ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2022, т. 317, с. 157–167

УДК 515.14+515.16

Эквивариантные когомологии момент–угол-комплексов относительно координатных подторов*

Т. Е. Панов[а,б,в,г], **И. К. Зейникешева**[а,г]

Поступило 06.04.2022; после доработки 29.05.2022; принято к публикации 30.05.2022

Вычислены эквивариантные когомологии $H^*_{T_I}(\mathcal{Z_K})$ момент–угол-комплексов $\mathcal{Z_K}$ относительно действия координатных подторов $T_I \subset T^m$. Дан критерий эквивариантной формальности $\mathcal{Z_K}$ в общем случае, а также для случаев флаговых комплексов и графов.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4282

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве V из m элементов и соответствующий момент–угол-комплекс $\mathcal{Z_K}$. В данной работе мы изучаем эквивариантные когомологии момент–угол-комплекса $\mathcal{Z_K}$ относительно действий координатных подторов $T_I \subset T^m$, где $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset V$.

Мы построим две целочисленные коммутативные дифференциальные градуированные алгебры (*ДГА-модели*) для вычисления $H^*_{T_I}(\mathcal{Z_K})$. Первая ДГА-модель определена как

$$\bigl(\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\bigr), \qquad du_i = v_i, \quad dv_i = 0,$$

где $\Lambda[u_i\colon i \notin I]$ — внешняя алгебра с порождающими u_i, $i \notin I$, степени 1, а $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ — кольцо граней момент–угол-комплекса $\mathcal{Z_K}$. Вторая ДГА-модель $R_I(\mathcal{K})$ получается из первой факторизацией по идеалу, порожденному элементами u_iv_i, v_i^2, где $i \notin I$. Отсюда получаем следующее описание эквивариантных когомологий (теорема 3.3). *Имеет место изоморфизм колец*

$$H^*_{T_I}(\mathcal{Z_K}) \cong H\bigl(\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\bigr) \cong H^*(R_I(\mathcal{K})) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}\bigl(\mathbb{Z}[v_i\colon i \in I], \mathbb{Z}[\mathcal{K}]\bigr),$$

где $\mathbb{Z}[v_i\colon i \in I]$ является $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]$-модулем вследствие гомоморфизма, отображающего v_i в 0 для $i \notin I$.

В случае $I = V$ наша ДГА-модель представляет собой кольцо граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ с нулевым дифференциалом и мы получаем теорему о целочисленной формальности из [11].

*Исследование первого автора (разделы 1–3) выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-11-19998, https://rscf.ru/project/20-11-19998/, в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук. Исследование второго автора (раздел 4) выполнено в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2022-265).

[а] Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

[б] Факультет компьютерных наук, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

[в] Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

[г] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

E-mail: tpanov@mech.math.msu.su (Т.Е. Панов), znikzk@gmail.com (И.К. Зейникешева).

В случае $I = \varnothing$ теорема 3.3 дает описание обычных целочисленных когомологий момент–угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ из [2, 5].

Аддитивный изоморфизм (или изоморфизм $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-модулей)

$$H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbb{Z}[v_i\colon i \in I], \mathbb{Z}[\mathcal{K}]\bigr) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_i\colon i\notin I]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\mathcal{K}])$$

следует из результата работы [8].

Далее мы изучаем вопрос об эквивариантной формальности $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, т.е. является ли $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ свободным модулем над $H^*_{T_I}(\mathrm{pt}) = H^*(BT_I) = \mathbb{Z}[v_i\colon i \in I]$. Мы получаем следующий результат (теорема 4.8). *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на конечном множестве V. Следующие условия эквивалентны*:

(а) *для любого $I \in \mathcal{K}$ эквивариантные когомологии $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ являются свободным модулем над $H^*(BT_I)$;*

(б) *существует разбиение $V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_p \sqcup U$ такое, что*

$$\mathcal{K} = \partial\Delta(V_1) * \ldots * \partial\Delta(V_p) * \Delta(U),$$

где $\Delta(U)$ — полный симплекс на U, а $\partial\Delta(V_i)$ — граница симплекса на V_i;

(в) *рациональное кольцо граней $\mathbb{Q}[\mathcal{K}]$ является кольцом полного пересечения (фактором кольца многочленов по идеалу, порожденному регулярной последовательностью).*

Для флаговых комплексов получаем следующее уточнение критерия (теорема 4.9). *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс на V. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(а) *$H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$ для всех i;*

(б) *$\mathcal{K} = \partial\Delta(V_1) * \ldots * \partial\Delta(V_p) * \Delta(U)$, где $|V_k| = 2$ для $k = 1, \dots, p$.*

Аналогичный критерий имеет место в случае, когда $\mathcal{K}$ — простой граф (теорема 4.11). *Пусть $\mathcal{K}$ — одномерный комплекс (простой граф). Тогда следующие условия эквивалентны*:

(а) *$H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$ для любого i;*

(б) *$\mathcal{K}$ — один из комплексов $\partial\Delta^2$, $\partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$, $\partial\Delta^1$, Δ^1, $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, Δ^0.*

Попутно мы устанавливаем некоторые дополнительные свойства эквивариантных когомологий момент–угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и приводим иллюстрирующие примеры.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на конечном множестве V из m элементов, которое мы будем часто отождествлять с множеством индексов $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. Подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset V$, лежащие в $\mathcal{K}$, называются *симплексами*. Мы предполагаем, что $\varnothing \in \mathcal{K}$, и допускаем *призрачные вершины*, т.е. одноэлементные подмножества $\{i\} \in V$ такие, что $\{i\} \notin \mathcal{K}$.

Пусть $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$ — последовательность m пар CW-комплексов с отмеченными точками, $A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset V$ определим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I := \biggl\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^m X_j\colon\ x_j \in A_j \ \text{ при } \ j \notin I\biggr\}.$$

Полиэдральным произведением последовательности $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующим $\mathcal{K}$, называется

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^\mathcal{K} := \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} \biggl(\prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\notin I} A_i\biggr).$$

Дадим определение полиэдрального произведения на языке категорий. Обозначим категорию граней комплекса $\mathcal{K}$ с объектами $I \in \mathcal{K}$ и морфизмами $I \subset J$ через $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$. Определим $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$-диаграмму

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})\colon\ \mathrm{CAT}(\mathcal{K}) \to \mathrm{TOP}, \qquad I \mapsto (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I,$$

которая морфизму $I \subset J$ из категории $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$ ставит в соответствие вложение пространств $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I \subset (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^J$. Тогда

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \operatorname*{colim}_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I.$$

В случае, когда все пары (X_i, A_i) одинаковые, т.е. $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \dots, m$, используем обозначение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ вместо $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$.

Момент–угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — это полиэдральное произведение $(D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$. Подробности и примеры этих конструкций см. в [3, Ch. 4].

Кольцом граней симплициального комплекса $\mathcal{K}$ называется фактор-кольцо

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] := \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ — идеал, порожденный мономами без квадратов $v_I = \prod_{i \in I} v_i$, для которых $I \subset V$ не является симплексом в $\mathcal{K}$.

3. ЭКВИВАРИАНТНЫЕ КОГОМОЛОГИИ

Пусть топологическая группа G действует на пространстве X. *Конструкция Бореля* определяется как пространство

$$EG \times_G X := EG \times X / \bigl((e \cdot g^{-1}, g \cdot x) \sim (e, x)\bigr),$$

где EG — универсальное правое G-пространство, $e \in EG$, $g \in G$, $x \in X$. Получаем *расслоение Бореля* $EG \times_G X \to BG$ над классифицирующим пространством $BG = EG/G$ со слоем X. *Эквивариантные когомологии* пространства X определяются как

$$H^*_G(X) := H^*(EG \times_G X).$$

Имеем координатное действие тора $T^m = (S^1)^m$ на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$. Универсальное расслоение $ES^1 \to BS^1$ есть бесконечномерное расслоение Хопфа $S^\infty \to \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$.

Рассмотрим эквивариантные когомологии момент–угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ относительно действия координатного подтора

$$T_I = \bigl\{(t_1, \dots, t_m) \in T^m\colon\ t_j = 1 \ \text{ для } \ j \notin I\bigr\},$$

где $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset V$.

Предложение 3.1. *Существует гомотопическая эквивалентность*

$$ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\simeq} (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^{\mathcal{K}},$$

где

$$Y_i = \begin{cases} \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, & i \in I, \\ D^2, & i \notin I, \end{cases} \qquad B_i = \begin{cases} \mathrm{pt}, & i \in I, \\ S^1, & i \notin I. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем

$$ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = ET_I \times_{T_I} (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}},$$

где

$$X_i = \begin{cases} S^\infty \times_{S^1} D^2, & i \in I, \\ D^2, & i \notin I, \end{cases} \qquad A_i = \begin{cases} S^\infty \times_{S^1} S^1, & i \in I, \\ S^1, & i \notin I. \end{cases}$$

Утверждение следует из гомотопической эквивалентности пар

$$\big(S^\infty \times_{S^1} D^2, S^\infty \times_{S^1} S^1\big) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, \mathrm{pt}),$$

как в [3, Theorem 4.3.2], где рассмотрен случай $I = [m]$. $\square$

Далее введем две коммутативные ДГА-модели для эквивариантных когомологий $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Первая модель — дифференциальная градуированная алгебра

$$\big(\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big), \qquad du_i = v_i, \quad dv_i = 0,$$

где $\Lambda[u_i\colon i \notin I]$ — внешняя алгебра с порождающими, соответствующими элементам из $V \setminus I$. Градуировка задается по формулам $\deg u_i = 1$, $\deg v_i = 2$.

Вторая модель получается факторизацией по идеалу, порожденному элементами $u_i v_i$ и v_i^2, где $i \notin I$:

$$R_I(\mathcal{K}) := \Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]/(u_i v_i = v_i^2 = 0,\ i \notin I).$$

Заметим, что идеал является d-инвариантным.

Обозначим через $C_*(X)$ и $C^*(X)$ дифференциальные градуированные коалгебру и алгебру сингулярных *нормализованных* цепей и коцепей пространства X соответственно. (Сингулярная коцепь нормализована, если она обращается в нуль на вырожденных сингулярных симплексах, см. [9, Ch. VIII, Sect. 6]; переход к нормализованным коцепям не меняет квазиизоморфный тип алгебры $C^*(X)$.)

Теорема 3.2. *Алгебра сингулярных коцепей $C^*(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K})$ квазиизоморфна алгебрам $(\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$ и $R_I(\mathcal{K})$. Эти квазиизоморфизмы естественны по отношению к вложениям симплициальных комплексов.*

Доказательство. Мы используем рассуждения из [11], [3, Sects. 4.5, 8.1] и [6].

Ацикличность идеала в $\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, порожденного элементами v_i^2 и $u_i v_i$ с $i \notin I$, устанавливается таким же способом, как в [3, Lemma 3.2.6], где рассмотрен случай $I = \varnothing$. Это дает квазиизоморфизм $\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}] \xrightarrow{\simeq} R_I(\mathcal{K})$. Чтобы показать оставшийся квазиизоморфизм $R_I(\mathcal{K}) \simeq C^*(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K})$, воспользуемся моделью гомотопически эквивалентного полиэдрального произведения $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^\mathcal{K}$ из предложения 3.1.

На протяжении всего доказательства будем использовать следующий зигзаг квазиизоморфизмов дифференциальных градуированных алгебр [10, § 7.2]:

$$C^*(X) \otimes C^*(Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(C_*(X) \otimes C_*(Y), \mathbb{Z}) \xleftarrow{\simeq} C^*(X \times Y), \tag{3.1}$$

где правое отображение является двойственным к отображению Эйленберга–Зильбера $C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \times Y)$, представляющему собой квазиизоморфизм дифференциальных градуированных коалгебр (см. [4, (17.6)]).

Сначала рассмотрим случай $\mathcal{K} = \varnothing$ с m призрачными вершинами. Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = T^m$ и

$$ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq T^m/T_I = (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^\mathcal{K} = \prod_{i \notin I} S^1,$$

в то время как $R_I(\mathcal{K}) = \Lambda[u_i\colon i \notin I]$. Имеется квазиизоморфизм $\Lambda[u] = H^*(S^1) \to C^*(S^1)$, который отображает u на представляющий его сингулярный 1-коцикл (здесь важно, что мы работаем с нормализованными коцепями). Применяя (3.1), получаем требуемый квазиизоморфизм $\Lambda[u_i\colon i \notin I] \simeq C^*\big(\prod_{i \notin I} S^1\big)$.

Теперь рассмотрим случай $m = 1$ и $\mathcal{K} = \Delta^0$ (0-симплекс). Если $I = \varnothing$, то $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^{\mathcal{K}} = D^2$ и $R_I(\mathcal{K}) = \Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v]/(uv = v^2 = 0)$. Пусть $\varphi\colon [01] \to D^2$ — стандартная параметризация граничной окружности S^1, рассматриваемая как 1-симплекс. Пусть $\psi\colon [012] \to D^2$ — сингулярный 2-симплекс такой, что $\psi|_{[12]} = \varphi$ и $\psi|_{[02]}$, $\psi|_{[01]}$ — постоянные отображения в точку $1 \in S^1$. Тогда $\partial\varphi = 0$ и $\partial\psi = \varphi$, так как мы работаем с нормализованными цепями. Рассмотрим двойственную к φ коцепь $\alpha \in C^1(D^2)$ и двойственную к ψ коцепь $\beta \in C^2(D^2)$. Тогда получаем квазиизоморфизм $\Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v]/(uv = v^2 = 0) \to C^*(D^2)$, который отображает u на α и v на β. Если $I = \{1\}$, то $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^{\mathcal{K}} = \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ и $R_I(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}[v]$. Имеем квазиизоморфизм $\mathbb{Z}[v] = H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) \to C^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)$, который отображает v на представляющий его сингулярный 2-коцикл.

Далее рассмотрим случай, когда $\mathcal{K} = \Delta^{m-1} = \Delta[m]$ — полный симплекс на $[m]$. Применяя (3.1) и теорему Кюннета, получаем зигзаг квазиизоморфизмов

$$\begin{aligned} R_I(\Delta[m]) &= \Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/(u_i v_i, v_i^2\colon i \notin I) = \\ &= \bigotimes_{i\in I} \mathbb{Z}[v_i] \otimes \bigotimes_{i\notin I} \bigl(\Lambda[u_i] \otimes \mathbb{Z}[v_i]/(u_i v_i, v_i^2)\bigr) \xrightarrow{\simeq} \bigotimes_{i\in I} C^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) \otimes \bigotimes_{i\notin I} C^*(D^2) \xrightarrow{\simeq} \ldots \\ &\ldots \xleftarrow{\simeq} C^*\left(\prod_{i\in I} \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty \times \prod_{i\notin I} D^2\right) = C^*\bigl((\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^{\Delta[m]}\bigr), \end{aligned} \tag{3.2}$$

что завершает доказательство в случае $\mathcal{K} = \Delta[m]$.

Общий случай доказывается индукцией по количеству симплексов в $\mathcal{K}$, при этом используются естественность по отношению к вложениям и последовательность Майера–Вьеториса, как в [6, Theorem 1]. А именно, мы добавляем по одному симплексу к пустому симплициальному комплексу на $[m]$ и используем зигзаг отображений дифференциальных градуированных алгебр между двумя точными короткими последовательностями для любых двух симплициальных комплексов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ на $[m]$:

$$0 \to R_I(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) \to R_I(\mathcal{K}_1) \oplus R_I(\mathcal{K}_2) \to R_I(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2) \to 0$$

и

$$0 \to C^*((\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2}) \to C^*((\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^{\mathcal{K}_1}) \oplus C^*((\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^{\mathcal{K}_2}) \to C^*((\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{B})^{\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2}) \to 0.$$

Зигзаги отображений между двумя ненулевыми членами посередине и справа являются квазиизоморфизмами по предположению индукции. Тогда зигзаг слева также является квазиизоморфизмом в силу длинной точной последовательности когомологий и 5-леммы.

Полезно также представить ДГА-модели как пределы дифференциальных градуированных алгебр, соответствующих симплексам $I \in \mathcal{K}$. А именно, для подмножества $J \subset V$ обозначим через $\Delta(J)$ симплекс на J, рассматриваемый как симплициальный комплекс на множестве V (с призрачными вершинами $V \setminus J$). Тогда

$$R_I(\Delta(J)) = \Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[v_j\colon j \in J]/(u_j v_j = v_j^2 = 0,\ j \in J \setminus I).$$

Рассмотрим $\mathrm{CAT}^{\mathrm{op}}(\mathcal{K})$-диаграмму

$$\mathcal{R}_{I,\mathcal{K}}\colon\ \mathrm{CAT}^{\mathrm{op}}(\mathcal{K}) \to \mathrm{DGA}, \qquad J \mapsto R_I(\Delta(J)),$$

которая морфизму $J_1 \subset J_2$ из категории $\mathrm{CAT}^{\mathrm{op}}(\mathcal{K})$ ставит в соответствие сюръекцию дифференциальных градуированных алгебр $R_I(\Delta(J_2)) \to R_I(\Delta(J_1))$. Тогда

$$R_I(\mathcal{K}) = \lim \mathcal{R}_{I,\mathcal{K}} = \lim_{J\in\mathcal{K}} R_I(\Delta(J)).$$

Аналогично имеем $\mathrm{CAT}^{\mathrm{op}}(\mathcal{K})$-диаграмму

$$\mathcal{C}_{I,\mathcal{K}}\colon \mathrm{CAT}^{\mathrm{op}}(\mathcal{K}) \to \mathrm{DGA}, \qquad J \mapsto C^*((\boldsymbol{Y},\boldsymbol{B})^J).$$

Зигзаг квазиизоморфизмов (3.2) индуцирует слабую эквивалентность диаграмм $\mathcal{R}_{I,\mathcal{K}} \simeq \mathcal{C}_{I,\mathcal{K}}$. Канонические отображения

$$\mathcal{R}_{I,\mathcal{K}}(J) \to \lim \mathcal{R}_{I,\mathcal{K}}|_{\mathrm{CAT}^{\mathrm{op}}(\partial\Delta(J))} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{C}_{I,\mathcal{K}}(J) \to \lim \mathcal{C}_{I,\mathcal{K}}|_{\mathrm{CAT}^{\mathrm{op}}(\partial\Delta(J))}$$

являются расслоениями (сюръекциями дифференциальных градуированных алгебр). Следовательно, обе диаграммы $\mathcal{R}_{I,\mathcal{K}}$ и $\mathcal{C}_{I,\mathcal{K}}$ являются риди-фибрантными (см. [3, Appendix C, Sect. C.1]). Поэтому их пределы квазиизоморфны. Получаем требуемый зигзаг квазиизоморфизмов дифференциальных градуированных алгебр

$$R_I(\mathcal{K}) = \lim_{J\in\mathcal{K}} R_I(\Delta(J)) \simeq \lim_{J\in\mathcal{K}} C^*((\boldsymbol{Y},\boldsymbol{B})^J) \xleftarrow{\simeq} C^*\Big(\operatorname*{colim}_{J\in\mathcal{K}}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{B})^J\Big) = C^*((\boldsymbol{Y},\boldsymbol{B})^{\mathcal{K}}),$$

где предпоследнее отображение есть квазиизоморфизм по теореме о вырезании (или согласно последовательности Майера–Вьеториса). $\square$

Для эквивариантных когомологий получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Имеют место изоморфизмы колец*

$$H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*\big(\Lambda[u_i\colon i\notin I]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}],d\big) \cong H^*(R_I(\mathcal{K}),d) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[v_i\colon i\in I],\mathbb{Z}[\mathcal{K}]\big),$$

где $\mathbb{Z}[v_i\colon i\in I]$ *является* $\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$*-модулем вследствие гомоморфизма, отображающего* v_i *в* 0 *для* $i\notin I$.

Доказательство. Первые два изоморфизма следуют из теоремы 3.2. Чтобы доказать последний изоморфизм, рассмотрим для $\mathbb{Z}[v_i\colon i\notin I]$-модуля $\mathbb{Z}$ резольвенту Кошуля $\Lambda[u_i\colon i\notin I]\otimes\mathbb{Z}[v_i\colon i\notin I]\to\mathbb{Z}$. Тензорно умножая ее на $\mathbb{Z}[v_i\colon i\in I]$, получаем свободную резольвенту $\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$-модуля $\mathbb{Z}[v_i\colon i\in I]$:

$$\Lambda[u_i\colon i\notin I]\otimes\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]\to\mathbb{Z}[v_i\colon i\in I].$$

Применяя $\otimes_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ к этой резольвенте, получаем комплекс $\Lambda[u_i\colon i\notin I]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, когомологии которого суть $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[v_i\colon i\in I],\mathbb{Z}[\mathcal{K}])$. $\square$

В случае $I=[m]$ получаем, что алгебра сингулярных коцепей пространства $ET^m\times_{T^m}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\simeq(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty,\mathrm{pt})^{\mathcal{K}}$ квазиизоморфна $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ с нулевым дифференциалом. Это результат о целочисленной формальности из [11].

В случае $I=\varnothing$ получаем описание обычных когомологий момент–угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ из работ [2] и [5].

4. ЭКВИВАРИАНТНАЯ ФОРМАЛЬНОСТЬ

T^k-пространство X называется *эквивариантно формальным*, если $H^*_{T^k}(X)$ является свободным модулем над $H^*_{T^k}(\mathrm{pt})=H^*(BT^k)$. Это эквивалентно тому, что спектральная последовательность расслоения $ET^k\times_{T^k}X\to BT^k$ вырождается в члене E_2.

Пользуясь результатами предыдущего раздела, получаем, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ эквивариантно формально относительно действия T_I, если $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[v_i\colon i\in I],\mathbb{Z}[\mathcal{K}])$ является свободным модулем над $H^*(BT_I)=\mathbb{Z}[v_i\colon i\in I]$.

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathcal{K}=\Delta[m]$. *Тогда* $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ *— свободный* $H^*(BT_I)$*-модуль для любого* $I\subset[m]$.

Доказательство. Для $\mathcal{K} = \Delta[m]$ момент–угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong D^{2m}$ является T_I-эквивариантно стягиваемым. Значит, $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*_{T_I}(\mathrm{pt}) = H^*(BT_I)$ — свободный $H^*(BT_I)$-модуль. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta[m]$ — граница симплекса на $[m]$. Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong S^{2m-1}$ и $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный $H^*(BT_I)$-модуль для любого $I \subsetneq [m]$.*

Доказательство. Для расслоения $ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to BT_I$ со слоем $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong S^{2m-1}$ рассмотрим его спектральную последовательность. Мы утверждаем, что гомоморфизм $H^*(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, индуцированный включением слоя, сюръективен. Действительно, согласно построениям предыдущего раздела $H^*(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ есть гомоморфизм когомологий, индуцированный отображением дифференциальных градуированных алгебр

$$\big(\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big) \to \big(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big).$$

Имеем $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle 1, [u_i v_1 \dots \widehat{v}_i \dots v_m]\rangle$, где $[u_i v_1 \dots \widehat{v}_i \dots v_m] \in H^{2m-1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — когомологический класс коцикла $u_i v_1 \dots \widehat{v}_i \dots v_m$ с опущенным v_i (заметим, что $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(v_1 \dots v_m)$). Выбирая $i \notin I$, получаем, что $[u_i v_1 \dots \widehat{v}_i \dots v_m]$ также представляет нетривиальный когомологический класс в $H^*(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K})$ (здесь пользуемся тем, что $I \neq [m]$). Значит, отображение $H^*(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ сюръективно.

Далее, $H^q(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^q(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является краевым гомоморфизмом

$$H^*(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to E_\infty^{0,q} \to E_2^{0,q} = H^q(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$$

спектральной последовательности. Из его сюръективности следует, что $E_2^{0,q} = E_\infty^{0,q}$, т.е. все дифференциалы из первого столбца тривиальны. В силу мультипликативной структуры в спектральной последовательности все остальные дифференциалы также тривиальны. Получаем, что $H^*(ET_I \times_{T_I} \mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong E_\infty = E_2 \cong H^*(BT_I) \otimes H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный $H^*(BT_I)$-модуль. $\square$

Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ — симплициальные комплексы на множествах V_1 и V_2 соответственно. *Джойн* комплексов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ — это симплициальный комплекс на $V_1 \sqcup V_2$, определяемый как

$$\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 = \big\{I_1 \sqcup I_2 \subset V_1 \sqcup V_2\colon\ I_1 \in \mathcal{K}_1,\ I_2 \in \mathcal{K}_2\big\}.$$

Лемма 4.3. *Пусть $I_1 \subset V_1$, $I_2 \subset V_2$, $V = V_1 \sqcup V_2$, $I = I_1 \sqcup I_2$ и $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$. Предположим, что $H^*_{T_{I_1}}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1})$ — свободный $H^*(BT_{I_1})$-модуль и $H^*_{T_{I_2}}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2})$ — свободный $H^*(BT_{I_2})$-модуль. Тогда $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный $H^*(BT_I)$-модуль.*

Доказательство. Имеем $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}$ согласно [3, Proposition 4.1.3]. Тогда

$$\begin{aligned} H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}) = H^*\big(ET_I \times_{T_I} (\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2})\big) \cong \\ &\cong H^*\big((ET_{I_1} \times_{T_{I_1}} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}) \times (ET_{I_2} \times_{T_{I_2}} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2})\big) \cong \\ &\cong H^*(ET_{I_1} \times_{T_{I_1}} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}) \otimes H^*(ET_{I_2} \times_{T_{I_2}} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}) = H^*_{T_{I_1}}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}) \otimes H^*_{T_{I_2}}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}). \end{aligned}$$

Предпоследний изоморфизм следует из формулы Кюннета, так как $H^*(ET_{I_1} \times_{T_{I_1}} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1})$ является свободным $\mathbb{Z}$-модулем (как свободный $\mathbb{Z}[v_i\colon i \in I_1]$-модуль). Теперь утверждение леммы вытекает из равенства $H^*(BT_I) = H^*(BT_{I_1}) \otimes H^*(BT_{I_2})$. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть $I \notin \mathcal{K}$. Тогда $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ не является свободным модулем над $H^*(BT_I)$.*

Доказательство. Возьмем $v_I = \prod_{i \in I} v_i \in H^*(BT_I)$. Тогда $v_I \cdot 1 = [v_I] = 0$, так как v_I равен нулю в $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}])$. Значит, 1 — элемент $H^*(BT_I)$-кручения и $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ не является свободным $H^*(BT_I)$-модулем. $\square$

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на V и $V' \subset V$. Подкомплекс $\mathcal{K}' = \{I \in \mathcal{K}\colon I \subset V'\}$ называется *полным подкомплексом* (*индуцированным подкомплексом*) на V'. Эквивалентным образом можно сказать, что $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ является полным подкомплексом, если любая недостающая грань комплекса $\mathcal{K}'$ является недостающей гранью комплекса $\mathcal{K}$.

Лемма 4.5. *Если $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является свободным $H^*(BT_I)$-модулем и $\mathcal{K}'$ — полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ такой, что $I \in \mathcal{K}'$, то $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ также является свободным $H^*(BT_I)$-модулем.*

Доказательство. Так как $\mathcal{K}'$ — полный подкомплекс, имеется ретракция $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}$ (см. [13, предложение 2.2] или [12, Lemma 4.2]), которая T_I-эквивариантна для любого $I \subset V'$. Отсюда следует, что $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ является прямым слагаемым в свободном $H^*(BT_I)$-модуле $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Значит, $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ — также свободный $H^*(BT_I)$-модуль. $\square$

Эквивариантные когомологии $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ могут быть несвободным $H^*(BT_I)$-модулем, даже когда I является симплексом в $\mathcal{K}$.

Пример 4.6. Пусть $\mathcal{K}$ есть m-цикл (граница m-угольника) с вершинами, пронумерованными против часовой стрелки. Пусть $I = \{i\}$, так что T_I есть i-я координатная окружность S^1_i. Если $m = 3$ или 4, то $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$ для всех i по леммам 4.2 и 4.3. Пусть $m \geq 5$. Тогда ненулевой когомологический класс в $H^3_{S^1_m}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, представленный коциклом $u_1v_3 \in \Lambda[u_1, \ldots, u_{m-1}] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, является элементом $\mathbb{Z}[v_m]$-кручения. Действительно, $v_m \cdot [u_1v_3] = [u_1v_3v_m] = 0$, так как $v_3v_m = 0$ в $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ для $m \geq 5$. Значит, $H^*_{S^1_m}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ несвободен как $\mathbb{Z}[v_m]$-модуль.

Напомним, что *недостающая грань* (*минимальная негрань*) симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на V — это подмножество $I \subset V$ такое, что $I \notin \mathcal{K}$, но каждое собственное подмножество множества I принадлежит $\mathcal{K}$. Другими словами, I — недостающая грань, если $\partial\Delta(I)$ является подкомплексом комплекса $\mathcal{K}$, но $\Delta(I)$ таковым не является. Обозначим через $\mathrm{MF}(\mathcal{K})$ множество недостающих граней комплекса $\mathcal{K}$.

Следующее утверждение обобщает пример 4.6.

Лемма 4.7. *Пусть I_1 и I_2 — недостающие грани в $\mathcal{K}$, и предположим, что $I = I_1 \setminus I_2$ непусто. Тогда $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ не является свободным модулем над $H^*(BT_I)$.*

Доказательство. Поскольку I_1 и I_2 являются различными недостающими гранями, имеем $I_2 \not\subset I_1$. Возьмем $j \in I_2 \setminus I_1$. Тогда $j \notin I$. Коцикл $u_jv_{I_2\setminus j}$ представляет нетривиальный когомологический класс в $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_i\colon i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}])$.

Мы утверждаем, что $[u_jv_{I_2\setminus j}] \in H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является элементом $H^*(BT_I)$-кручения. Действительно, возьмем $v_I = \prod_{i\in I} v_i \in H^*(BT_I)$. Тогда

$$v_I \cdot [u_jv_{I_2\setminus j}] = [u_jv_Iv_{I_2\setminus j}] = [u_jv_{I_1}v_{(I_2\setminus I_1)\setminus j}] = 0,$$

так как $v_{I_1} = 0$ в $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$. Значит, $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ не является свободным как $H^*(BT_I)$-модуль. $\square$

Теорема 4.8. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на конечном множестве V. Следующие условия эквивалентны*:

(а) *для любого $I \in \mathcal{K}$ эквивариантные когомологии $H^*_{T_I}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ являются свободным модулем над $H^*(BT_I)$*;

(б) *существует разбиение $V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_p \sqcup U$ такое, что*

$$\mathcal{K} = \partial\Delta(V_1) * \ldots * \partial\Delta(V_p) * \Delta(U),$$

где $\Delta(U)$ — полный симплекс на U, а $\partial\Delta(V_i)$ — граница симплекса на V_i;

(в) *рациональное кольцо граней $\mathbb{Q}[\mathcal{K}]$ является кольцом полного пересечения* (*фактором кольца многочленов по идеалу, порожденному регулярной последовательностью*).

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Имеем $\mathbb{Q}[\mathcal{K}] = \mathbb{Q}[v_1, \ldots, v_m]/(t_1, \ldots, t_p)$, где $t_k = \prod_{i\in V_k} v_i$ — моном без квадратов и V_k — недостающая грань в $\mathcal{K}$ для $k = 1, \ldots, p$. Предположим, что некоторые из этих недостающих граней пересекаются нетривиально, пусть $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Тогда $I = V_1 \setminus V_2$ непусто и $H^*_{T_I}(\mathcal{Z_K})$ — несвободный $H^*(BT_I)$-модуль по лемме 4.7. Противоречие. Значит, $V_1, \dots, V_p$ попарно не пересекаются, поэтому $\mathcal{K}$ имеет вид, описанный в условии (б).

(б) $\Rightarrow$ (а). Представим I в виде $I = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_p \sqcup J$, где $I_k \subsetneq V_k$, $J \subset U$. Тогда $H^*_{T_I}(\mathcal{Z_K})$ является свободным $H^*(BT_I)$-модулем по леммам 4.1–4.3.

(б) $\Rightarrow$ (в). Напомним [3, Appendix A, Sect. A.3], что последовательность $(t_1, \dots, t_k)$ однородных элементов положительной степени в $\mathbb{Q}[v_1, \dots, v_m]$ называется *регулярной последовательностью*, если t_{i+1} не является делителем нуля в фактор-кольце $\mathbb{Q}[v_1, \dots, v_m]/(t_1, \dots, t_i)$ для $0 \leq i < k$. Если $\mathcal{K}$ имеет вид, описанный в условии (б), то $\mathbb{Q}[\mathcal{K}] = \mathbb{Q}[v_1, \dots, v_m]/(t_1, \dots, t_p)$, где $m = |V|$ и $t_k = \prod_{i \in V_k} v_i$ для $k = 1, \dots, p$. Тогда $(t_1, \dots, t_p)$ является регулярной последовательностью, а $\mathbb{Q}[\mathcal{K}]$ есть кольцо полного пересечения.

(в) $\Rightarrow$ (б). Полагаем $\mathbb{Q}[\mathcal{K}] = \mathbb{Q}[v_1, \dots, v_m]/(t_1, \dots, t_p)$, где $(t_1, \dots, t_p)$ — регулярная последовательность. Можно считать, что $t_k = \prod_{i \in V_k} v_i$, где V_k — недостающая грань комплекса $\mathcal{K}$ для $k = 1, \dots, p$. Предположим, что некоторые из этих недостающих граней пересекаются нетривиально, пусть $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Тогда $t_2 \cdot \prod_{i \in V_1 \setminus V_2} v_i = t_1 \cdot \prod_{j \in V_2 \setminus V_1} v_j$, т.е. t_2 является делителем нуля в $\mathbb{Q}[v_1, \dots, v_m]/(t_1)$. Противоречие. Значит, $V_1, \dots, V_p$ попарно не пересекаются и $\mathcal{K}$ имеет вид, описанный в условии (б). $\square$

Эквивалентность (б) $\Leftrightarrow$ (в) из теоремы 4.8 была отмечена в [11, Sect. 5].

Напомним, что $\mathcal{K}$ называется *флаговым комплексом*, если каждая из его недостающих граней имеет две вершины. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ флаговый тогда и только тогда, когда в нем нет призрачных вершин и любое множество вершин в $\mathcal{K}$, попарно соединенных ребрами, образует симплекс. В случае флаговых комплексов получаем следующее уточнение критерия из теоремы 4.8.

Теорема 4.9. *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс на V. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(а) $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z_K})$ *— свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$ для всех i;*

(б) $\mathcal{K} = \partial\Delta(V_1) * \ldots * \partial\Delta(V_p) * \Delta(U)$, *где $|V_k| = 2$ для $k = 1, \dots, p$.*

Доказательство. Импликация (б) $\Rightarrow$ (а) следует из теоремы 4.8. Докажем импликацию (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть V_1, V_2 — недостающие грани. Тогда $|V_1| = |V_2| = 2$. Если $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, то $V_1 \setminus V_2 = \{i\}$ для некоторого $i \in V$. Тогда $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z_K})$ не является свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем по лемме 4.7. Получили противоречие. Значит, все недостающие грани в $\mathcal{K}$ попарно не пересекаются и $\mathcal{K}$ имеет вид, описанный в условии (б). $\square$

Следующий пример показывает, что эквивалентность из теоремы 4.9 не выполняется в случае нефлагового комплекса.

Пример 4.10. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на пяти вершинах такой, что $\mathrm{MF}(\mathcal{K}) = \{I_1, I_2\}$, где $I_1 = \{1, 2, 3\}$ и $I_2 = \{3, 4, 5\}$. Тогда $H^*_{T_I}(\mathcal{Z_K})$ не является свободным $H^*(BT_I)$-модулем для $I = \{1, 2\}$ (или для $I = \{4, 5\}$) по лемме 4.7. Однако $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z_K})$ является свободным $H^*(BS^1_i)$-модулем для всех i. Действительно, пользуясь методами работы [7, разд. 8] или [1], можно показать, что $\mathcal{Z_K} \cong S^5 \vee S^5 \vee S^8$. Обычные когомологии порождаются мономами $u_k v_{I_1 \setminus k}$, $u_j v_{I_2 \setminus j}$, $u_{i_1} u_{i_2} v_{[5] \setminus \{i_1, i_2\}}$ в алгебре Кошуля $\Lambda[u_1, \dots, u_5] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$:

$$H^*(\mathcal{Z_K}) = \mathbb{Z}\big\langle 1, [u_k v_{I_1 \setminus k}], [u_j v_{I_2 \setminus j}], [u_{i_1} u_{i_2} v_{[5] \setminus \{i_1, i_2\}}] \big\rangle,$$

где $k \in I_1$, $j \in I_2$, $[u_k v_{I_1 \setminus k}], [u_j v_{I_2 \setminus j}] \in H^5(\mathcal{Z_K})$, $i_1 \in I_1 \setminus I_2$, $i_2 \in I_2 \setminus I_1$ и $[u_{i_1} u_{i_2} v_{[5] \setminus \{i_1, i_2\}}] \in$ $\in H^8(\mathcal{Z_K})$.

Так как каждое из множеств $I_1 \setminus I_2$ и $I_2 \setminus I_1$ содержит два элемента, мы можем выбрать элементы k, j, i_1, i_2 так, что $i \notin \{k, j, i_1, i_2\}$. Тогда мономы $u_k v_{I_1\setminus k}$, $u_j v_{I_2\setminus j}$, $u_{i_1} u_{i_2} v_{[5]\setminus\{i_1,i_2\}}$ представляют нетривиальные классы когомологий в $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Отсюда вытекает, что гомоморфизм $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ сюръективен. Следовательно, спектральная последовательность расслоения $ES^1_i \times_{S^1_i} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to BS^1_i$ вырождается в члене E_2, как в доказательстве леммы 4.2. Поэтому $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(BS^1_i) \otimes H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный $H^*(BS^1_i)$-модуль.

Критерий, схожий с теоремой 4.9, имеет место в случае, когда $\mathcal{K}$ — одномерный комплекс.

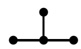
Теорема 4.11. *Пусть $\mathcal{K}$ — одномерный комплекс (простой граф). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) *$H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$ для любого i;*

(б) *$\mathcal{K}$ — один из комплексов $\partial\Delta^2$, $\partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$, $\partial\Delta^1$, Δ^1, $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, Δ^0.*

Доказательство. Импликация (б) $\Rightarrow$ (а) следует из теоремы 4.8, поэтому нужно доказать только импликацию (а) $\Rightarrow$ (б). Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: *$\mathcal{K}$ — дерево.* Если в нем содержится не более трех вершин, то $\mathcal{K}$ есть Δ^1, $\partial\Delta^1 * \Delta^0$ или Δ^0. В каждом из этих случаев $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем по теореме 4.8.

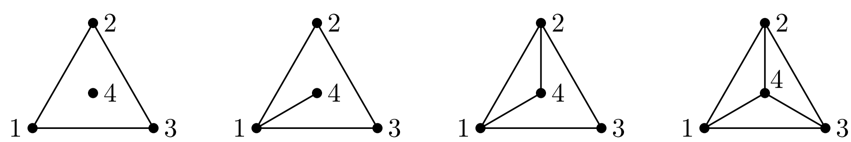
Предположим, что в $\mathcal{K}$ больше трех вершин. Тогда в $\mathcal{K}$ есть связный индуцированный подграф $\mathcal{K}_1$ на четырех вершинах, который имеет вид  или . В обоих случаях имеются $I_1, I_2 \in \mathrm{MF}(\mathcal{K}_1)$ такие, что $I_1 \setminus I_2 = \{i\}$ для некоторого i. Тогда $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1})$ не является свободным модулем над $\mathbb{Z}[v_i]$ по лемме 4.7 и $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — также несвободный модуль по лемме 4.5. Противоречие.

Случай 2: *$\mathcal{K}$ — несвязное объединение деревьев.* Если в $\mathcal{K}$ имеются только две вершины, то $\mathcal{K} = \partial\Delta^1$.

Пусть в $\mathcal{K}$ больше двух вершин. Запишем $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{K}_s$, где каждое $\mathcal{K}_j$ является деревом. Тогда в каждом $\mathcal{K}_j$ имеется не более трех вершин согласно случаю 1. Возьмем $I_1 = \{i, j\}$, $I_2 = \{k, j\}$, где $i \in \mathcal{K}_1$, $j \in \mathcal{K}_2$ и $\{k, j\} \notin \mathcal{K}$. Тогда $I_1, I_2 \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})$ и $I_1 \setminus I_2 = \{i\}$. Значит, $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — несвободный $\mathbb{Z}[v_i]$-модуль по лемме 4.7. Противоречие.

Случай 3: *в $\mathcal{K}$ имеется* 3-*цикл.* Если $\mathcal{K}$ является 3-циклом, то $\mathcal{K} = \partial\Delta^2$.

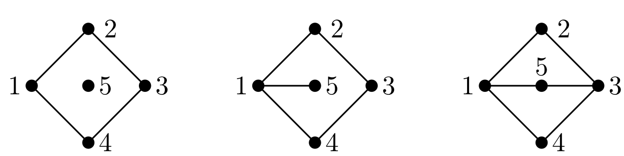
Предположим, что в $\mathcal{K}$ не менее четырех вершин. Рассмотрим индуцированный подграф на четырех вершинах, который содержит 3-цикл. Возможны четыре случая:



В первых двух случаях возьмем $I_1 = \{3, 4\}$ и $I_2 = \{2, 4\}$ в $\mathrm{MF}(\mathcal{K})$. В последних двух случаях возьмем $I_1 = \{1, 2, 3\}$ и $I_2 = \{1, 2, 4\}$ в $\mathrm{MF}(\mathcal{K})$. Тогда $I_1 \setminus I_2 = \{3\}$ и $H^*_{S^1_3}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — несвободный $\mathbb{Z}[v_3]$-модуль по лемме 4.7. Противоречие.

Случай 4: *в $\mathcal{K}$ нет* 3-*циклов и есть* 4-*цикл.* Если $\mathcal{K}$ является 4-циклом, то $\mathcal{K} = \partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$.

Предположим, что в $\mathcal{K}$ больше четырех вершин. Рассмотрим индуцированный подграф на пяти вершинах, который содержит 4-цикл. Так как в $\mathcal{K}$ нет 3-циклов, имеем три случая:



Во всех случаях возьмем $I_1 = \{2,4\}$ и $I_2 = \{4,5\}$ в $\mathrm{MF}(\mathcal{K})$. Тогда $I_1 \setminus I_2 = \{2\}$ и $H^*_{S^1_2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — несвободный $\mathbb{Z}[v_2]$-модуль по лемме 4.7. Снова противоречие.

Случай 5: *каждый минимальный цикл в* $\mathcal{K}$ *имеет длину не меньше* 5. Тогда в $\mathcal{K}$ есть индуцированный подграф $\mathcal{K}_1$, который является m-циклом с $m \geq 5$. Как в примере 4.6, получаем, что $H^*_{S^1_m}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1})$ не является свободным $\mathbb{Z}[v_m]$-модулем. Тогда $H^*_{S^1_m}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — также несвободный модуль по лемме 4.5. Противоречие. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамян С.А., Панов Т.Е.* Высшие произведения Уайтхеда для момент–угол-комплексов и подстановки симплициальных комплексов // Тр. МИАН. 2019. Т. 305. С. 7–28.
2. *Баскаков И.В., Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* Алгебры клеточных коцепей и действия торов // УМН. 2004. Т. 59, №3. С. 159–160.
3. *Buchstaber V.M., Panov T.E.* Toric topology. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2015. (Math. Surv. Monogr.; V. 204).
4. *Eilenberg S., Moore J.C.* Homology and fibrations. I: Coalgebras, cotensor product and its derived functors // Comment. math. Helv. 1966. V. 40. P. 199–236.
5. *Franz M.* The integral cohomology of toric manifolds // Тр. МИАН. 2006. Т. 252. С. 61–70.
6. *Franz M.* Dga models for moment–angle complexes: E-print, 2020. arXiv: 2006.01571 [math.AT].
7. *Грбич Е., Терио С.* Теория гомотопий в торической топологии // УМН. 2016. Т. 71, №2. С. 3–80.
8. *Luo S., Matsumura T., Moore W.F.* Moment angle complexes and big Cohen–Macaulayness // Algebr. Geom. Topol. 2014. V. 14, N 1. P. 379–406.
9. *Mac Lane S.* Homology. Berlin: Springer, 1963. (Grundl. Math. Wiss.; Bd. 114).
10. *McCleary J.* A user's guide to spectral sequences. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 58).
11. *Notbohm D., Ray N.* On Davis–Januszkiewicz homotopy types. I: Formality and rationalisation // Algebr. Geom. Topol. 2005. V. 5, N 1. P. 31–51.
12. *Panov T., Theriault S.* The homotopy theory of polyhedral products associated with flag complexes // Compos. math. 2019. V. 155, N 1. P. 206–228.
13. *Панов Т.Е., Верёвкин Я.А.* Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера // Мат. сб. 2016. Т. 207, №11. С. 105–126.