, $\deg v_i = 2$, а дифференциал d задан как

$$dv_i = 0, \quad du_j = \gamma_{j1}v_1 + \dots + \gamma_{jm}v_m, \quad 1 \leq j \leq m-n.$$

Эта теорема вытекает из более общего результата [14; теорема 8.1], описывающего алгебру когомологий многообразия $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$. Дополнительную информацию об алгебре $H^*(\mathcal{X}_{\mathcal{H}})$ можно найти в [14; гл. 8] и [52; § 4].

Есть две классические спектральные последовательности для когомологий Дольбо. Первая из них, спектральная последовательность Бореля [8] голоморфного расслоения $E \rightarrow B$ с компактным кэлеровым слоем F , имеет член

$E_2 = H_{\bar{\partial}}(B) \otimes H_{\bar{\partial}}(F)$ и сходится к $H_{\bar{\partial}}(E)$. Вторая, *спектральная последовательность Фрѐлихера* [32; § 3.5], имеет в качестве члена E_1 когомологии Дольбо комплексного многообразия M и сходится к его когомологиям де Рама. Теорема 11.2 влечет следующие результаты о вырождении этих спектральных последовательностей.

СЛЕДСТВИЕ 11.5. (а) *Спектральная последовательность Бореля голоморфного главного расслоения $\mathcal{L}\mathcal{X} \rightarrow V_{\Sigma}$ вырождается в члене E_3 , т. е. $E_3 = E_{\infty}$.*

(б) *Спектральная последовательность Фрѐлихера для $\mathcal{L}\mathcal{X}$ вырождается в члене E_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения (а) заметим, что дифференциальная алгебра (11.3) есть член E_2 спектральной последовательности Бореля, а ее когомологии есть член E_3 .

Сравнивая алгебры когомологий Дольбо и де Рама, описанные в теоремах 11.2 и 11.4, мы получаем, что элементы $\eta_1, \dots, \eta_{\ell} \in E_1^{0,1}$ не могут выжить в члене E_{∞} спектральной последовательности Фрѐлихера. Единственным нетривиальным дифференциалом на этих элементах является $d_1: E_1^{0,1} \rightarrow E_1^{1,1}$. В силу теоремы 11.4, когомологии алгебры $[E_1, d_1]$ суть в точности когомологии де Рама многообразия $\mathcal{L}\mathcal{X}$, что доказывает утверждение (б).

Следствие доказано.

Теорему 11.4 также можно трактовать как результат о вырождении спектральной последовательности Лере–Серра главного T^{m-n} -расслоения $\mathcal{L}\mathcal{X} \rightarrow V_{\Sigma}$.

Для вычисления чисел Ходжа нам понадобятся следующие оценки на размерность пространства $\text{Ker } c$ в лемме 11.3.

ЛЕММА 11.6. *Пусть k – число нулевых векторов среди $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Тогда*

$$k - \ell \leq \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(c: H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^{\ell}) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{1,1}(V_{\Sigma})) \leq \frac{k}{2}.$$

В частности, c является мономорфизмом при $k \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ann Im } \Psi / \text{Ann Ker } A_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^m / \text{Ann Ker } A_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{p} & \mathbb{C}^{m-k} / \text{Ann Ker } A_{\mathbb{C}} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \text{Re} & & \downarrow \text{Re} \\ \mathbb{R}^{m-n} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R}^{m-n} & \xrightarrow{p'} & \mathbb{R}^{m-n-k} \end{array}$$

Левая вертикальная стрелка является (\mathbb{R} -линейным) изоморфизмом, так как она имеет вид $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^{\ell}) \rightarrow H^1(T_{\mathbb{C}}^{\ell}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(T_{\mathbb{C}}^{\ell}, \mathbb{R})$, а любая вещественнозначная функция на решетке Γ , задающей тор $T_{\mathbb{C}}^{\ell} = \mathbb{C}^{\ell}/\Gamma$, является вещественной частью ограничения на Γ некоторой \mathbb{C} -линейной функции на \mathbb{C}^{ℓ} .

Так как диаграмма выше коммутативна, ядро отображения $c = p \circ i$ имеет вещественную размерность не больше k , что дает верхнюю оценку на его комплексную размерность. Для доказательства нижней оценки заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker } c \geq \dim H_{\bar{\partial}}^{1,0}(T_{\mathbb{C}}^{\ell}) - \dim H_{\bar{\partial}}^{1,1}(V_{\Sigma}) = \ell - (2\ell - k) = k - \ell$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 11.7. Пусть $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ – момент-угол-многообразие, удовлетворяющее условиям из теоремы 11.2 и пусть k – число нулевых векторов среди $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Тогда для чисел Ходжа $h^{p,q} = h^{p,q}(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ имеем:

- (a) $\binom{k-\ell}{p} \leq h^{p,0} \leq \binom{[k/2]}{p}$ при $p \geq 0$; в частности, $h^{p,0} = 0$ при $k \leq 1$ и $p > 0$;
- (b) $h^{0,q} = \binom{\ell}{q}$ при $q \geq 0$;
- (c) $h^{1,q} = (\ell - k) \binom{\ell}{q-1} + h^{1,0} \binom{\ell+1}{q}$ при $q \geq 1$;
- (d) $\ell(3\ell+1)/2 - h_2(\mathcal{K}) - \ell k + (\ell+1)h^{2,0} \leq h^{2,1} \leq \ell(3\ell+1)/2 - \ell k + (\ell+1)h^{2,0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $A^{p,q}$ компоненту бистепени (p, q) дифференциальной алгебры из теоремы 11.2 и через $Z^{p,q} \subset A^{p,q}$ пространство d -коциклов. Тогда дифференциал $d^{1,0}: A^{1,0} \rightarrow Z^{1,1}$ совпадает с отображением c , и требуемые неравенства для $h^{1,0} = \dim \text{Ker } d^{1,0}$ уже доказаны в лемме 11.6. Так как $h^{p,0} = \dim \text{Ker } d^{p,0}$, а $\text{Ker } d^{p,0}$ есть p -я внешняя степень пространства $\text{Ker } d^{1,0}$, мы получаем утверждение (a).

Так как дифференциал тривиален на компоненте $A^{0,q}$, мы имеем $h^{0,q} = \dim A^{0,q}$, что доказывает утверждение (b).

Пространство $Z^{1,1}$ порождено коциклами v_i и $\xi_i \eta_j$, где $\xi_i \in \text{Ker } d^{1,0}$. Следовательно, $\dim Z^{1,1} = 2\ell - k + h^{1,0}\ell$. Кроме того, $\dim d(A^{1,0}) = \ell - h^{1,0}$, откуда $h^{1,1} = \ell - k + h^{1,0}(\ell + 1)$. Аналогично, $\dim Z^{1,q} = (2\ell - k) \binom{\ell}{q-1} + h^{1,0} \binom{\ell}{q}$ (с базисом из коциклов $v_i \eta_{j_1} \cdots \eta_{j_{q-1}}$ и $\xi_i \eta_{j_1} \cdots \eta_{j_q}$, где $\xi_i \in \text{Ker } d^{1,0}$, $j_1 < \cdots < j_q$), а образ дифференциала $d: A^{1,q-1} \rightarrow Z^{1,q}$ имеет размерность $(\ell - h^{1,0}) \binom{\ell}{q-1}$. Отсюда следует утверждение (c).

Мы имеем $A^{2,1} = U \oplus W$, где пространство U порождено мономами $\xi_i v_j$, а W порождено мономами $\xi_i \xi_j \eta_k$. Следовательно,

$$h^{2,1} = \dim U - \dim dU + \dim W - \dim dW - \dim dA^{2,0}. \quad (11.5)$$

Далее, $\dim U = \ell(2\ell - k)$, $0 \leq \dim dU \leq h_2(\mathcal{K})$ (так как $dU \subset H_{\bar{0}}^{2,2}(V_{\Sigma})$), $\dim W - \dim dW = \dim \text{Ker } d|_W = \ell h^{2,0}$ и $\dim dA^{2,0} = \binom{\ell}{2} - h^{2,0}$. Подставляя это в равенство (11.5), мы получаем неравенства из утверждения (d).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Чтобы размерность $\dim \mathcal{L}_{\mathcal{K}} = m + n$ стала четной, к комплексу \mathcal{K} необходимо добавить не более одной призрачной вершины. Так как $h^{p,0}(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $k \leq 1$, многообразию $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ не имеет голоморфных форм любой степени в этом случае.

Если $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ является тором (т.е. комплекс \mathcal{K} пустой), то $m = k = 2\ell$ и $h^{1,0}(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}) = h^{0,1}(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}) = \ell$. В противном случае из теоремы 11.7 следует, что $h^{1,0}(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}) < h^{0,1}(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$, а значит, момент-угол-многообразию $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ не является

кэлеровым (в случае многообразий, происходящих из многогранников, это было отмечено в [43; теорема 3]).

ПРИМЕР 11.8. Пусть $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \cong S^1 \times S^{2n+1}$ – многообразие Хопфа из примера 10.4. В силу нашего предположения о рациональности, векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+2}$ порождают n -мерную решетку N в пространстве $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$; в частности, веер Σ , задаваемый собственными подмножествами множества $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}$, рационален. Предположим дополнительно, что веер Σ регулярен (это эквивалентно соотношению $\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{0}$), так что Σ является нормальным веером дельзантова n -мерного симплекса Δ^n . Мы имеем $V_{\Sigma} = \mathbb{C}P^n$, и формула (11.2) описывает когомологии проективного пространства как факторкольцо многочленов $\mathbb{C}[v_1, \dots, v_{n+2}]$ по сумме двух идеалов: идеал \mathcal{I} порожден мономиями $v_1 \cdots v_{n+1}$ и v_{n+2} , а идеал \mathcal{J} порожден элементами $v_1 - v_{n+1}, \dots, v_n - v_{n+1}$. Тогда дифференциальная алгебра из теоремы 11.2 имеет вид $[\Lambda[\xi, \eta] \otimes \mathbb{C}[t]/t^{n+1}, d]$, где $dt = d\eta = 0$ и $d\xi = t$ при подходящем выборе образующей t . Нетривиальные классы когомологий представлены коциклами $1, \eta, \xi t^n$ и $\xi \eta t^n$, что дает следующие ненулевые числа Ходжа многообразия $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}$: $h^{0,0} = h^{0,1} = h^{n+1,n} = h^{n+1,n+1} = 1$. Заметим, что когомологии Дольбо и числа Ходжа не зависят от выбора комплексной структуры (т. е. от отображения Ψ).

ПРИМЕР 11.9 (многообразие Калаби–Экмана). Пусть $\{\mathcal{X}; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+2}\}$ – данные нормального веера произведения $P = \Delta^p \times \Delta^q$ двух дельзантовых симплексов, где $p+q = n$, $1 \leq p \leq q \leq n-1$. Таким образом, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{p+2}, \dots, \mathbf{a}_{n+1}$ есть базис решетки N и имеется два соотношения: $\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_{p+1} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{a}_{p+2} + \dots + \mathbf{a}_{n+2} = \mathbf{0}$. Соответствующее торическое многообразие V_{Σ} есть $\mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$, а его кольцо когомологий изоморфно факторкольцу $\mathbb{C}[x, y]/(x^{p+1}, y^{q+1})$. Отображение

$$\Psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n+2}, \quad w \mapsto (1, \dots, 1, \alpha w, \dots, \alpha w),$$

где число единиц равно $p+1$ и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям из конструкции 10.1. В результате мы получаем структуру комплексного многообразия на $\mathcal{L}_P \cong S^{2p+1} \times S^{2q+1}$, которое называется *многообразием Калаби–Экмана*. Мы будем обозначать многообразия, получаемые таким образом, через $CE(p, q)$ (комплексная структура зависит от выбора отображения Ψ , но мы не будем отражать этого в обозначениях). Каждое многообразие $CE(p, q)$ является тотальным пространством голоморфного главного расслоения над $\mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$ со слоем комплексный 1-мерный тор $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \alpha\mathbb{Z})$.

Из теоремы 11.2 и леммы 11.3 вытекает следующее описание кольца когомологий Дольбо многообразия $CE(p, q)$:

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(CE(p, q)) \cong H[\Lambda[\xi, \eta] \otimes \mathbb{C}[x, y]/(x^{p+1}, y^{q+1}), d],$$

где $dx = dy = d\eta = 0$ и $d\xi = x - y$ при подходящем выборе образующих x, y . Следовательно,

$$H_{\bar{\partial}}^{*,*}(CE(p, q)) \cong \Lambda[\omega, \eta] \otimes \mathbb{C}[x]/(x^{p+1}), \quad (11.6)$$

где $\omega \in H_{\bar{\partial}}^{q+1,q}(CE(p, q))$ – класс когомологий коцикла $\xi(x^{q+1} - y^{q+1})/(x - y)$. Это описание было изначально получено в [8; §9]. Заметим, что когомологии Дольбо многообразия Калаби–Экмана зависят только от p, q и не зависят от комплексного параметра α (или отображения Ψ).

ПРИМЕР 11.10. Пусть $P = \Delta^1 \times \Delta^1 \times \Delta^2 \times \Delta^2$. Тогда момент-угол-многообразиие \mathcal{Z}_P имеет две различные структуры произведения многообразий Калаби–Экмана, а именно $CE(1, 1) \times CE(2, 2)$ и $CE(1, 2) \times CE(1, 2)$. Используя изоморфизм (11.6), мы получаем, что эти два комплексных многообразия имеют различные числа Ходжа: $h^{2,1} = 1$ в первом случае и $h^{2,1} = 0$ во втором. Этот пример показывает, что выбор отображения Ψ влияет не только на комплексную структуру многообразия \mathcal{Z}_X , но также и на его числа Ходжа, что отличает его от предыдущих примеров комплексных торов, многообразий Хопфа и Калаби–Экмана. Это конечно не удивительно с точки зрения комплексного анализа.

12. Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия

В этом последнем разделе мы применяем накопленные знания о топологии момент-угол-многообразий в несколько иной области: лагранжевой геометрии. Системы вещественных квадрик, которые мы использовали в разделах 3 и 4 для определения момент-угол-многообразий, также задают новое большое семейство гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий в комплексном пространстве и более общих торических многообразиях.

Гамильтонова минимальность (сокращенно H -минимальность) лагранжевых подмногообразий является симплектическим аналогом минимальности в римановой геометрии. Лагранжево погружение называется H -минимальным, если вариация его объема вдоль любого гамильтонова векторного поля равна нулю. Это понятие было введено в работе О [51] в связи со знаменитой *гипотезой Арнольда* о числе неподвижных точек гамильтонова симплектоморфизма. Простейшим примером H -минимального лагранжева подмногообразия является координатный тор [51] $S_{r_1}^1 \times \cdots \times S_{r_m}^1 \subset \mathbb{C}^m$, где $S_{r_k}^1$ обозначает окружность радиуса $r_k > 0$ в k -м координатном подпространстве в \mathbb{C}^m . Другие примеры H -минимальных подмногообразий построены в работах [17], [34], [1] и других.

В работе [46] Мироновым была предложена общая конструкция H -минимальных лагранжевых погружений $N \looparrowright \mathbb{C}^m$, возникающих из пересечений вещественных квадрик. Им были использованы те же системы квадрик, которые появлялись у нас при определении момент-угол-многообразий, и, тем самым, мы можем применить методы торической топологии для анализа топологической структуры многообразий N . В работе [47] был получен эффективный критерий того, что погружение $N \looparrowright \mathbb{C}^m$ является вложением: многогранник, соответствующий пересечению квадрик, должен быть дельзантовым. В качестве следствия мы получаем, что любой дельзантов многогранник задает H -минимальное лагранжево подмногообразие $N \subset \mathbb{C}^m$. Как и в случае момент-угол-многообразий, топология многообразий N довольно сложна даже для многогранников малой размерности: например, дельзантов 5-угольник приводит к многообразию N , которое является тотальным пространством расслоения над 3-мерным тором со слоем поверхность рода 5. Более того, на основе применения конструкции Миронова совместно с конструкцией симплектической редукции в работе [48] было определено новое семейство H -минимальных лагранжевых подмногообразий в торических многообразиях. Это семейство включает многие из построенных ранее примеров подмногообразий в \mathbb{C}^m и $\mathbb{C}P^{m-1}$.

12.1. Предварительные сведения. Пусть (M, ω) есть симплектическое $2n$ -мерное многообразие. Погружение $i: N \looparrowright M$ многообразия N размерности n называется *лагранжевым*, если $i^*(\omega) = 0$. Если погружение i является вложением, то $i(N)$ называется *лагранжевым подмногообразием* в M . Векторное поле X на M называется *гамильтоновым*, если 1-форма $\omega(X, \cdot)$ точна.

Теперь предположим, что многообразие M является кэлеровым, т. е. на нем имеются согласованные риманова метрика и симплектическая структура. Лагранжево погружение $i: N \looparrowright M$ называется *гамильтоново-минимальным* (*H-минимальным*), если вариации объема образа $i(N)$ вдоль всех гамильтоновых векторных полей с компактным носителем равны нулю, т. е.

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(i_t(N)) \Big|_{t=0} = 0,$$

где $i_0(N) = i(N)$, $i_t(N)$ – деформация $i(N)$ вдоль гамильтонова векторного поля, а $\text{vol}(i_t(N))$ – объем деформированной части $i_t(N)$. Погружение называется *минимальным*, если вариации объема образа $i(N)$ вдоль *всех* векторных полей равны нулю.

Наш основной пример – это $M = \mathbb{C}^m$ с эрмитовой метрикой $2 \sum_{k=1}^m d\bar{z}_k \otimes dz_k$.

Ее мнимой частью является симплектическая форма из примера 5.1. В конце раздела мы рассмотрим более общий случай, когда M является торическим многообразием.

12.2. Конструкция. Мы рассмотрим пересечение квадратик, аналогичное пересечению (3.4), но в вещественном пространстве:

$$\mathcal{R} = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} u_k^2 = \delta_j \text{ при } 1 \leq j \leq m - n \right\}. \quad (12.1)$$

Предположим, что векторы коэффициентов $\gamma_i = (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{i, m-n, i})^t \in \mathbb{R}^{m-n}$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяют условиям невырожденности и рациональности:

- (a) $\delta \in \mathbb{R}_{\geq} \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$;
- (b) если $\delta \in \mathbb{R}_{\geq} \langle \gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_k} \rangle$, то $k \geq m - n$;
- (c) векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождают решетку $L \cong \mathbb{Z}^{m-n}$ в \mathbb{R}^{m-n} .

При этих условиях \mathcal{R} является гладким n -мерным подмногообразием в \mathbb{R}^m (доказательство аналогично доказательству предложения 3.4) и определена $(m - n)$ -мерная подгруппа-тор в \mathbb{T}^m :

$$T_\Gamma = \{ (e^{2\pi i \langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, e^{2\pi i \langle \gamma_m, \varphi \rangle}) \in \mathbb{T}^m \}.$$

Мы отождествим тор T_Γ с факторгруппой \mathbb{R}^{m-n}/L^* и будем представлять его элементы векторами $\varphi \in \mathbb{R}^{m-n}$. Мы также определим группу

$$D_\Gamma = \frac{1}{2} L^*/L^* \cong (\mathbb{Z}_2)^{m-n}.$$

Заметим, что D_Γ вкладывается в качестве подгруппы в T_Γ .

Мы рассмотрим пересечение квадратик \mathcal{R} как подмножество в пересечении эрмитовых квадратик \mathcal{L} (а также в объемлющем комплексном пространстве \mathbb{C}^m)

и “разнесем” его действием тора T_Γ , т. е. рассмотрим множество T_Γ -орбит, проходящих через точки из \mathcal{R} . Точнее, рассмотрим отображение

$$j: \mathcal{R} \times T_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^m, \\ (\mathbf{u}, \varphi) \mapsto \mathbf{u} \cdot \varphi = (u_1 e^{2\pi i \langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, u_m e^{2\pi i \langle \gamma_m, \varphi \rangle})$$

и заметим, что $j(\mathcal{R} \times T_\Gamma) \subset \mathcal{L}$. На произведении $\mathcal{R} \times T_\Gamma$ задано диагональное действие группы D_Γ ; это действие свободно, так как оно свободно на втором множителе. Пространство орбит

$$N = \mathcal{R} \times_{D_\Gamma} T_\Gamma$$

является m -мерным многообразием.

Для каждой точки $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{R}$ определена подрешетка

$$L_{\mathbf{u}} = \mathbb{Z} \langle \gamma_k : u_k \neq 0 \rangle \subset L = \mathbb{Z} \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle.$$

Как показывает следующее утверждение, множество T_Γ -орбит, проходящих через точки из \mathcal{R} , является погружением многообразия N .

ЛЕММА 12.1. (а) *Отображение $j: \mathcal{R} \times T_\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^m$ индуцирует погружение $i: N \hookrightarrow \mathbb{C}^m$.*

(б) *Погружение i является вложением тогда и только тогда, когда $L_{\mathbf{u}} = L$ для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$, $\varphi \in T_\Gamma$ и $g \in D_\Gamma$. Тогда $\mathbf{u} \cdot g \in \mathcal{R}$ и $j(\mathbf{u} \cdot g, g\varphi) = \mathbf{u} \cdot g^2\varphi = \mathbf{u} \cdot \varphi = j(\mathbf{u}, \varphi)$. Следовательно, отображение j постоянно на D_Γ -орбитах, а значит, оно индуцирует отображение пространства орбит $N = (\mathcal{R} \times T_\Gamma)/D_\Gamma$, которое мы и обозначим через i .

Пусть $j(\mathbf{u}, \varphi) = j(\mathbf{u}', \varphi')$. Тогда $L_{\mathbf{u}} = L_{\mathbf{u}'}$ и

$$u_k e^{2\pi i \langle \gamma_k, \varphi \rangle} = u'_k e^{2\pi i \langle \gamma_k, \varphi' \rangle} \quad \text{при } k = 1, \dots, m. \quad (12.2)$$

Так как координаты u_k и u'_k вещественны, отсюда следует, что $e^{2\pi i \langle \gamma_k, \varphi - \varphi' \rangle} = \pm 1$ при $u_k \neq 0$ или, эквивалентно, $\varphi - \varphi' \in \frac{1}{2}L_{\mathbf{u}}^*/L^*$. Другими словами, из соотношения (12.2) следует, что $\mathbf{u}' = \mathbf{u} \cdot g$ и $\varphi' = g\varphi$ для некоторого элемента $g \in \frac{1}{2}L_{\mathbf{u}}^*/L^*$. Последняя группа является конечной по лемме 5.4, т. е. прообраз любой точки пространства \mathbb{C}^m при отображении j состоит из конечного числа точек. Если $L_{\mathbf{u}} = L$, то $\frac{1}{2}L_{\mathbf{u}}^*/L^* = \frac{1}{2}L^*/L^* = D_\Gamma$, а значит, пары (\mathbf{u}, φ) и (\mathbf{u}', φ') представляют одну точку многообразия N . Отсюда следует утверждение (б). Для доказательства утверждения (а) заметим, что соотношение $L_{\mathbf{u}} = L$ выполнено для точки \mathbf{u} общего положения (со всеми ненулевыми координатами). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 12.2 [46; теорема 1]. *Погружение $i: N \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ является H -минимальным лагранжесвым. Более того, если $\sum_{k=1}^m \gamma_k = 0$, то i является минимальным лагранжесвым погружением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы докажем только лагранжевость погружения i . Пусть

$$(\mathbf{x}, \varphi) \mapsto \mathbf{z}(\mathbf{x}, \varphi) = (u_1(\mathbf{x})e^{2\pi i\langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, u_m(\mathbf{x})e^{2\pi i\langle \gamma_m, \varphi \rangle})$$

– локальная система координат на многообразии $N = \mathcal{R} \times_{D_\Gamma} T_\Gamma$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}$. Пусть $\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^m \bar{\xi}_i \eta_i = \langle \xi, \eta \rangle + i\omega(\xi, \eta)$ – эрмитово скалярное произведение векторов $\xi, \eta \in \mathbb{C}^m$. Тогда

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_j} \right\rangle_{\mathbb{C}} = 2\pi i \left(\gamma_{j1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \dots + \gamma_{jm} u_m \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) = 0,$$

где последнее равенство получается дифференцированием уравнений квадрик в (12.1). Кроме того, $\left\langle \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}$ и $\left\langle \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_k}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_j} \right\rangle_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}$. Мы получаем

$$\omega \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_j} \right) = \omega \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_k}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_j} \right) = \omega \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_k}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \varphi_j} \right) = 0,$$

т. е. ограничение симплектической формы на касательное пространство к N равно нулю. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство $\sum_{k=1}^m \gamma_k = 0$ не может выполняться для компактных \mathcal{R} (или N).

Напомним (см. теорему 3.5), что невырожденное пересечение квадрик (3.4) или (12.1) задает простой полиэдр (2.1) и \mathcal{Z} отождествляется с момент-угломнообразиями \mathcal{Z}_P . Теперь мы можем собрать результаты предыдущих разделов в следующем критерии того, что $i: N \rightarrow \mathbb{C}^m$ является вложением.

ТЕОРЕМА 12.3. Пусть \mathcal{Z} и \mathcal{R} – пересечения эрмитовых и вещественных квадрик, задаваемые системами (3.4) и (12.1) соответственно, удовлетворяющие условиям (а)–(с), приведенным в начале настоящего п. 12.2. Пусть P – соответствующий простой полиэдр и $N = \mathcal{R} \times_{D_\Gamma} T_\Gamma$. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $i: N \rightarrow \mathbb{C}^m$ является вложением H -минимального лагранжева подмногообразия;
- (б) $L_{\mathbf{u}} = L$ для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$;
- (с) тор T_Γ действует свободно на момент-угломнообразии $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_P$;
- (д) P является дельзантовым полиэдром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (а) \Leftrightarrow (б) следует из леммы 12.1 и теоремы 12.2. Эквивалентность (б) \Leftrightarrow (с) – это лемма 5.4. Наконец, эквивалентность (с) \Leftrightarrow (д) – это теорема 5.3, (с). Теорема доказана.

Торическая топология позволяет явно строить обширные семейства дельзантовых многогранников. Простейшие примеры включают симплексы и кубы

любых размерностей. Легко видеть, что условие дельзантовости сохраняется при некоторых операциях над многогранниками, таких как взятие произведения или срезка вершин или граней специально выбранными гиперплоскостями. Этого оказывается достаточно для того, чтобы доказать, что многие важные семейства многогранников, такие как *ассоциаэдры* (многогранники Сташева), *пермутаэдры* и общие *нестозэдры*, допускают реализации в виде многогранников Дельзанта (см., например, [55] и [12]).

12.3. Топология лагранжевых подмногообразий N . Вначале приведем три простых свойства, связывающих топологическое строение многообразия N и пересечений квадрик \mathcal{Z} и \mathcal{R} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.4. (а) Погружение многообразия N в \mathbb{C}^m раскладывается в композицию $N \hookrightarrow \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$.

(б) Многообразие N является тотальным пространством расслоения над тором T^{m-n} со слоем \mathcal{R} .

(с) Если $N \rightarrow \mathbb{C}^m$ является вложением, то многообразие N является тотальным пространством главного T^{m-n} -расслоения над n -мерным многообразием \mathcal{R}/D_Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (а) очевидно. Так как группа D_Γ действует на T_Γ свободно, проекция $N = \mathcal{R} \times_{D_\Gamma} T_\Gamma \rightarrow T_\Gamma/D_\Gamma$ на второй сомножитель является расслоением со слоем \mathcal{R} . Тогда утверждение (б) следует из того, что $T_\Gamma/D_\Gamma \cong T^{m-n}$.

Если $N \rightarrow \mathbb{C}^m$ является вложением, то тор T_Γ действует на \mathcal{Z} свободно согласно теореме 12.3. Тогда действие группы D_Γ на \mathcal{R} также свободно. Следовательно, проекция $N = \mathcal{R} \times_{D_\Gamma} T_\Gamma \rightarrow \mathcal{R}/D_\Gamma$ на первый сомножитель является главным T_Γ -расслоением, что доказывает утверждение (с). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Факторпространство \mathcal{R}/D_Γ является *вещественным торическим многообразием* или *малым накрытием* над соответствующим простым многогранником P (см. [21] и [14]).

ПРИМЕР 12.5 (одна квадрика). Пусть \mathcal{R} задано одним уравнением

$$\gamma_1 u_1^2 + \dots + \gamma_m u_m^2 = \delta \tag{12.3}$$

в \mathbb{R}^m , где $\gamma_k \in \mathbb{R}$. Если \mathcal{R} компактно, то $\mathcal{R} \cong S^{m-1}$, а ассоциированный многогранник P есть n -мерный симплекс Δ^n . Тогда $N \cong S^{m-1} \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$, где образующая группы \mathbb{Z}_2 действует стандартной свободной инволюцией на окружности S^1 и некоторой инволюцией τ на сфере S^{m-1} . Топологический тип многообразия N зависит от τ . А именно,

$$N \cong \begin{cases} S^{m-1} \times S^1, & \text{если } \tau \text{ сохраняет ориентацию сферы } S^{m-1}, \\ \mathcal{H}^m, & \text{если } \tau \text{ обращает ориентацию сферы } S^{m-1}, \end{cases}$$

где \mathcal{H}^m есть m -мерная бутылка Клейна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.6. В случае $m - n = 1$ (одна квадратика) мы получаем H -минимальное лагранжево вложение многообразия $N \cong S^{m-1} \times_{\mathbb{Z}/2} S^1$ в \mathbb{C}^m тогда и только тогда, когда $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$ в (12.3). В этом случае топологический тип многообразия $N = N(m)$ зависит лишь от четности m , а именно,

$$\begin{aligned} N(m) &\cong S^{m-1} \times S^1, & \text{если } m \text{ четно,} \\ N(m) &\cong \mathcal{K}^m, & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как \mathcal{R} содержит точки с лишь одной ненулевой координатой, из теоремы 12.3 вытекает, что N вкладывается в \mathbb{C}^m тогда и только тогда, когда γ_i порождает ту же решетку, что и весь набор $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, для любого i . Следовательно, $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$. В этом случае $D_\Gamma \cong \mathbb{Z}/2$ действует стандартной антиподальной инволюцией на S^{m-1} . Эта инволюция сохраняет ориентацию, если m четно, и обращает ориентацию в противном случае. Предложение доказано.

Оба примера H -минимальных лагранжевых вложений из предложения 12.6 хорошо известны. Бутылка Клейна \mathcal{K}^m с четным m не может быть лагранжево вложена в \mathbb{C}^m (см. [50] и [56]).

ПРИМЕР 12.7 (две квадратика). В случае $m - n = 2$ топология многообразий \mathcal{R} и N может быть полностью описана на основе анализа действия двух коммутирующих инволюций на пересечении квадратик. Здесь мы рассматриваем только компактный случай.

Используя предложение 2.8, мы записываем пересечение квадратик \mathcal{R} в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{11}u_1^2 + \dots + \gamma_{1m}u_m^2 &= c, \\ \gamma_{21}u_1^2 + \dots + \gamma_{2m}u_m^2 &= 0, \end{aligned} \tag{12.4}$$

где $c > 0$ и $\gamma_{1i} > 0$ для всех i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.8. Существует число p , $0 < p < m$, такое, что $\gamma_{2i} > 0$ при $i = 1, \dots, p$ и $\gamma_{2i} < 0$ при $i = p+1, \dots, m$ в (12.4), возможно, после перенумерации координат u_1, \dots, u_m . Соответствующее многообразие $\mathcal{R} = \mathcal{R}(p, q)$, где $q = m - p$, диффеоморфно $S^{p-1} \times S^{q-1}$. Ассоциированный многогранник P либо является симплексом Δ^{m-2} (если одно из неравенств в (2.1) является лишним), либо комбинаторно эквивалентен произведению $\Delta^{p-1} \times \Delta^{q-1}$ (если нет лишних неравенств).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\gamma_{2i} \neq 0$ для всех i в (12.4), так как если $\gamma_{2i} = 0$, то вектор $\delta = (c \ 0)^t$ лежит в конусе, порожденном вектором γ_i , что противоречит предложению 3.4, (b). Перенумеровывая координаты, мы можем добиться того, что первые p чисел γ_{2i} положительны, а остальные отрицательны. Тогда $1 < p < m$, так как в противном случае пересечение (12.4) пусто. Далее, (12.4) является пересечением конуса над произведением двух эллипсоидов размерностей $p - 1$ и $q - 1$ (задаваемых второй квадратикой) и $(m - 1)$ -мерного эллипсоида (задаваемого первой квадратикой). Следовательно,

$\mathcal{R}(p, q) \cong S^{p-1} \times S^{q-1}$. Утверждение о многограннике вытекает из комбинаторного факта о том, что простой n -многогранник с не более чем $n + 2$ гипергранями комбинаторно эквивалентен произведению симплексов; случай одного лишнего неравенства соответствует $p = 1$ или $q = 1$. Предложение доказано.

Элемент $\varphi \in D_\Gamma = \frac{1}{2}L^*/L^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ действует на многообразии $\mathcal{R}(p, q)$ следующим образом:

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto (\varepsilon_1(\varphi)u_1, \dots, \varepsilon_m(\varphi)u_m),$$

где $\varepsilon_k(\varphi) = e^{2\pi i \langle \gamma_k, \varphi \rangle} = \pm 1$ при $1 \leq k \leq m$.

ЛЕММА 12.9. Пусть группа D_Γ действует на $\mathcal{R}(p, q)$ свободно. Предположим, что $\varepsilon_i(\varphi) = 1$ для некоторого i , $1 \leq i \leq p$, и $\varphi \in D_\Gamma$. Тогда $\varepsilon_l(\varphi) = -1$ для всех l таких, что $p + 1 \leq l \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $\varepsilon_i(\varphi) = 1$ для некоторого i , $1 \leq i \leq p$, и $\varepsilon_j(\varphi) = 1$ для некоторого j , $p + 1 \leq j \leq m$. Тогда $\gamma_{2i} > 0$ и $\gamma_{2j} < 0$ в (12.4), т.е. имеется точка $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(p, q)$, единственными ненулевыми координатами которой являются u_i и u_j . Такая точка неподвижна под действием элемента φ , что приводит к противоречию. Лемма доказана.

ЛЕММА 12.10. Пусть группа D_Γ действует на $\mathcal{R}(p, q)$ свободно. Тогда можно выбрать образующие $\varphi_1, \varphi_2 \in D_\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, действие которых на $\mathcal{R}(p, q)$ задается одной из следующих формул (а) или (б), возможно, после перенумерации координат:

$$\begin{aligned} \varphi_1: (u_1, \dots, u_m) &\mapsto (u_1, \dots, u_k, -u_{k+1}, \dots, -u_p, -u_{p+1}, \dots, -u_m), \\ \varphi_2: (u_1, \dots, u_m) &\mapsto (-u_1, \dots, -u_k, u_{k+1}, \dots, u_p, -u_{p+1}, \dots, -u_m); \end{aligned} \quad (\text{а})$$

$$\begin{aligned} \varphi_1: (u_1, \dots, u_m) &\mapsto (-u_1, \dots, -u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+l}, -u_{p+l+1}, \dots, -u_m), \\ \varphi_2: (u_1, \dots, u_m) &\mapsto (-u_1, \dots, -u_p, -u_{p+1}, \dots, -u_{p+l}, u_{p+l+1}, \dots, u_m); \end{aligned} \quad (\text{б})$$

здесь $0 \leq k \leq p$ и $0 \leq l \leq q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 12.9 для каждого из трех ненулевых элементов $\varphi \in D_\Gamma$ мы имеем либо $\varepsilon_i(\varphi) = -1$ при $1 \leq i \leq p$, либо $\varepsilon_i(\varphi) = -1$ при $p + 1 \leq i \leq m$. Следовательно, мы можем выбрать два различных ненулевых элемента $\varphi_1, \varphi_2 \in D_\Gamma$ таких, что либо $\varepsilon_i(\varphi_j) = -1$ при $j = 1, 2$ и $p + 1 \leq i \leq m$, либо $\varepsilon_i(\varphi_j) = -1$ при $j = 1, 2$ и $1 \leq i \leq p$. Это соответствует случаям (а) и (б) из формулировки леммы. В первом случае мы можем предположить, после перенумерации координат, что φ_1 действует как в (а). Тогда φ_2 также действует как в (а), так как в противном случае сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ не может действовать свободно в силу леммы 12.9. Второй случай рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Каждое из действий группы D_Γ , описанных в лемме 12.10, может быть реализовано пересечением квадрик вида (12.4). Например,

$$\begin{aligned} 2u_1^2 + \dots + 2u_k^2 + u_{k+1}^2 + \dots + u_p^2 + u_{p+1}^2 + \dots + u_m^2 &= 3, \\ u_1^2 + \dots + u_k^2 + 2u_{k+1}^2 + \dots + 2u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_m^2 &= 0 \end{aligned} \quad (12.5)$$

дает первое из действий из леммы 12.10; второе действие реализуется аналогично. Заметим, что решетка L , соответствующая пересечению квадратик (12.5), есть подрешетка индекса 3 в \mathbb{Z}^2 . Мы можем переписать (12.5) в виде

$$\begin{aligned} u_1^2 + \cdots + u_k^2 + u_{k+1}^2 + \cdots + u_p^2 &= 1, \\ u_1^2 + \cdots + u_k^2 &+ u_{p+1}^2 + \cdots + u_m^2 = 2, \end{aligned} \quad (12.6)$$

и тогда $L = \mathbb{Z}^2$. Действие двух инволюций $\psi_1, \psi_2 \in D_\Gamma = \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$, соответствующих стандартным базисным векторам в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$, задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1: (u_1, \dots, u_m) &\mapsto (-u_1, \dots, -u_k, -u_{k+1}, \dots, -u_p, u_{p+1}, \dots, u_m), \\ \psi_2: (u_1, \dots, u_m) &\mapsto (-u_1, \dots, -u_k, u_{k+1}, \dots, u_p, -u_{p+1}, \dots, -u_m). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Обозначим многообразие N , соответствующее системе (12.6), через $N_k(p, q)$. Тогда

$$N_k(p, q) \cong (S^{p-1} \times S^{q-1}) \times_{\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2} (S^1 \times S^1), \quad (12.8)$$

где действие двух инволюций на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ задается формулами (12.7). Заметим, что ψ_1 не действует на S^{q-1} и действует антиподально на S^{p-1} . Поэтому

$$N_k(p, q) \cong N(p) \times_{\mathbb{Z}/2} (S^{q-1} \times S^1),$$

где $N(p)$ – многообразие из предложения 12.6. При $k = 0$ инволюция ψ_2 не действует на $N(p)$, и мы получаем $N_0(p, q) = N(p) \times N(q)$ – произведение двух многообразий из примера 12.5. В общем случае проекция

$$N_k(p, q) \rightarrow S^{q-1} \times_{\mathbb{Z}/2} S^1 = N(q)$$

описывает $N_k(p, q)$ как пространство расслоения над $N(q)$ со слоем $N(p)$.

Сведем все предыдущие факты и наблюдения в следующем классификационном результате для компактных H -минимальных лагранжевых подмногообразий $N \subset \mathbb{C}^m$, получаемых из пересечений двух квадратик.

ТЕОРЕМА 12.11. *Пусть $N \rightarrow \mathbb{C}^m$ – вложение H -минимального лагранжева подмногообразия, соответствующее компактному пересечению двух квадратик. Тогда N диффеоморфно некоторому многообразию $N_k(p, q)$, описанному в (12.8), где $p + q = m$, $0 < p < m$ и $0 \leq k \leq p$. Более того, каждая такая тройка (k, p, q) реализуется многообразием N .*

В разобранных выше случаях, когда число квадратик не превосходит двух, топология многообразия \mathcal{R} достаточно проста, а анализ топологии многообразия N сводится к описанию действия инволюций на \mathcal{R} . В случае большего числа квадратик топология самого пересечения квадратик \mathcal{R} начинает играть роль.

ПРИМЕР 12.12 (три квадратика). В случае $m - n = 3$ топология компактных многообразий \mathcal{R} и \mathcal{L} была полностью описана в [40; теорема 2]. Каждое такое многообразие диффеоморфно произведению трех сфер или связной сумме произведений сфер, по две сферы в каждом произведении.

В случае $m - n = 3$ топологический тип многообразия \mathcal{R} (или \mathcal{L}) определяется плоской диаграммой Гейла ассоциированного простого многогранника P

(см. раздел 2). Это согласуется с классификацией n -мерных простых многогранников с $n + 3$ гипергранями, известной в комбинаторной геометрии.

Простейшим примером многогранника с $m - n = 3$ является пятиугольник. Он имеет много дельзантовых реализаций, например,

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, -x_1 + 2 \geq 0, -x_2 + 2 \geq 0, -x_1 - x_2 + 3 \geq 0\}.$$

В этом случае \mathcal{R} является ориентированной поверхностью рода 5 (см. [14; пример 6.40]), а момент-угол-многообразие \mathcal{Z} диффеоморфно связной сумме пяти экземпляров $S^3 \times S^4$.

Тем самым, мы получаем H -минимальное лагранжево подмногообразие $N \subset \mathbb{C}^5$, которое является тотальным пространством расслоения над T^3 со слоем поверхность рода 5.

Теперь предположим, что многогранник P , ассоциированный с пересечением квадратик (12.1), является многоугольником (т.е. $n = 2$). В случае отсутствия лишних неравенств P является m -угольником, а \mathcal{R} — ориентируемая поверхность S_g рода $g = 1 + 2^{m-3}(m - 4)$ (см. [14; пример 6.40]). В случае, если k неравенств являются лишними, P является $(m - k)$ -угольником. Тогда $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}' \times (S^0)^k$, где \mathcal{R}' соответствует $(m - k)$ -угольнику без лишних неравенств. Таким образом, \mathcal{R} является несвязным объединением 2^k поверхностей рода $1 + 2^{m-k-3}(m - k - 4)$.

Соответствующее H -минимальное лагранжево подмногообразие $N \subset \mathbb{C}^m$ является тотальным пространством расслоения над тором T^{m-2} со слоем поверхность S_g . Такое многообразие N является асферическим при $m \geq 4$.

12.4. Обобщение на торические многообразия. Рассмотрим две системы квадратик

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\Gamma &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m: \sum_{k=1}^m \gamma_k |z_k|^2 = \mathbf{c} \right\}, & \gamma_k, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{m-n}, \\ \mathcal{Z}_\Delta &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m: \sum_{k=1}^m \delta_k |z_k|^2 = \mathbf{d} \right\}, & \delta_k, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m-\ell}, \end{aligned}$$

такие, что \mathcal{Z}_Γ , \mathcal{Z}_Δ и $\mathcal{Z}_\Gamma \cap \mathcal{Z}_\Delta$ удовлетворяют условиям невырожденности и рациональности (а)–(с), приведенным в п. 12.2. Предположим также, что полиэдры, ассоциированные с \mathcal{Z}_Γ , \mathcal{Z}_Δ и $\mathcal{Z}_\Gamma \cap \mathcal{Z}_\Delta$, являются дельзантовыми.

Идея заключается в том, чтобы использовать первую систему квадратик для определения торического многообразия V при помощи симплектической редукции (как описано в разделе 5), а затем определить H -минимальное лагранжево подмногообразие в V при помощи второй системы квадратик.

Конструкция 12.13. Определим вещественные пересечения квадратик \mathcal{R}_Γ , \mathcal{R}_Δ , торы $T_\Gamma \cong \mathbb{T}^{m-n}$, $T_\Delta \cong \mathbb{T}^{m-\ell}$ и группы $D_\Gamma \cong \mathbb{Z}_2^{m-n}$, $D_\Delta \cong \mathbb{Z}_2^{m-\ell}$ как выше.

Рассмотрим торическое многообразие V , получаемое симплектической редукцией пространства \mathbb{C}^m по действию тора, соответствующего первой системе

квадрик: $V = \mathcal{Z}_\Gamma/T_\Gamma$. Это – кэлерово многообразие вещественной размерности $2n$. Факторпространство $\mathcal{R}_\Gamma/D_\Gamma$ является множеством вещественных точек в V (множеством неподвижных точек комплексного сопряжения или вещественным торическим многообразием); оно имеет размерность n . Рассмотрим подмножество в $\mathcal{R}_\Gamma/D_\Gamma$, задаваемое второй системой квадрик:

$$\mathcal{S} = (\mathcal{R}_\Gamma \cap \mathcal{R}_\Delta)/D_\Gamma,$$

тогда $\dim \mathcal{S} = n + \ell - m$. Наконец, определим n -мерное подмногообразие в V :

$$N = \mathcal{S} \times_{D_\Delta} T_\Delta.$$

ТЕОРЕМА 12.14. *N является H -минимальным лагранжевым подмногообразием в торическом многообразии V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \widehat{V} – результат симплектической редукции многообразия V по действию тора, соответствующего второй системе квадрик, т. е. $\widehat{V} = (V \cap \mathcal{Z}_\Delta)/T_\Delta = (\mathcal{Z}_\Gamma \cap \mathcal{Z}_\Delta)/(T_\Gamma \times T_\Delta)$. Это – торическое многообразие размерности $2(n + \ell - m)$. Его подмногообразие вещественных точек

$$\widehat{N} = N/T_\Delta = (\mathcal{R}_\Gamma \cap \mathcal{R}_\Delta)/(D_\Gamma \times D_\Delta) \hookrightarrow (\mathcal{Z}_\Gamma \cap \mathcal{Z}_\Delta)/(T_\Gamma \times T_\Delta) = \widehat{V}$$

является множеством неподвижных точек комплексного сопряжения, т. е. вполне геодезическим подмногообразием. В частности, \widehat{N} – минимальное подмногообразие в \widehat{V} . Согласно [24; следствие 2.7], N является H -минимальным подмногообразием в V . Теорема доказана.

ПРИМЕР 12.15. 1. Если $m - \ell = 0$, т. е. $\mathcal{Z}_\Delta = \emptyset$, то $V = \mathbb{C}^m$, и мы получаем исходную конструкцию H -минимальных лагранжевых подмногообразий N в \mathbb{C}^m .

2. Если $m - n = 0$, т. е. $\mathcal{Z}_\Gamma = \emptyset$, то N является множеством вещественных точек в V . Это многообразие является минимальным (вполне геодезическим).

3. Если $m - \ell = 1$, т. е. $\mathcal{Z}_\Delta \cong S^{2m-1}$, то мы получаем H -минимальные подмногообразия в $V = \mathbb{C}P^{m-1}$. Это конструкция включает серии проективных примеров из [45], [42] и [49].

Список литературы

- [1] H. Aniciaux, I. Castro, “Construction of Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in complex Euclidean space”, *Results Math.*, **60**:1-4 (2011), 325–349.
- [2] I. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, A. Laface, *Cox rings*, **2010**, arXiv: 1003.4229, A book project.
- [3] M. Audin, *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progr. Math., **93**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991, 181 pp.
- [4] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, “The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces”, *Adv. Math.*, **225**:3 (2010), 1634–1668.
- [5] И. В. Баскаков, “Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов”, *УМН*, **58**:5(353) (2003), 199–200; англ. пер.: I. V. Baskakov, “Massey triple products in the cohomology of moment-angle complexes”, *Russian Math. Surveys*, **58**:5 (2003), 1039–1041.

- [6] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, “Алгебры клеточных коцепей и действия торов”, *УМН*, **59**:3(357) (2004), 159–160; англ. пер.: I. V. Baskakov, V. M. Buchstaber, T. E. Panov, “Cellular cochain algebras and torus actions”, *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 562–563.
- [7] F. Battaglia, D. Zaffran, *Foliations modelling nonrational simplicial toric varieties*, arXiv: 1108.1637.
- [8] А. Борель, “Одна спектральная последовательность для комплексно-аналитических расслоений”, Приложение 2 в кн.: Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: А. Borel, “A spectral sequence for complex-analytic bundles”, Appendix Two in: F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd edition, Grundlehren Math. Wiss., **131**, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [9] F. Bosio, “Variétés complexes compactes: une généralisation de la construction de Meersseman et López de Medrano–Verjovsky”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **51**:5 (2001), 1259–1297.
- [10] F. Bosio, L. Meersseman, “Real quadrics in \mathbb{C}^n , complex manifolds and convex polytopes”, *Acta Math.*, **197**:1 (2006), 53–127.
- [11] A. Brøndsted, *An introduction to convex polytopes*, Grad. Texts in Math., **90**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983, viii+160 pp.; рус. пер.: А. Бренстед, *Введение в теорию выпуклых многогранников*, Мир, М., 1988, 240 с.
- [12] V. M. Buchstaber, “Lectures on toric topology”, *Proceedings of Toric Topology Workshop KAIST 2008*, Trends in Math., **10**, no. 1, Information Center for Mathematical Sciences, KAIST, 2008, 1–55.
- [13] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, “Действия тора, комбинаторная топология и гомологическая алгебра”, *УМН*, **55**:5(335) (2000), 3–106; англ. пер.: V. M. Buchstaber, T. E. Panov, “Torus actions, combinatorial topology, and homological algebra”, *Russian Math. Surveys*, **55**:5 (2000), 825–921.
- [14] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004, 272 с.; расширенный пер. с англ.: V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, Univ. Lecture Ser., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+144 pp.
- [15] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, arXiv: 1210.2368, A book project.
- [16] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, “Spaces of polytopes and cobordism of quatoric manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **7**:2 (2007), 219–242.
- [17] I. Castro, F. Urbano, “Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in \mathbb{C}^2 ”, *Compositio Math.*, **111**:1 (1998), 1–14.
- [18] D. A. Cox, “The homogeneous coordinate ring of a toric variety”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:1 (1995), 17–50.
- [19] D. A. Cox, J. B. Little, H. K. Schenck, *Toric varieties*, Grad. Stud. Math., **124**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, xxiv+841 pp.
- [20] В. И. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2(200) (1978), 85–134; англ. пер.: V. I. Danilov, “The geometry of toric varieties”, *Russian Math. Surveys*, **33**:2 (1978), 97–154.
- [21] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.
- [22] T. Delzant, “Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment”, *Bull. Soc. Math. France*, **116**:3 (1988), 315–339.
- [23] G. Denham, A. I. Suci, “Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products”, *Pure Appl. Math. Q.*, **3**:1 (2007), 25–60.
- [24] Y. Dong, “Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in Kaehler manifolds with symmetries”, *Nonlinear Anal.*, **67**:3 (2007), 865–882.

- [25] J. J. Duistermaat, G. J. Heckman, “On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space”, *Invent. Math.*, **69**:2 (1982), 259–268.
- [26] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Grad. Texts in Math., **205**, Springer-Verlag, New York, 2001, xxxiv+535 pp.
- [27] Y. Félix, J. Oprea, D. Tanré, *Algebraic models in geometry*, Oxf. Grad. Texts Math., **17**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008, xxii+460 pp.
- [28] M. Franz, “The integral cohomology of toric manifolds”, *Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств*, Сборник статей, Тр. МИАН, **252**, Наука, М., 2006, 61–70; англ. пер.: M. Franz, “The integral cohomology of toric manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **252**:1 (2006), 53–62.
- [29] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, xii+157 pp.
- [30] S. Gitler, S. López de Medrano, *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*, arXiv:0901.2580.
- [31] J. Grbić, S. Theriault, “The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement”, *Topology*, **46**:4 (2007), 357–396.
- [32] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, т. 1, 2, Мир, М., 1982, 864 с.; пер. с англ.: P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure Appl. Math., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, xii+813 pp.
- [33] V. Guillemin, *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n -spaces*, Progr. Math., **122**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994, viii+150 pp.
- [34] F. Hélein, P. Romon, “Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in \mathbb{C}^2 ”, *Comm. Anal. Geom.*, **10**:1 (2002), 79–126.
- [35] K. Iriye, D. Kishimoto, *Wedge decomposition of polyhedral products*, Preprint № 13, Kyoto Univ., 2011, 16 pp.
- [36] H. Ishida, *Complex manifolds with maximal torus actions*, arXiv:1302.0633.
- [37] H. Ishida, Y. Fukukawa, M. Masuda, “Topological toric manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **13**:1 (2013), 57–98.
- [38] H. Ishida, Y. Karshon, *Completely integrable torus actions on complex manifolds with fixed points*, arXiv:1203.0789; *Math. Res. Lett.* (to appear).
- [39] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Grad. Texts in Math., **218**, Springer-Verlag, New York, 2003, xviii+628 pp.
- [40] S. López de Medrano, “Topology of the intersection of quadrics in \mathbb{R}^n ”, *Algebraic topology* (Arcata, CA, 1986), Lecture Notes in Math., **1370**, Springer, Berlin, 1989, 280–292.
- [41] S. López de Medrano, A. Verjovsky, “A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds”, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, **28**:2 (1997), 253–269.
- [42] H. Ma, “Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}P^2$ ”, *Ann. Global. Anal. Geom.*, **27**:1 (2005), 1–16.
- [43] L. Meersseman, “A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension”, *Math. Ann.*, **317**:1 (2000), 79–115.
- [44] L. Meersseman, A. Verjovsky, “Holomorphic principal bundles over projective toric varieties”, *J. Reine Angew. Math.*, **572** (2004), 57–96.
- [45] А. Е. Миронов, “О гамильтоново-минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:6 (2003), 1324–1328; англ. пер.: А. Е. Mironov, “On Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^2$ ”, *Siberian Math. J.*, **44**:6 (2003), 1039–1042.
- [46] А. Е. Миронов, “О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{C}^n и $\mathbb{C}P^n$ ”, *Матем. сб.*, **195**:1 (2004), 89–102; англ. пер.: А. Е. Mironov, “New examples of Hamilton-minimal and minimal Lagrangian manifolds in \mathbb{C}^n and $\mathbb{C}P^n$ ”, *Sb. Math.*, **195**:1 (2004), 85–96.

- [47] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, “Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:1 (2013), 47–61; англ. пер.: А. Е. Mironov, Т. Е. Panov, “Intersections of quadrics, moment-angle manifolds, and Hamiltonian-minimal Lagrangian embeddings”, *Funct. Anal. Appl.*, **47**:1 (2013), 38–49.
- [48] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, “Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях”, *УМН*, **68**:2(410) (2013), 203–204, arXiv: 1301.2679.
- [49] А. Е. Mironov, D. Zuo, “On a family of conformally flat Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^3$ ”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2008, Art. ID rnn 078, 13 pp.
- [50] S. Nemirovski, “Lagrangian Klein bottles in \mathbb{R}^{2n} ”, *Geom. Funct. Anal.*, **19**:3 (2009), 902–909.
- [51] Y.-G. Oh, “Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations”, *Math. Z.*, **212**:2 (1993), 175–192.
- [52] Т. Е. Panov, “Cohomology of face rings, and torus actions”, *Surveys in contemporary mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 165–201, arXiv: math.AT/0506526.
- [53] Т. Е. Panov, N. Ray, “Categorical aspects of toric topology”, *Toric Topology*, Contemp. Math., **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 293–322, arXiv: 0707.0300.
- [54] Т. Panov, Y. Ustinovsky, “Complex-analytic structures on moment-angle manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 149–172.
- [55] A. Postnikov, “Permutohedra, associahedra, and beyond”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2009, № 6, 1026–1106.
- [56] В. В. Шевчишин, “Лагранжевы вложения бутылки Клейна и комбинаторные свойства группы классов отображений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:4 (2009), 153–224; англ. пер.: V. V. Shevchishin, “Lagrangian embeddings of the Klein bottle and combinatorial properties of mapping class groups”, *Izv. Math.*, **73**:4 (2009), 797–859.
- [57] J. Tambour, “LVMB manifolds and simplicial spheres”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **62**:4 (2012), 1289–1317.
- [58] Э. Б. Винберг, “Дискретные линейные группы, порожденные отражениями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:5 (1971), 1072–1112; англ. пер.: È. B. Vinberg, “Discrete linear groups generated by reflections”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:5 (1971), 1083–1119.
- [59] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995, x+370 pp.

Т. Е. Панов (Т. Е. Panov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова;

Ярославский государственный университет;

Институт теоретической и экспериментальной

физики им. А. И. Алиханова;

Институт проблем передачи информации

им. А. А. Харкевича РАН

E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

06.02.2013