150 лет

УДК 512.54+515.14+515.16

Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин

Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера

Конструкция полиэдрального произведения использована для построения моделей классифицирующих пространств прямоугольных групп Артина и Коксетера, общих граф-произведений групп и их коммутантов. В качестве приложения получен критерий свободности коммутанта граф-произведения групп и явно описан минимальный набор образующих для коммутанта прямоугольной группы Коксетера.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: прямоугольная группа Артина, прямоугольная группа Коксетера, граф-произведение, коммутант, полиэдральное произведение.

DOI: 10.4213/sm8701

§ 1. Введение

Прямоугольные группы Артина и Коксетера играют важную роль в геометрической теории групп (см. [1]). С абстрактной категорной точки зрения эти группы являются частными случаями конструкции граф-произведения групп, соответствующего набору из m групп $\boldsymbol{G}=(G_1,\dots,G_m)$ и графу Γ на m вершинах. *Граф-произведение* $\boldsymbol{G}^\Gamma$ состоит из слов с элементами из групп $G_1,\dots,G_m$, в которых элементы из G_i и G_j с $i\ne j$ коммутируют, если $\{i,j\}$ является ребром графа Γ. Граф-произведение $\boldsymbol{G}^\Gamma$ находится между свободным произведением $G_1\star\dots\star G_m$ (соответствующим графу Γ из m отдельных вершин) и декартовым произведением $G_1\times\dots\times G_m$ (соответствующим полному графу). Прямоугольные группы Артина RA_Γ и Коксетера RC_Γ получаются при $G_i=\mathbb{Z}$ и $G_i=\mathbb{Z}_2$ соответственно.

Полиэдральное произведение представляет собой функториальную комбинаторно-топологическую конструкцию, сопоставляющую топологическое пространство $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathscr{K}}$ набору из m пар топологических пространств $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})=\{(X_1,A_1),\dots,(X_m,A_m)\}$ и симплициальному комплексу $\mathscr{K}$ на m вершинах (см. [2]–[4]). Эта конструкция обобщает понятие момент-угол-комплекса $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}}=(D^2,S^1)^{\mathscr{K}}$, который является ключевым объектом исследования в торической топологии. Также в терминах полиэдральных произведений универсальным

Работа первого автора выполнена в Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-50-00150). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00537-а).

образом описывается ряд конструкций классифицирующих пространств для прямоугольных групп Артина и Коксетера, их коммутантов и общих граф-произведений. Описание классифицирующего пространства граф-произведения групп и его коммутанта в неявном виде содержалось в работе [5], где было построено и изучено каноническое гомотопическое расслоение

$$(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \longrightarrow (B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \longrightarrow \prod_{k=1}^{m} BG_k$$

полиэдральных произведений.

Каждому графу Γ без петель и двойных ребер можно сопоставить флаговый симплициальный комплекс $\mathscr{K}$, симплексами которого являются клики (подграфы, являющиеся полными графами) в Γ. Для любого флагового комплекса $\mathscr{K}$ полиэдральное произведение $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ является классифицирующим пространством для соответствующего граф-произведения групп $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} = \boldsymbol{G}^{\Gamma}$, в то время как $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ является классифицирующим пространством для коммутанта группы $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$. В случае прямоугольной группы Артина $RA_{\mathscr{K}} = RA_{\Gamma}$ каждое классифицирующее пространство $BG_i = B\mathbb{Z}$ является окружностью, и мы получаем в качестве $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ подкомплекс $(S^1)^{\mathscr{K}}$ в m-мерном торе, введенный в работе Ки Ханг Кима и Ф.В. Руша [6]. В случае прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathscr{K}}$ каждое $BG_i = B\mathbb{Z}_2$ является бесконечномерным вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^{\infty}$, так что классифицирующим пространством группы $RC_{\mathscr{K}}$ является аналогично определяемый подкомплекс $(\mathbb{R}P^{\infty})^{\mathscr{K}}$ в m-кратном произведении пространств $\mathbb{R}P^{\infty}$. Классифицирующим пространством для коммутанта группы $RC_{\mathscr{K}}$ является некоторый конечный кубический подкомплекс $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ в m-мерном кубе, в то время как классифицирующим пространством для коммутанта группы $RA_{\mathscr{K}}$ является некоторый бесконечный кубический комплекс $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}$ в m-мерной кубической решетке. Все эти факты сведены воедино в теореме 3.2 и следствиях 3.3 и 3.4.

В работе [5] изучались свойства граф-произведений топологических (а не только дискретных) групп в рамках общей гомотопической теории торических пространств и их пространств петель. В настоящей работе мы концентрируемся на изучении коммутантов граф-произведений дискретных групп. Помимо чисто алгебраического интереса нашей мотивацией являлся тот факт, что коммутанты граф-произведения являются фундаментальными группами весьма интересных асферических пространств. С этой, топологической, точки зрения наиболее интересны прямоугольные группы Коксетера $RC_{\mathscr{K}}$. Коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ является фундаментальной группой $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ конечномерного асферического комплекса $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$, который оказывается многообразием в случае, когда $\mathscr{K}$ является симплициальным разбиением сферы. Когда $\mathscr{K}$ – цикл (граница многоугольника) или триангуляция двумерной сферы, мы получаем в качестве $RC'_{\mathscr{K}}$ фундаментальную группу поверхности или трехмерного многообразия. Эти группы в последнее время привлекли большое внимание в геометрической теории групп и маломерной топологии. Кроме того, многообразия $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$, соответствующие двойственным комплексам пермутоэдров и граф-ассоциэдров произвольной размерности, играют важную роль в работах А. А. Гайфуллина [7], [8] как универсальные реализаторы в проблеме реализации классов гомологий многообразиями.

В теореме 4.3 мы даем простой критерий свободности коммутанта граф-произведения. В случае прямоугольной группы Артина этот результат был получен в работе Х. Серватиуса, Х. Дромса и Х. Серватиус [9]. В теореме 4.5 мы приводим явный минимальный набор образующих для конечно порожденного коммутанта прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathscr{K}}$. Этот набор образующих состоит из вложенных итерированных коммутаторов канонических образующих группы $RC_{\mathscr{K}}$, которые входят в специальном порядке, определяемом комбинаторикой симплициального комплекса $\mathscr{K}$.

Теоремы 4.3 и 4.5 аналогичны соответствующим результатам, полученным в работе [10] для алгебр гомологий пространств петель и рациональных гомотопических алгебр Ли *момент-угол-комплексов*. Эти результаты из [10] могут быть интерпретированы алгебраически как описание подалгебры-коммутанта в некотором граф-произведении градуированных алгебр Ли (см. теорему 4.6). Результаты § 4 настоящей работы представляют собой теоретико-групповые аналоги результатов работы [10] для градуированных ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

Мы посвящаем статью памяти Райнера Фогта, который делился своими обширными знаниями и замечательными идеями с первым автором в течение совместной работы в 2000-х годах.

Мы благодарны Александру Александровичу Гайфуллину за весьма ценные комментарии и предложения, благодаря которым текст стал более доступным.

§ 2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем конечное упорядоченное множество $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ и его подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$, где I может быть пустым или всем $[m]$.

Пусть $\mathscr{K}$ – (абстрактный) *симплициальный комплекс* на множестве $[m]$, т.е. такой набор подмножеств $I \subset [m]$, что для любого $I \in \mathscr{K}$ все подмножества в I также содержатся в $\mathscr{K}$. Мы всегда предполагаем, что пустое множество $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\} \subset [m]$ содержатся в $\mathscr{K}$. Подмножество $I \in \mathscr{K}$ называется *симплексом* (или *гранью*) комплекса $\mathscr{K}$. Одноэлементные грани называются *вершинами*, а двухэлементные грани – *ребрами*. Каждый абстрактный симплициальный комплекс $\mathscr{K}$ имеет геометрическую реализацию $|\mathscr{K}|$ – полиэдр в евклидовом пространстве (объединение выпуклых геометрических симплексов). В дальнейших конструкциях полезно представлять себе геометрическую реализацию абстрактного комплекса $\mathscr{K}$.

Напомним конструкцию полиэдрального произведения (см. [2]–[4]).

Конструкция 2.1 (полиэдральное произведение). Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс на множестве $[m]$ и

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

– набор из m пар топологических пространств с отмеченными точками $\mathrm{pt} \in A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \Bigl\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{k=1}^m X_k \colon x_k \in A_k \text{ при } k \notin I\Bigr\} \tag{2.1}$$

и определим *полиэдральное произведение* набора $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее комплексу $\mathscr{K}$, как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} \Bigl(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i\Bigr).$$

В случае, когда все пары (X_i, A_i) одинаковы, т.е. $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \dots, m$, мы используем обозначение $(X, A)^{\mathscr{K}}$ вместо $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}}$. Также если каждое A_i есть pt, то мы используем сокращенные обозначения $\boldsymbol{X}^{\mathscr{K}}$ вместо $(\boldsymbol{X}, \mathrm{pt})^{\mathscr{K}}$ и $X^{\mathscr{K}}$ вместо $(X, \mathrm{pt})^{\mathscr{K}}$.

Имеется следующая категорная интерпретация конструкции полиэдрального произведения. Рассмотрим категорию граней $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$, объектами которой являются симплексы $I \in \mathscr{K}$, а морфизмами – включения $I \subset J$. Пусть TOP обозначает категорию топологических пространств. Введем $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$-диаграмму (ковариантный функтор из малой категории $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$ в “большую” категорию TOP)

$$\mathscr{D}_{\mathscr{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \colon \mathrm{CAT}(\mathscr{K}) \longrightarrow \mathrm{TOP}, \qquad I \longmapsto (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I, \tag{2.2}$$

переводящую морфизм $I \subset J$ категории $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$ во включение пространств $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I \subset (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^J$. Тогда мы имеем

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}} = \operatorname{colim} \mathscr{D}_{\mathscr{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \operatorname*{colim}_{I \in \mathscr{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I. \tag{2.3}$$

Здесь colim обозначает функтор копредела (также известный как функтор прямого предела) из категории $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$-диаграмм топологических пространств в категорию TOP. По определению colim является левым сопряженным к функтору постоянной диаграммы. Более подробное описание этих конструкций можно найти, например, в [4; приложение C].

Для каждого подмножества $J \subset [m]$ рассмотрим ограничение $\mathscr{K}$ на J

$$\mathscr{K}_J = \{I \in \mathscr{K} : I \subset J\},$$

которое также называется *полным подкомплексом* в комплексе $\mathscr{K}$. Напомним, что подпространство $Y \subset X$ называется *ретрактом* пространства X, если существует непрерывное отображение $r \colon X \to Y$ такое, что композиция $Y \hookrightarrow X \xrightarrow{r} Y$ есть тождественное отображение. Отметим следующее простое свойство полиэдральных произведений.

Предложение 2.2. *Если $\mathscr{K}_J \subset \mathscr{K}$ – полный подкомплекс, то пространство $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}_J}$ является ретрактом пространства $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}}$.*

Доказательство. Мы имеем

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I\in\mathscr{K}} \Bigl(\prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\in[m]\setminus I} A_i\Bigr),$$

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}_J} = \bigcup_{I\in\mathscr{K},\, I\subset J} \Bigl(\prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\in J\setminus I} A_i\Bigr).$$

Так как каждое A_i является пространством с отмеченной точкой, имеем каноническое вложение $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}_J} \hookrightarrow (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}}$. Кроме того, для каждого $I \in \mathscr{K}$ существует проекция

$$r_I\colon \prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\in[m]\setminus I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I\cap J} X_i \times \prod_{i\in J\setminus I} A_i.$$

Так как $\mathscr{K}_J$ является полным подкомплексом, образ отображения r_I лежит в $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}_J}$. Проекции r_I склеиваются в требуемую ретракцию

$$r = \bigcup_{I\in\mathscr{K}} r_I\colon (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}} \to (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathscr{K}_J}.$$

Далее нам понадобятся следующие примеры полиэдральных произведений.

Пример 2.3. 1. Пусть $(X, A) = (S^1, \mathrm{pt})$, где S^1 – окружность. Соответствующее полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathscr{K}}$ является подкомплексом в m-мерном торе $(S^1)^m$:

$$(S^1)^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I\in\mathscr{K}} (S^1)^I \subset (S^1)^m. \tag{2.4}$$

В частности, в случае $\mathscr{K} = \{\varnothing, \{1\}, \dots, \{m\}\}$ (что геометрически представляет собой m отдельных точек) полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathscr{K}}$ есть букет $(S^1)^{\vee m}$ из m окружностей.

В случае, когда $\mathscr{K}$ содержит все собственные подмножества в $[m]$ (что геометрически представляет собой границу $\partial\Delta^{m-1}$ симплекса размерности $m-1$), полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathscr{K}}$ известно как *толстый букет* m окружностей; он получается при удалении клетки старшей размерности из стандартного клеточного разбиения m-мерного тора $(S^1)^m$.

Для общего симплициального комплекса $\mathscr{K}$ на m вершинах полиэдральное произведение $(S^1)^{\mathscr{K}}$ заключено между m-кратным букетом $(S^1)^{\vee m}$ и m-кратным декартовым произведением $(S^1)^m$.

2. Пусть $(X, A) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ есть множество целых чисел на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Обозначим соответствующее полиэдральное произведение через $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}$:

$$\mathscr{L}_{\mathscr{K}} = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I\in\mathscr{K}} (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^I \subset \mathbb{R}^m. \tag{2.5}$$

В случае, когда $\mathscr{K}$ состоит из m отдельных точек, $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}$ представляет собой объединение прямых в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$, параллельных одной из координатных осей и проходящих через точки с целыми координатами. В случае

$\mathscr{K} = \partial\Delta^{m-1}$ комплекс $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}$ представляет собой объединение всех целочисленных гиперплоскостей, параллельных координатным гиперплоскостям.

3. Пусть $(X, A) = (\mathbb{R}P^\infty, \mathrm{pt})$, где $\mathbb{R}P^\infty$ – бесконечномерное вещественное проективное пространство, которое также является классифицирующим пространством $B\mathbb{Z}_2$ для циклической группы из двух элементов $\mathbb{Z}_2$. Рассмотрим полиэдральное произведение

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I\in\mathscr{K}} (\mathbb{R}P^\infty)^I \subset (\mathbb{R}P^\infty)^m. \tag{2.6}$$

Аналогично примеру 1 комплекс $(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathscr{K}}$ заключен между m-кратным букетом $(\mathbb{R}P^\infty)^{\vee m}$ (соответствующим $\mathscr{K}$ из m отдельных точек) и m-кратным декартовым произведением $(\mathbb{R}P^\infty)^m$ (соответствующим $\mathscr{K} = \Delta^{m-1}$).

4. Пусть $(X, A) = (D^1, S^0)$, где D^1 – отрезок (удобно рассматривать отрезок $[-1, 1]$), а S^0 – его граница, состоящая из двух точек. Полиэдральное произведение $(D^1, S^0)^{\mathscr{K}}$ известно как *вещественный момент-угол-комплекс* (см. [2; п. 3.5], [4]) и обозначается через $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$:

$$\mathscr{R}_{\mathscr{K}} = (D^1, S^0)^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I\in\mathscr{K}} (D^1, S^0)^I. \tag{2.7}$$

Он представляет собой кубический подкомплекс в m-мерном кубе $(D^1)^m = [-1, 1]^m$. В случае, когда $\mathscr{K}$ состоит из m отдельных точек, $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ есть одномерный остов куба $[-1, 1]^m$. В случае $\mathscr{K} = \partial\Delta^{m-1}$ комплекс $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ есть граница куба $[-1, 1]^m$. В общем случае, если $\{i_1, \dots, i_k\}$ – грань в $\mathscr{K}$, то $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ содержит 2^{m-k} кубических граней размерности k, которые лежат в k-мерных плоскостях, параллельных координатной плоскости $\{i_1, \dots, i_k\}$.

Пространство $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ было введено и изучалось в работах М. В. Дэвиса и Т. Янушкевича [11] и [12], хотя их конструкция отличалась от приведенной выше. В случае, когда $|\mathscr{K}|$ гомеоморфно сфере, $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ является топологическим многообразием (это следует из результатов работы [11]; см. также [4] и [13; теорема 2.3]). Более того, многообразие $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ имеет каноническую гладкую структуру, когда $|\mathscr{K}|$ является границей выпуклого многогранника. В этом случае $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ является универсальным абелевым накрытием над двойственным простым многогранником P (см. [12; п. 4.1]).

Четыре полиэдральных произведения из примера 3 входят в следующие гомотопические расслоения (см. [5], [4; п. 4.3]):

$$\mathscr{L}_{\mathscr{K}} \longrightarrow (S^1)^{\mathscr{K}} \longrightarrow (S^1)^m, \tag{2.8}$$

$$\mathscr{R}_{\mathscr{K}} \longrightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^{\mathscr{K}} \longrightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^m. \tag{2.9}$$

Конструкция 2.4 (прямоугольные группы Артина и Коксетера). Пусть Γ – граф с m вершинами. Будем писать $\{i, j\} \in \Gamma$, если $\{i, j\}$ является ребром. Обозначим через $F(g_1, \dots, g_m)$ свободную группу с m образующими, соответствующими вершинам графа Γ. *Прямоугольная группа Артина* RA_Γ, соответствующая графу Γ, задается образующими и соотношениями как

$$RA_\Gamma = F(g_1, \dots, g_m)\big/(g_ig_j = g_jg_i \text{ при } \{i, j\} \in \Gamma). \tag{2.10}$$

Если Γ является полным графом, мы имеем $RA_\Gamma = \mathbb{Z}^m$, а если Γ вообще не имеет ребер, мы получаем свободную группу.

Прямоугольная группа Коксетера RC_Γ определяется как

$$RC_\Gamma = F(g_1,\dots,g_m)\big/(g_i^2 = 1,\ g_ig_j = g_jg_i \text{ при } \{i,j\}\in\Gamma). \tag{2.11}$$

Прямоугольные группы Артина и Коксетера имеют категорную интерпретацию, аналогичную соответствующей конструкции для полиэдральных произведений (см. (2.3)). А именно, рассмотрим следующие $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$-диаграммы, на этот раз в категории групп GRP:

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{\mathscr{K}}(\mathbb{Z})\colon \mathrm{CAT}(\mathscr{K}) &\longrightarrow \mathrm{GRP}, \qquad I \longmapsto \mathbb{Z}^I,\\ \mathscr{D}_{\mathscr{K}}(\mathbb{Z}_2)\colon \mathrm{CAT}(\mathscr{K}) &\longrightarrow \mathrm{GRP}, \qquad I \longmapsto \mathbb{Z}_2^I, \end{aligned}$$

где $\mathbb{Z}^I = \prod_{i\in I}\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2^I = \prod_{i\in I}\mathbb{Z}_2$. Морфизм $I\subset J$ из $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$ переходит в мономорфизм групп $\mathbb{Z}^I\to\mathbb{Z}^J$ и $\mathbb{Z}_2^I\to\mathbb{Z}_2^J$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} RA_{\mathscr{K}^1} &= \operatorname{colim}^{\mathrm{GRP}}\mathscr{D}_{\mathscr{K}}(\mathbb{Z}) = \operatorname*{colim}_{I\in\mathscr{K}}{}^{\mathrm{GRP}}\mathbb{Z}^I,\\ RC_{\mathscr{K}^1} &= \operatorname{colim}^{\mathrm{GRP}}\mathscr{D}_{\mathscr{K}}(\mathbb{Z}_2) = \operatorname*{colim}_{I\in\mathscr{K}}{}^{\mathrm{GRP}}\mathbb{Z}_2^I, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\mathscr{K}^1$ обозначает одномерный остов комплекса $\mathscr{K}$ (граф). Здесь $\operatorname{colim}^{\mathrm{GRP}}$ обозначает функтор копредела в категории GRP.

Недостающей гранью (или *минимальной негранью*) симплициального комплекса $\mathscr{K}$ называется подмножество $I\subset[m]$, которое само не является симплексом в $\mathscr{K}$, но любое собственное подмножество которого является симплексом в $\mathscr{K}$. Симплициальный комплекс $\mathscr{K}$ называется *флаговым*, если каждая его недостающая грань состоит из двух вершин. Эквивалентно, $\mathscr{K}$ является флаговым комплексом, если любой набор его вершин, попарно соединенных ребрами, является набором вершин некоторого симплекса.

Кликой в графе Γ называется подмножество I его вершин, в котором любые две вершины соединены ребром. Каждый флаговый комплекс $\mathscr{K}$ является *кликовым комплексом* своего одномерного остова $\Gamma = \mathscr{K}^1$, т.е. получается заполнением каждой клики в Γ симплексом.

Заметим, что копределы в (2.12), будучи соответствующими прямоугольными группами, зависят лишь от одномерного остова комплекса $\mathscr{K}$ и не зависят от недостающих граней с тремя и более вершинами. Например, копределы диаграмм групп $\mathscr{D}_{\Delta^2}(\mathbb{Z})$ и $\mathscr{D}_{\partial\Delta^2}(\mathbb{Z})$ совпадают и оба равны $\mathbb{Z}^3$. Это отражает отсутствие “высшей” коммутативности в категории групп: если образующие g_i коммутируют попарно, то они коммутируют все вместе. Это явление детально изучено в [5] и [14].

Мы будем обозначать прямоугольные группы Артина и Коксетера, соответствующие одномерному остову симплициального комплекса $\mathscr{K}$, через $RA_{\mathscr{K}}$ и $RC_{\mathscr{K}}$ соответственно.

По аналогии с полиэдральным произведением $\boldsymbol{X}^{\mathscr{K}} = \operatorname{colim}_{I\in\mathscr{K}}\boldsymbol{X}^I$ пространств мы можем рассмотреть следующую более общую конструкцию дискретной группы.

Конструкция 2.5 (граф-произведение). Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс на множестве $[m]$ и $\boldsymbol{G}=(G_1,\dots,G_m)$ – набор из m групп, которые мы рассматриваем как дискретные топологические группы. Мы также предполагаем все группы G_i нетривиальными, т.е. $G_i\neq\{1\}$. Для каждого подмножества $I\subset[m]$ положим

$$\boldsymbol{G}^I=\biggl\{(g_1,\dots,g_m)\in\prod_{k=1}^m G_k : g_k=1 \text{ при } k\notin I\biggr\}.$$

Рассмотрим следующую $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$-диаграмму групп:

$$\mathscr{D}_{\mathscr{K}}(\boldsymbol{G})\colon \mathrm{CAT}(\mathscr{K})\longrightarrow \mathrm{GRP}, \qquad I\longmapsto \boldsymbol{G}^I,$$

переводящую морфизм $I\subset J$ в канонический мономорфизм групп $\boldsymbol{G}^I\to\boldsymbol{G}^J$. Определим группу $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$ как

$$\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}=\operatorname{colim}^{\mathrm{GRP}}\mathscr{D}_{\mathscr{K}}(\boldsymbol{G})=\operatorname*{colim}_{I\in\mathscr{K}}{}^{\mathrm{GRP}}\,\boldsymbol{G}^I. \tag{2.13}$$

Группа $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$ зависит лишь от графа $\mathscr{K}^1$ и называется *граф-произведением* групп $G_1,\dots,G_m$. Мы имеем канонические гомоморфизмы $\boldsymbol{G}^I\to\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$, $I\in\mathscr{K}$; можно показать, что они являются мономорфизмами.

Как и в случае прямоугольных групп Артина и Коксетера (представляющих собой граф-произведения групп $G_i=\mathbb{Z}$ и $G_i=\mathbb{Z}_2$ соответственно), универсальное свойство копредела дает следующее более явное представление граф-произведения.

Предложение 2.6. *Имеет место изоморфизм групп*

$$\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}\cong\mathop{\bigstar}_{k=1}^m G_k\big/\bigl(g_ig_j=g_jg_i \ \text{ \textit{при} } g_i\in G_i,\ g_j\in G_j,\ \{i,j\}\in\mathscr{K}\bigr),$$

где $\bigstar_{k=1}^m G_k$ *обозначает свободное произведение групп* G_k.

Замечание 2.7. Для свободного произведения групп мы используем символ $\star$ вместо более привычного символа $*$, который будет использоваться для джойна топологических пространств.

§ 3. Классифицирующие пространства

Здесь мы собрали информацию о классифицирующих пространствах для граф-произведений групп. Результаты этого параграфа не являются новыми, но так как они рассеяны по различным источникам, удобно собрать их в одном месте.

Напомним, что линейно связное пространство X называется *асферическим*, если $\pi_i(X)=0$ при $i\geqslant 2$. Асферическое пространство X является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,1)$ с $\pi=\pi_1(X)$.

Для любой (дискретной) группы G существует *универсальное G-накрытие* $EG\to BG$, тотальное пространство EG которого стягиваемо, а база BG, называемая *классифицирующим пространством* для G, имеет гомотопический тип $K(G,1)$ (т.е. $\pi_1(BG) = G$ и $\pi_i(BG) = 0$ при $i \geqslant 2$). Таким образом, мы можем использовать обозначения BG и $K(G,1)$ для одного и того же пространства.

Заметим, что $B\mathbb{Z} \simeq S^1$ и $B\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{R}P^\infty$, а соответствующими универсальными накрытиями являются $\mathbb{R} \to S^1$ и $S^\infty \to \mathbb{R}P^\infty$ соответственно.

Далее будем использовать обозначения из конструкции 2.5. Классифицирующее пространство $B\boldsymbol{G}^I$ есть произведение пространств BG_i по $i \in I$. Таким образом, мы имеем полиэдральное произведение $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$, соответствующее набору пар $(B\boldsymbol{G}, \mathrm{pt}) = \{(BG_1, \mathrm{pt}), \dots, (BG_m, \mathrm{pt})\}$. Аналогично, мы имеем полиэдральное произведение $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$, соответствующее набору пар $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G}) = \{(EG_1, G_1), \dots, (EG_m, G_m)\}$. Здесь каждое G_i вкладывается в EG_i как слой накрытия $EG_i \to BG_i$ над отмеченной точкой.

Имеется следующее обобщение гомотопических расслоений (2.8) и (2.9).

Предложение 3.1. *Последовательность канонических отображений*

$$(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \longrightarrow (B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \longrightarrow \prod_{k=1}^{m} BG_k$$

представляет собой гомотопическое расслоение.

В случае, когда каждая группа G_k есть $\mathbb{Z}$, мы получаем расслоение (2.8), так как пара $(E\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ гомотопически эквивалентна паре $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$. Аналогично, когда каждая группа G_k есть $\mathbb{Z}_2$, мы получаем расслоение (2.9), так как пара $(E\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ гомотопически эквивалентна паре (D^1, S^0).

Доказательство предложения 3.1. Обозначим произведение $\prod_{k=1}^m BG_k$ через $\boldsymbol{G}^{[m]}$; это согласуется с предыдущим обозначением $\boldsymbol{G}^I$. Согласно [5; предложение 5.1] гомотопический слой вложения $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \to B\boldsymbol{G}^{[m]}$ отождествляется с гомотопическим копределом $\operatorname{hocolim}_{I \in \mathscr{K}} \boldsymbol{G}^{[m]}/\boldsymbol{G}^I$ диаграммы из $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$ в TOP, задаваемой на объектах как $I \mapsto \boldsymbol{G}^{[m]}/\boldsymbol{G}^I$ (где $\boldsymbol{G}^{[m]}/\boldsymbol{G}^I$ – факторгруппа, рассматриваемая как дискретное пространство) и переводящей морфизм $I \subset J$ в каноническую проекцию $\boldsymbol{G}^{[m]}/\boldsymbol{G}^I \to \boldsymbol{G}^{[m]}/\boldsymbol{G}^J$. Эта диаграмма не является кофибрантной в смысле Риди, например, ввиду того, что отображение пространств $\boldsymbol{G}^{[m]}/\boldsymbol{G}^I \to \boldsymbol{G}^{[m]}/\boldsymbol{G}^J$ не является корасслоением. Это последнее отображение гомотопически эквивалентно замкнутому корасслоению $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^I \to (E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^J$, которое представляет собой морфизм в $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$-диаграмме $\mathscr{D}_{\mathscr{K}}(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})$; см. (2.2). Диаграмма $\mathscr{D}_{\mathscr{K}}(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})$ является кофибрантной в смысле Риди; см. [4; предложение 8.1.1]. Следовательно, гомотопический слой вложения $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \to B\boldsymbol{G}^{[m]}$ есть

$$\operatorname*{hocolim}_{I \in \mathscr{K}} \boldsymbol{G}^{[m]}/\boldsymbol{G}^I \simeq \operatorname*{colim}_{I \in \mathscr{K}} (E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^I = (E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}.$$

Гомотопическое расслоение из предложения 3.1 приводит к следующему теоретико-групповому результату.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс на m вершинах и $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$ – граф-произведение групп* (2.13). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}) \cong \boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$.

б) *Каждое из пространств* $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ *и* $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ *является асферическим тогда и только тогда, когда* $\mathscr{K}$ *– флаговый комплекс. Таким образом,* $B(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}) = (B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ *при условии, что* $\mathscr{K}$ *флаговый.*

в) $\pi_i((B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}) \cong \pi_i((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}})$ *при* $i \geqslant 2$.

г) *Фундаментальная группа* $\pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}})$ *изоморфна ядру канонической проекции* $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} \to \prod_{k=1}^m G_k$.

Доказательство. Для доказательства утверждения а) используем индукцию, добавляя симплексы к $\mathscr{K}$ по одному и применяя теорему ван Кампена. Базой индукции является комплекс $\mathscr{K}$, состоящий из m отдельных точек. Тогда $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ есть букет $BG_1 \vee \dots \vee BG_m$, а $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}})$ есть свободное произведение $G_1 \star \dots \star G_m$. Эта группа есть в точности группа $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$, так что а) имеет место. Предположим теперь, что комплекс $\mathscr{K}'$ получен из $\mathscr{K}$ добавлением одного одномерного симплекса $\{i, j\}$. Тогда по определению полиэдрального произведения

$$(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}'} = (B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \cup (BG_i \times BG_j),$$

где две части склеиваются вдоль $BG_i \vee BG_j$. В силу теоремы ван Кампена $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}'})$ представляет собой амальгамированное свободное произведение $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}) \star_{(G_i \star G_j)} (G_i \times G_j)$. Эта группа получается из $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}})$ добавлением всех соотношений вида $g_i g_j = g_j g_i$ для $g_i \in G_i$, $g_j \in G_j$. В силу предположения индукции это есть в точности $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}'}$. Добавление симплексов размерности 2 и более к $\mathscr{K}$ не влияет на группу $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$ и приводит к добавлению клеток размерности 3 и более к $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$, что не изменяет $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}})$. Таким образом, шаг индукции завершен и утверждение а) доказано.

Теперь докажем утверждение б). Канонические гомоморфизмы $\boldsymbol{G}^I \to \boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$ дают отображения классифицирующих пространств $B\boldsymbol{G}^I \to B(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}})$. Они определяют морфизм $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$-диаграммы $\mathscr{D}_{\mathscr{K}}(B\boldsymbol{G}, \mathrm{pt})$ в постоянную диаграмму $B(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}})$, а значит, отображение копределов

$$\operatorname*{colim}_{I \in \mathscr{K}} B\boldsymbol{G}^I = (B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \to B(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}). \tag{3.1}$$

Согласно [5; предложение 5.1] гомотопический слой отображения (3.1) можно отождествить с гомотопическим копределом $\operatorname{hocolim}_{I \in \mathscr{K}} \boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} / \boldsymbol{G}^I$ диаграммы из $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$ в TOP, задаваемой на объектах как $I \mapsto \boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} / \boldsymbol{G}^I$ (где $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} / \boldsymbol{G}^I$ есть правый класс смежности, рассматриваемый как дискретное пространство) и переводящей морфизм $I \subset J$ в каноническую проекцию $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} / \boldsymbol{G}^I \to \boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} / \boldsymbol{G}^J$. В силу [5; следствие 5.4] гомотопический копредел $\operatorname{hocolim}_{I \in \mathscr{K}} \boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} / \boldsymbol{G}^I$ гомеоморфен факторпространству

$$\bigl(B\mathrm{CAT}(\mathscr{K}) \times \boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}\bigr) / \sim. \tag{3.2}$$

Здесь $B\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$ – классифицирующее пространство категории $\mathrm{CAT}(\mathscr{K})$, которое гомеоморфно конусу над $|\mathscr{K}|$. Отношение эквивалентности $\sim$ определяется следующим образом: $(x, gh) \sim (x, g)$, если $h \in \boldsymbol{G}^I$ и $x \in B(I \downarrow \mathrm{CAT}(\mathscr{K}))$, где $I \downarrow \mathrm{CAT}(\mathscr{K})$ – нижняя подкатегория, объектами которой являются симплексы $J \in \mathscr{K}$, для которых $I \subset J$. Классифицирующее пространство $B(I \downarrow \mathrm{CAT}(\mathscr{K}))$

гомеоморфно звезде симплекса I в $\mathscr{K}$. В случае, когда $\mathscr{K}$ является флаговым комплексом, факторпространство (3.2) стягиваемо согласно [5; предложение 6.1]. Следовательно, отображение (3.1) является гомотопической эквивалентностью. Это означает, что пространство $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ является асферическим для флаговых $\mathscr{K}$.

Предположим теперь, что $\mathscr{K}$ не является флаговым комплексом. Выберем недостающую грань $J=\{j_1,\dots,j_k\}\subset[m]$ с $k\geqslant 3$ вершинами и рассмотрим соответствующий полный подкомплекс $\mathscr{K}_J$. Тогда $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}_J}$ есть толстый букет пространств $\{BG_j,\, j\in J\}$ (см. пример 2.3, 1), который является ретрактом пространства $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ согласно предложению 2.2. Таким образом, чтобы убедиться, что пространство $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ не является асферическим, достаточно установить, что $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}_J}$ не является асферическим. Пусть $FW(X_1,\dots,X_k)$ обозначает толстый букет пространств $X_1,\dots,X_k$. Согласно результату Дж. Портера [15] гомотопический слой вложения

$$FW(X_1,\dots,X_k)\hookrightarrow\prod_{i=1}^{k}X_i$$

есть $\Sigma^{k-1}\Omega X_1\wedge\dots\wedge\Omega X_k$, где Σ обозначает надстройку, а Ω – функтор взятия пространства петель. В нашем случае мы получаем, что гомотопический слой вложения $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}_J}\to\prod_{j\in J}BG_j$ есть $\Sigma^{k-1}G_{j_1}\wedge\dots\wedge G_{j_k}$. Так как каждое G_j есть дискретное пространство, последняя надстройка представляет собой букет $(k-1)$-мерных сфер. Ее гомотопическая группа π_{k-1} нетривиальна. Так как $\prod_{j\in J}BG_j$ является пространством типа $K(\pi,1)$, из гомотопической точной последовательности расслоения следует, что $\pi_{k-1}((B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}_J})\neq 0$ для некоторого $k\geqslant 3$. Поэтому пространства $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}_J}$ и $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ не являются асферическими.

Асферичность полиэдрального произведения $(E\boldsymbol{G},\boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ и утверждения в) и г) вытекают из точной гомотопической последовательности расслоения из предложения 3.1, так как $\pi_i(\prod_{k=1}^{m}BG_k)=0$ при $i\geqslant 2$.

Теорема 3.2 доказана.

Переходя к случаям $G_k=\mathbb{Z}$ и $G_k=\mathbb{Z}_2$ соответственно, мы получаем следующие результаты о прямоугольных группах Артина и Коксетера. Заметим, что в этих двух случаях группы G_k являются абелевыми, так что $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}\to\prod_{k=1}^{m}G_k$ есть гомоморфизм абеленизации, а его ядро есть коммутант $(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}})'$.

Следствие 3.3. *Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс на m вершинах, $(S^1)^{\mathscr{K}}$ и $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}$ – полиэдральные произведения* (2.4) *и* (2.5) *соответственно, а $RA_{\mathscr{K}}$ – соответствующая прямоугольная группа Артина. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) $\pi_1((S^1)^{\mathscr{K}})\cong RA_{\mathscr{K}}$.

б) *Каждое из пространств $(S^1)^{\mathscr{K}}$ и $\mathscr{L}_{\mathscr{K}}$ является асферическим тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}$ – флаговый комплекс.*

в) $\pi_i((S^1)^{\mathscr{K}})\cong\pi_i(\mathscr{L}_{\mathscr{K}})$ *при* $i\geqslant 2$.

г) *Группа $\pi_1(\mathscr{L}_{\mathscr{K}})$ изоморфна коммутанту $RA'_{\mathscr{K}}$.*

Следствие 3.4. *Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс на m вершинах, $(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathscr{K}}$ и $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ – полиэдральные произведения* (2.6) *и* (2.7) *соответственно,* *а $RC_{\mathscr K}$ – соответствующая прямоугольная группа Коксетера. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) $\pi_1((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathscr K}) \cong RC_{\mathscr K}$.

б) *Каждое из пространств* $(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathscr K}$ *и* $\mathscr R_{\mathscr K}$ *является асферическим тогда и только тогда, когда* $\mathscr K$ *– флаговый комплекс.*

в) $\pi_i((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathscr K}) \cong \pi_i(\mathscr R_{\mathscr K})$ *при* $i \geqslant 2$.

г) *Группа* $\pi_1(\mathscr R_{\mathscr K})$ *изоморфна коммутанту* $RC'_{\mathscr K}$.

Замечание 3.5. Все составляющие доказательства теоремы 3.2 содержатся в работе [5]. Тот факт, что полиэдральное произведение $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr K}$ является классифицирующим пространством для граф-произведения $\boldsymbol{G}^{\mathscr K}$ в случае флагового комплекса $\mathscr K$, означает, что функтор классифицирующего пространства переводит копредел групп (задающий граф-произведение) в копредел топологических пространств (задающий полиэдральное произведение). Это неверно в случае, когда $\mathscr K$ не является флаговым комплексом, ввиду наличия высших произведений Уайтхеда и Самельсона (см. [5], [14], [16]); но ситуацию можно исправить, заменив копределы на гомотопические копределы. Все эти факты были доказаны в [5] для произвольных топологических групп с хорошими отмеченными точками.

Утверждения а) и б) из следствия 3.3, составляющие гомотопическую эквивалентность $(S^1)^{\mathscr K} \simeq K(RA_{\mathscr K}, 1)$ для флагового $\mathscr K$, были получены Ки Хан Кимом и Ф. В. Рушем в [6; теорема 10]. Утверждения а) и б) из следствия 3.4, составляющие гомотопическую эквивалентность $(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathscr K} \simeq K(RC_{\mathscr K}, 1)$ для флагового $\mathscr K$, неявно присутствуют в работах М. В. Дэвиса и Т. Янушкевича (см. [11] и [12; с. 437]). В частности, стягиваемость пространства (3.2) (которая является ключевым шагом в доказательстве утверждения б) теоремы 3.2) в случае прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathscr K}$ следует из [11; теорема 13.5]. Изоморфизм между фундаментальной группой $\pi_1(\mathscr R_{\mathscr K})$ и коммутантом $RC'_{\mathscr K}$ был также получен в работе К. Дромса [17] (его кубический комплекс представляет собой двумерный остов нашего комплекса $\mathscr R_{\mathscr K}$ и поэтому имеет ту же фундаментальную группу).

В случае общего граф-произведения $\boldsymbol{G}^{\mathscr K}$ результат о том, что оба пространства $(B\boldsymbol{G})^{\mathscr K}$ и $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr K}$ являются асферическими тогда и только тогда, когда $\mathscr K$ является флаговым комплексом, появился в работе М. Стафы (см. [18; теорема 1.1]).

Пример 3.6. Пусть $\mathscr K$ – цикл из m-звеньев (граница m-угольника). Простое рассуждение с эйлеровой характеристикой показывает, что в этом случае комплекс $\mathscr R_{\mathscr K}$ гомеоморфен замкнутой ориентируемой поверхности рода $(m-4)2^{m-3}+1$ (это наблюдение восходит к работе Г. Коксетера 1938 г.; см. [4; предложение 4.1.8]). Следовательно, коммутант соответствующей прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathscr K}$ есть фундаментальная группа поверхности. Этот пример изучался в работах [9] и [17].

Аналогично, если $|\mathscr K| \cong S^2$ (эквивалентно, $\mathscr K$ является границей трехмерного симплициального многогранника), то $\mathscr R_{\mathscr K}$ представляет собой трехмерное многообразие. Следовательно, коммутант соответствующей группы $RC_{\mathscr K}$ является фундаментальной группой трехмерного многообразия. Тот факт, что фундаментальные группы трехмерных многообразий возникают как подгруппы в прямоугольных группах Артина и Коксетера, привлек большое внимание в литературе с недавнего времени.

Все группы гомологий рассматриваются с целыми коэффициентами. Гомологии комплекса $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ описываются следующим результатом (в частном случае флагового комплекса $\mathscr{K}$ мы получаем описание гомологий коммутанта $RC'_{\mathscr{K}}$).

Теорема 3.7 (см. [2], [4; п. 4.5]). *Для любого $k \geqslant 0$ имеем изоморфизм*

$$H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_J),$$

где $\widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_J)$ – группа приведенных симплициальных гомологий симплициального комплекса $\mathscr{K}_J$.

Структура кольца когомологий $H^*(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ описана в [13].

§ 4. Структура коммутантов

В силу теоремы 3.2

$$\operatorname{Ker}\biggl(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k\biggr) = \pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}).$$

В случае прямоугольных групп Артина и Коксетера (а также в случае, когда каждая группа G_k абелева) группа из формулы выше является коммутантом $(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}})'$ группы $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$. Мы изучим группу $\pi_1((E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}})$, определим класс симплициальных комплексов $\mathscr{K}$, для которых эта группа свободна, и опишем ее минимальный набор образующих.

Нам понадобится следующая модификация результата Е. Грбич и С. Терио из работы [16].

Предложение 4.1. *Пусть $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1 \cup_I \mathscr{K}_2$ – симплициальный комплекс, получаемый склейкой комплексов $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ вдоль их общей грани I, которая может быть пустой. Если полиэдральные произведения $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}_1}$ и $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}_2}$ гомотопически эквивалентны букетам окружностей, то $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ также гомотопически эквивалентно букету окружностей.*

Доказательство. Мы можем считать, что $\mathscr{K}$ имеет множество вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$, $\mathscr{K}_1$ есть полный подкомплекс в $\mathscr{K}$ на множестве первых m_1 вершин $\{1, \dots, m_1\}$, $\mathscr{K}_2$ есть полный подкомплекс в $\mathscr{K}$ на множестве последних m_2 вершин $\{m - m_2 + 1, \dots, m\}$, а общая грань I – на k вершинах $m_1 - k + 1, \dots, m_1$, где $m_1 < m$, $m_2 < m$ и $m = m_1 + m_2 - k$. Рассмотрим полиэдральное произведение $(C\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})^{\mathscr{K}}$, соответствующее набору пар пространств $(C\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \{(CX_1, X_1), \dots, (CX_m, X_m)\}$, где CX_i обозначает конус над X_i. Согласно [16; теорема 6.12]

$$(C\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})^{\mathscr{K}} \simeq (M_1 * M_2) \vee \bigl((C\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})^{\mathscr{K}_1} \rtimes M_2\bigr) \vee \bigl(M_1 \ltimes (C\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})^{\mathscr{K}_2}\bigr), \qquad (4.1)$$

где $M_1 = \prod_{i=1}^{m_1} X_i$, $M_2 = \prod_{i=m-m_2+1}^{m} X_i$, $M_1 * M_2$ есть джойн пространств M_1 и M_2, $X \rtimes Y$ есть *правое полусмаш-произведение* $X \times Y/\mathrm{pt} \times Y$ пространств X, Y с отмеченными точками, а $X \ltimes Y$ есть их *левое полусмаш-произведение* $X \times Y/X \times \mathrm{pt}$.

В нашем случае каждое X_i есть дискретное пространство G_i, пара (EG_i, G_i) гомотопически эквивалентна паре (CG_i, G_i), а каждое из пространств M_1, M_2 в (4.1) является дискретным. Следовательно, каждое из трех слагаемых в букете (4.1) гомотопически эквивалентно букету окружностей, и то же верно для $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$.

Предложение доказано.

Граф Γ называется *хордовым* (или *триангулированным*), если каждый его цикл с четырьмя и более вершинами содержит хорду (ребро, соединяющее две вершины, которые не являются соседними в цикле).

Следующий результат дает другое описание хордовых графов.

Теорема 4.2 (Д. Р. Фалькерсон, О. А. Гросс; см. [19]). *Граф является хордовым тогда и только тогда, когда его вершины можно упорядочить таким образом, что для каждой вершины i множество всех ее соседей, которые меньше ее, образует клику.*

Порядок вершин, описываемый теоремой 4.2, называется *совершенным порядком исключения.*

Теорема 4.3. *Пусть $\mathscr{K}$ – флаговый симплициальный комплекс на m вершинах, $\boldsymbol{G} = (G_1, \dots, G_m)$ – набор из m нетривиальных групп и $\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}}$ – граф-произведение групп* (2.13). *Следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ *является свободной группой;*

б) $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ *гомотопически эквивалентно букету окружностей;*

в) $\Gamma = \mathscr{K}^1$ *является хордовым графом.*

Доказательство. б) $\Rightarrow$ а). Это следует из теоремы 3.2, г) и того факта, что фундаментальная группа букета окружностей свободна.

в) $\Rightarrow$ б). Здесь мы используем рассуждение из доказательства теоремы 4.6 в [10]. Однако в том рассуждении содержалась неточность, на которую нам указал А. А. Гайфуллин и которая исправлена в рассуждении ниже.

Пусть вершины комплекса $\mathscr{K}$ находятся в совершенном порядке исключения. Сопоставим каждой вершине i клику I_i, состоящую из вершины i и ее меньших соседей. Так как $\mathscr{K}$ – флаговый комплекс, каждая клика I_i является его гранью. Все максимальные грани содержатся среди $I_1, \dots, I_m$, поэтому мы имеем $\bigcup_{i=1}^{m} I_i = \mathscr{K}$. Кроме того, для любого $k = 1, \dots, m$ совершенный порядок исключения на $\mathscr{K}$ индуцирует такой порядок на полном подкомплексе $\mathscr{K}_{\{1,\dots,k-1\}}$, а значит, мы имеем $\bigcup_{i=1}^{k-1} I_i = \mathscr{K}_{\{1,\dots,k-1\}}$. В частности, симплициальный комплекс $\bigcup_{i=1}^{k-1} I_i$ является флаговым как полный подкомплекс флагового комплекса. Пересечение $I_k \cap \bigcup_{i=1}^{k-1} I_i$ является кликой, поэтому оно является гранью комплекса $\bigcup_{i=1}^{k-1} I_i$. Тогда последовательное применение предложения 4.1 показывает, что $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ является букетом окружностей.

а) $\Rightarrow$ в). Пусть $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k)$ – свободная группа. Предположим, что граф $\Gamma = \mathscr{K}^1$ не является хордовым, и выберем бесхордовый цикл J

с $|J| \geqslant 4$. Тогда полный подкомплекс $\mathscr{K}_J$ есть тот же самый цикл (граница $|J|$-угольника).

Вначале рассмотрим случай, когда каждая из групп G_k есть $\mathbb{Z}_2$, т.е. когда $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ есть $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$. Тогда $\mathscr{R}_{\mathscr{K}_J}$ гомеоморфно замкнутой ориентируемой поверхности рода $(|J|-4)2^{|J|-3}+1$ согласно [4; предложение 4.1.8]. В частности, фундаментальная группа $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}_J})$ не является свободной. С другой стороны, пространство $\mathscr{R}_{\mathscr{K}_J}$ является ретрактом пространства $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ согласно предложению 2.2, а значит, $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}_J})$ является подгруппой свободной группы

$$\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = \operatorname{Ker}(RC_{\mathscr{K}} \to (\mathbb{Z}_2)^m).$$

Противоречие.

Теперь рассмотрим общий случай. Заметим, что пара (EG_k, G_k) гомотопически эквивалентна паре (CG_k, G_k), так что мы можем рассматривать $(C\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$ вместо $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}}$. Так как каждая группа G_k дискретна и нетривиальна, можно зафиксировать вложение пары точек $S^0 \hookrightarrow G_k$; тогда существует ретракция $G_k \to S^0$ (она может не быть гомоморфизмом групп). Эта ретракция продолжается до ретракции пар $(CG_k, G_k) \to (D^1, S^0)$. Все вместе эти ретракции дают ретракцию полиэдральных произведений $(C\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \to (D^1, S^0)^{\mathscr{K}} = \mathscr{R}_{\mathscr{K}}$. В результате мы имеем композицию ретракций $(C\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} \to \mathscr{R}_{\mathscr{K}} \to \mathscr{R}_{\mathscr{K}_J}$, а значит, $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}_J})$ вкладывается как подгруппа в свободную группу

$$\pi_1(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathscr{K}} = \operatorname{Ker}\biggl(\boldsymbol{G}^{\mathscr{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k\biggr).$$

С другой стороны, если $\mathscr{K}^1$ содержит бесхордовый цикл J с $|J| \geqslant 4$, то $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}_J})$ является фундаментальной группой поверхности и поэтому несвободна. Противоречие.

Теорема доказана.

Следствие 4.4. *Пусть $RA_{\mathscr{K}}$ и $RC_{\mathscr{K}}$ – прямоугольные группы Артина и Коксетера, соответствующие симплициальному комплексу $\mathscr{K}$. Справедливы следующие утверждения.*

а) *Коммутант $RA'_{\mathscr{K}}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}^1$ является хордовым графом.*

б) *Коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}^1$ является хордовым графом.*

Часть а) следствия 4.4 есть результат Х. Серватиуса, К. Дромса и В. Серватиус из работы [9]. Различие между частями а) и б) заключается в том, что коммутант $RA'_{\mathscr{K}}$ бесконечно порожден, за исключением случая $RA_{\mathscr{K}} = \mathbb{Z}^m$, в то время как коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ является конечно порожденной группой. Мы подробнее изучим этот вопрос в следующей теореме.

Пусть $(g,h) = g^{-1}h^{-1}gh$ обозначает групповой коммутатор элементов g, h.

Теорема 4.5. *Пусть $RC_{\mathscr{K}}$ – прямоугольная группа Коксетера, соответствующая симплициальному комплексу $\mathscr{K}$ на m вершинах. Тогда коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из*

$\sum_{J\subset[m]}\operatorname{rank}\widetilde{H}_0(\mathscr{K}_J)$ *вложенных коммутаторов вида*

$$(g_j,g_i),\quad (g_{k_1},(g_j,g_i)),\quad \dots,\quad (g_{k_1},(g_{k_2},\dots(g_{k_{m-2}},(g_j,g_i))\dots)), \tag{4.2}$$

где $k_1<k_2<\dots<k_{\ell-2}<j>i$, $k_s\ne i$ *для всех* s *и* i *– наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса* $\mathscr{K}_{\{k_1,\dots,k_{\ell-2},j,i\}}$, *не содержащей* j.

Теорема 4.5 аналогична результату из [10], описывающему подалгебру-коммутант градуированной алгебры Ли

$$L_{\mathscr{K}}=\mathrm{FL}\langle u_1,\dots,u_m\rangle\big/\big([u_i,u_i]=0,\ [u_i,u_j]=0 \text{ при } \{i,j\}\in\mathscr{K}\big), \tag{4.3}$$

где $\mathrm{FL}\langle u_1,\dots,u_m\rangle$ – свободная градуированная алгебра Ли от образующих u_i степени 1, а $[a,b]=-(-1)^{|a|\,|b|}[b,a]$ обозначает градуированную скобку Ли. Подалгебра-коммутант есть ядро гомоморфизма алгебр Ли $L_{\mathscr{K}}\to\mathrm{CL}\langle u_1,\dots,u_m\rangle$ в коммутативную (тривиальную) алгебру Ли.

Градуированная алгебра Ли (4.3) является граф-произведением по аналогии с прямоугольной группой Коксетера $RC_{\mathscr{K}}$. Она имеет представление в виде копредела, аналогичного (2.13), где каждая группа G_i заменяется на тривиальную алгебру Ли $\mathrm{CL}\langle u\rangle=\mathrm{FL}\langle u\rangle/([u,u]=0)$, а копредел берется в категории градуированных алгебр Ли.

Теорема 4.6 (см. [10; теорема 4.3]). *Подалгебра-коммутант градуированной алгебры Ли* $L_{\mathscr{K}}$ *имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из* $\sum_{J\subset[m]}\operatorname{rank}\widetilde{H}_0(\mathscr{K}_J)$ *вложенных коммутаторов вида*

$$[u_j,u_i],\quad [u_{k_1},[u_j,u_i]],\quad \dots,\quad [u_{k_1},[u_{k_2},\dots[u_{k_{m-2}},[u_j,u_i]]\dots]],$$

где $k_1<k_2<\dots<k_{\ell-2}<j>i$, $k_s\ne i$ *для всех* s *и* i *– наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса* $\mathscr{K}_{\{k_1,\dots,k_{\ell-2},j,i\}}$, *не содержащей* j.

Общая схема доказательства теоремы 4.5 та же, что и для теоремы 4.6. Однако при работе с групповыми коммутаторами требуется несколько иная техника, чем для скобок в алгебрах Ли. Тем не менее эта техника довольно стандартна и может быть извлечена из известных источников таких, как [20].

Доказательство теоремы 4.5. Первая часть рассуждения стандартна и применима к коммутанту произвольной группы. Любой элемент группы $RC'_{\mathscr{K}}$ является произведением коммутаторов (a,b) с $a,b\in RC_{\mathscr{K}}$. Записывая каждый элемент a, b как слово от образующих $g_1,\dots,g_m$ и используя тождества Холла

$$\begin{aligned}(a,bc)&=(a,c)(a,b)((a,b),c),\\ (ab,c)&=(a,c)((a,c),b)(b,c),\end{aligned} \tag{4.4}$$

мы можем выразить каждый элемент группы $RC'_{\mathscr{K}}$ через итерированные коммутаторы $(g_{i_1}^{n_{i_1}},\dots,g_{i_\ell}^{n_{i_\ell}})$ с $n_{i_k}\in\mathbb{Z}$ и произвольной расстановкой скобок. Ввиду наличия соотношений $g_i^2=1$ в группе $RC_{\mathscr{K}}$ мы можем считать, что все n_{i_k} суть 1. Будем называть $\ell\geqslant 2$ *длиной* итерированного коммутатора. Если итерированный коммутатор $(g_{i_1},\dots,g_{i_\ell})$ содержит коммутатор (a,b), где каждый из элементов a,b сам является коммутатором, то мы можем исключить такой коммутатор $(g_{i_1},\dots,g_{i_\ell})$ из набора образующих, записывая (a,b) как слово от более коротких коммутаторов a,b и последовательно используя тождества (4.4). Таким образом, мы получаем набор образующих группы $RC'_{\mathscr K}$, состоящий только из *вложенных* итерированных коммутаторов, т.е. не содержащих коммутаторы (a,b), где каждый из a, b сам является коммутатором. Далее мы используем тождество

$$((a,b),c)=(b,a)(c,(b,a))(a,b)$$

и тождества (4.4) для того, чтобы выразить каждый вложенный итерированный коммутатор через *канонические* вложенные коммутаторы вида

$$(g_{i_1},(g_{i_2},\dots(g_{i_{\ell-2}},(g_{i_{\ell-1}},g_{i_\ell}))\dots)).$$

Наиболее важной частью доказательства является выражение каждого канонического вложенного коммутатора через канонические вложенные коммутаторы, в которых образующие g_i появляются в специальном порядке. Это будет проделано с использованием как алгебраической, так и топологической техники, а также специфики группы $RC_{\mathscr K}$.

Вначале мы докажем частный случай утверждения теоремы, соответствующий комплексу $\mathscr K$ из m отдельных точек. В этом случае группа $RC_{\mathscr K}$ есть свободное произведение m экземпляров группы $\mathbb Z_2$.

Лемма 4.7. *Пусть G – свободное произведение m экземпляров группы $\mathbb Z_2$ с представлением*

$$G=F(g_1,\dots,g_m)/(g_i^2=1,\,i=1,\dots,m).$$

Тогда коммутант G' является свободной группой, свободно порожденной вложенными коммутаторами вида

$$(g_j,g_i),\quad (g_{k_1},(g_j,g_i)),\quad \dots,\quad (g_{k_1},(g_{k_2},\dots(g_{k_{m-2}},(g_j,g_i))\dots)),$$

где $k_1<k_2<\dots<k_{\ell-2}<j>i$ и $k_s\ne i$ для всех s. Здесь число коммутаторов длины ℓ равно $(\ell-1)\binom{m}{\ell}$.

Доказательство. Утверждение очевидно при $m=1$ (тогда $G=\mathbb Z_2$) и при $m=2$ (тогда $G=\mathbb Z_2\star\mathbb Z_2$ и $G'\cong\mathbb Z$ с образующей (g_2,g_1)). При $m=3$ лемма утверждает, что коммутант группы $G=\mathbb Z_2\star\mathbb Z_2\star\mathbb Z_2$ является свободной группой со свободной системой порождающих

$$(g_2,g_1),\quad (g_3,g_1),\quad (g_3,g_2),\quad (g_1,(g_3,g_2)),\quad (g_2,(g_3,g_1)).$$

Это легко доказать геометрически, отождествляя $RC'_{\mathscr K}$ с $\pi_1(\mathscr R_{\mathscr K})$. В нашем случае $\mathscr R_{\mathscr K}$ есть одномерный остов трехмерного куба (см. пример 2.3, 4). Мы имеем $(g_1,(g_3,g_2))=g_1(g_2,g_3)g_1(g_3,g_2)$, $(g_2,(g_3,g_1))=g_2(g_1,g_3)g_2(g_3,g_1)$, а элементы (g_2,g_1), (g_3,g_1), (g_3,g_2), $g_1(g_2,g_3)g_1$, $g_2(g_1,g_3)g_2$ соответствуют петлям вдоль пяти различных граней комплекса $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, которые свободно порождают его фундаментальную группу.

Общее утверждение для произвольного m можно аналогично доказать топологически, отождествляя G' с фундаментальной группой одномерного остова m-мерного куба (см. [18; предложение 3.6]). Мы, однако, приведем алгебраическое рассуждение, которое нам понадобится в дальнейшем. Имеем коммутаторное тождество

$$(g_q,(g_p,x)) = (g_q,x)(x,(g_p,g_q))(g_q,g_p)(x,g_p)(g_p,(g_q,x))(x,g_q)(g_p,g_q)(g_p,x), \tag{4.5}$$

которое можно вывести из тождества Холла–Витта или проверить непосредственно. Заметим, что если x является каноническим вложенным коммутатором, то сомножитель $(x,(g_p,g_q))$ можно выразить через вложенные коммутаторы, как в начале доказательства теоремы 4.5. В этом случае мы можем использовать тождество (4.5) для изменения порядка образующих g_p и g_q в коммутаторе $(g_q,(g_p,x))$, выражая этот коммутатор через $(g_p,(g_q,x))$ и канонические вложенные коммутаторы меньшей длины.

В последующих рассуждениях мы будем переставлять элементы в итерированном коммутаторе. При такой перестановке элемент группы, задаваемый коммутатором, будет меняться, однако два элемента всегда будут отличаться на произведение коммутаторов меньшей длины, как в случае $(g_p,(g_q,x))$ и $(g_q,(g_p,x))$ в рассуждении выше. Если мы хотим переставить элементы g_p и g_q внутри канонического вложенного коммутатора вида $(\dots,(g_p,(g_q,x))\dots)$, где x является меньшим каноническим вложенным коммутатором, то необходимо последовательно использовать первое из тождеств (4.4) наряду с (4.5). Заметим, что если оба элемента b и c в тождестве $(a,bc)=(a,c)(a,b)((a,b),c)$ являются каноническими вложенными коммутаторами, то (a,c) и (a,b) также являются каноническими вложенными коммутаторами, в то время как $((a,b),c)=(b,a)c^{-1}(a,b)c$ является произведением вложенных коммутаторов меньшей длины.

Таким образом, используя тождество (4.5) совместно с (4.4), мы можем переставить любые две образующие в коммутаторе $(g_{i_1},\dots(g_{i_{\ell-2}},(g_{i_{\ell-1}},g_{i_\ell}))\dots)$ в пределах позиций с номерами от i_1 до $i_{\ell-2}$. Вначале мы используем это соображение для того, чтобы исключить из набора образующих коммутаторы $(g_{i_1},\dots(g_{i_{\ell-2}},(g_{i_{\ell-1}},g_{i_\ell}))\dots)$, содержащие пару одинаковых образующих g_i (т.е. коммутаторы, в которых $i_p=i_q$ для некоторых $p\ne q$). А именно, если пара одинаковых образующих встречается в пределах позиций с номерами от i_1 до $i_{\ell-2}$, то мы используем тождество (4.5) для приведения коммутатора к виду $(\dots(g_i,(g_i,x))\dots)$, где $x=(g_{i_{\ell-1}},g_{i_\ell})$, а затем, используя соотношение $(g_i,(g_i,x))=(g_i,x)(g_i,x)$, представляем исходный коммутатор в виде произведения коммутаторов меньшей длины. (Заметим, что здесь мы воспользовались соотношением $g_i^2=1$ в группе G.) Если же одна из одинаковых образующих имеет номер $i_{\ell-1}$ или i_ℓ, то мы используем (4.5) для приведения коммутатора к виду $(\dots(g_i,(g_i,g_j))\dots)$, а затем используем соотношение $(g_i,(g_i,g_j))=(g_i,g_j)(g_i,g_j)$. В результате мы получаем набор образующих для коммутанта G', состоящий из коммутаторов $(g_{i_1},\dots(g_{i_{\ell-2}},(g_{i_{\ell-1}},g_{i_\ell}))\dots)$ со всеми различными g_i. Это показывает, что группа G' конечно порождена.

Теперь мы используем тождество (4.5) для того, чтобы упорядочить образующие g_i в коммутаторах $(g_{i_1},\dots(g_{i_{\ell-2}},(g_{i_{\ell-1}},g_{i_\ell}))\dots)$. Выберем образующую g_{i_k} с наибольшим индексом i_k. Если эта образующая не находится на одной из последних трех позиций, то мы, используя соотношение (4.5), переставим ее на третью позицию с конца. Случай $m=3$, рассмотренный выше, показывает, что коммутатор $(g_j,(g_i,g_k))$ можно выразить через коммутаторы $(g_i,(g_j,g_k))$, $(g_k,(g_j,g_i))$ и коммутаторы меньшей длины. Это позволяет нам переместить образующую g_{i_k} с наибольшим индексом i_k в коммутаторе $(g_{i_1},\dots(g_{i_{\ell-2}},(g_{i_{\ell-1}},g_{i_\ell}))\dots)$ на предпоследнюю позицию и положить $j=i_k$. Далее мы используем тождества (4.5) и (4.4), чтобы поставить первые $\ell-2$ образующих в коммутаторе в возрастающем порядке, и переобозначаем их индексы как $k_1<\dots<k_{\ell-2}$. В результате мы получаем набор образующих коммутанта G', состоящий из коммутаторов требуемого вида $(g_{k_1},(g_{k_2},\dots(g_{k_{\ell-2}},(g_j,g_i))\dots))$, где $k_1<k_2<\dots<k_{\ell-2}<j>i$ и $k_s\ne i$ для всех s.

Остается показать, что построенный набор образующих свободно порождает группу G'. Этот набор состоит из $N=\sum_{\ell=2}^{m}(\ell-1)\binom{m}{\ell}=(m-2)2^{m-1}+1$ коммутаторов. С другой стороны, $G'\cong\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$, где $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ есть одномерный остов m-мерного куба. Тогда $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ гомотопически эквивалентно букету N окружностей (что легко получить при помощи индукции или путем подсчета эйлеровой характеристики) и $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ есть свободная группа ранга N. Таким образом, мы имеем набор из N образующих в свободной группе ранга N. Этот набор является свободным согласно классическому результату о том, что свободная группа конечного ранга не может быть изоморфна своей истинной факторгруппе; см. [20; теорема 2.13].

Лемма 4.7 доказана.

Теперь вернемся к доказательству теоремы 4.5. Мы будем исключать некоторые коммутаторы $(g_{k_1},(g_{k_2},\dots(g_{k_{\ell-2}},(g_j,g_i))\dots))$ из набора образующих, используя новые соотношения коммутативности.

Вначале предположим, что вершины j и i находятся в одной связной компоненте комплекса $\mathscr{K}_{\{k_1,\dots,k_{\ell-2},j,i\}}$. Мы покажем, что соответствующий коммутатор $(g_{k_1},(g_{k_2},\dots(g_{k_{\ell-2}},(g_j,g_i))\dots))$ может быть исключен из набора образующих. Выберем путь из i в j, т.е. выберем вершины $i_1,\dots,i_n$ из $k_1,\dots,k_{\ell-2}$ так, что в $\mathscr{K}$ содержатся ребра $\{i,i_1\},\{i_1,i_2\},\dots,\{i_{n-1},i_n\},\{i_n,j\}$. Далее проведем индукцию по длине пути. Индукция начинается с исключения коммутатора $(g_j,g_i)=1$, соответствующего пути из одного ребра $\{i,j\}\in\mathscr{K}$.

Теперь предположим, что путь состоит из $n+1$ ребер. Используя тождество (4.5), мы можем переместить элементы $g_{i_1},g_{i_2},\dots,g_{i_n}$ в коммутаторе $(g_{k_1},(g_{k_2},\dots(g_{k_{\ell-2}},(g_j,g_i))\dots))$ вправо и далее ограничиться рассмотрением коммутатора $(g_{i_1},(g_{i_2},\dots(g_{i_n},(g_j,g_i))\dots))$. Заметим, что при наличии коммутационного соотношения $(g_p,g_q)=1$ тождество (4.5) не содержит множителя $(x,(g_p,g_q))$ и поэтому позволяет переставлять g_p и g_q, не предполагая, что x является коммутатором. Таким образом, мы можем преобразовать коммутатор $(g_{i_1},(g_{i_2},\dots(g_{i_n},(g_j,g_i))\dots))$ (с $\{i_n,j\}\in\mathscr{K}$) в коммутатор $(g_j,(g_{i_1},\dots(g_{i_{n-1}},(g_{i_n},g_i))\dots))$. Он содержит коммутатор $(g_{i_1},\dots(g_{i_{n-1}},(g_{i_n},g_i))\dots)$, соответствующий более короткому пути $\{i,i_1,\dots,i_n\}$. По предположению индукции этот коммутатор можно выразить через коммутаторы меньшей длины, и поэтому он исключается из набора образующих.

В результате мы получаем набор образующих коммутанта $RC'_{\mathscr{K}}$, состоящий из вложенных коммутаторов $(g_{k_1},\dots(g_{k_{\ell-2}},(g_j,g_i))\dots)$, где j и i лежат в разных компонентах связности комплекса $\mathscr{K}_{\{k_1,\dots,k_{\ell-2},j,i\}}$. Рассмотрим коммутаторы $(g_{k_1},\dots(g_{k_{\ell-2}},(g_j,g_{i_1}))\dots)$ и $(g_{k'_1},\dots(g_{k'_{\ell-2}},(g_j,g_{i_2}))\dots)$ такие, что $\{k_1,\dots,k_{\ell-2},j,i_1\}=\{k'_1,\dots,k'_{\ell-2},j,i_2\}$ и i_1,i_2 лежат в одной связной компоненте комплекса $\mathscr{K}_{\{k_1,\dots,k_{\ell-2},j,i_1\}}$, которая отличается от связной компоненты, содержащей j. Мы утверждаем, что один из этих коммутаторов можно выразить через другой и коммутаторы меньшей длины. Чтобы убедиться в этом, используем рассуждение из предыдущего абзаца, т.е. рассмотрим путь в $\mathscr{K}_{\{k_1,\dots,k_{\ell-2},j,i_1\}}$ между i_1 и i_2 и будем укорачивать его индуктивно, пока не получим путь из одного ребра. Таким образом, мы приходим к паре коммутаторов $(g_{i_2},(g_j,g_{i_1}))$ и $(g_{i_1},(g_j,g_{i_2}))$, где $\{i_1,i_2\}\in\mathscr{K}$, $\{i_1,j\}\notin\mathscr{K}$, $\{i_2,j\}\notin\mathscr{K}$. Тогда наше утверждение вытекает из соотношения $(g_{i_1},g_{i_2})=1$ (сравните со случаем $m=3$ из леммы 4.7).

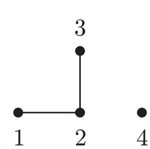
Теперь, чтобы перечислить независимые коммутаторы, мы выбираем коммутаторы $(g_{k_1},\dots(g_{k_{\ell-2}},(g_j,g_i))\dots)$, где i – наименьшая вершина в ее связной компоненте в комплексе $\mathscr{K}_{\{k_1,\dots,k_{\ell-2},j,i\}}$. Это дает нам в точности набор коммутаторов (4.2). Остается проверить, что этот набор образующих является минимальным. Для этого мы еще раз воспользуемся тем, что $RC'_{\mathscr{K}}=\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$. Первая группа гомологий $H_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ изоморфна факторгруппе $RC'_{\mathscr{K}}/RC''_{\mathscr{K}}$, где $RC''_{\mathscr{K}}$ есть коммутант группы $RC'_{\mathscr{K}}$. С другой стороны,

$$H_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})\cong\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_0(\mathscr{K}_J)$$

в силу теоремы 3.7. Поэтому, число образующих абелевой группы $H_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})\cong RC'_{\mathscr{K}}/RC''_{\mathscr{K}}$ равно $\sum_{J\subset[m]}\operatorname{rank}\widetilde{H}_0(\mathscr{K}_J)$. Это равно числу вложенных коммутаторов в наборе (4.2), так как $\operatorname{rank}\widetilde{H}_0(\mathscr{K})$ на единицу меньше числа связных компонент комплекса $\mathscr{K}$.

Теорема 4.5 доказана.

Пример 4.8. 1. Пусть $\mathscr{K}$ – симплициальный комплекс



на четырех вершинах. Тогда коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ является свободной группой, и теорема 4.5 дает для нее следующую систему свободных порождающих:

$$\begin{gathered}(g_3,g_1),\quad (g_4,g_1),\quad (g_4,g_2),\quad (g_4,g_3),\\ (g_2,(g_4,g_1)),\quad (g_3,(g_4,g_1)),\quad (g_1,(g_4,g_3)),\quad (g_3,(g_4,g_2)),\\ (g_2,(g_3,(g_4,g_1))).\end{gathered}$$

2. Пусть $\mathscr{K}$ – цикл из $m \geqslant 4$ звеньев. Тогда $\mathscr{K}^1$ не является хордовым графом и группа $RC'_{\mathscr{K}}$ не является свободной. В действительности $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ является ориентированной поверхностью рода $(m-4)2^{m-3}+1$ (см. пример 3.6), так что $RC'_{\mathscr{K}} \cong \pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ является группой с одним определяющим соотношением.

При $m=4$ мы получаем двумерный тор в качестве $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$, а теорема 4.5 дает две образующие, $a_1=(g_3,g_1)$ и $b_1=(g_4,g_2)$. Единственным соотношением, очевидно, является $(a_1,b_1)=1$. При $m \geqslant 5$ нам не известен явный вид единственного соотношения в группе $RC'_{\mathscr{K}} \cong \pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ в терминах образующих из теоремы 4.5. В работе [21] соответствующий вопрос изучен для подалгебры-коммутанта градуированной алгебры Ли из теоремы 4.6.

Список литературы

[1] M. W. Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Math. Soc. Monogr. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2008, xvi+584 pp.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, “Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра”, *УМН*, **55**:5(335) (2000), 3–106; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, T. E. Panov, “Torus actions, combinatorial topology, and homological algebra”, *Russian Math. Surveys*, **55**:5 (2000), 825–921.

[3] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, “The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces”, *Adv. Math.*, **225**:3 (2010), 1634–1668.

[4] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Math. Surveys Monogr., **204**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xiv+518 pp.

[5] T. Panov, N. Ray, R. Vogt, “Colimits, Stanley–Reisner algebras, and loop spaces”, *Categorical decomposition techniques in algebraic topology* (Isle of Skye, 2001), Progr. Math., **215**, Birkhäuser, Basel, 2004, 261–291.

[6] Ki Hang Kim, F. W. Roush, “Homology of certain algebras defined by graphs”, *J. Pure Appl. Algebra*, **17**:2 (1980), 179–186.

[7] A. Gaifullin, “Universal realisators for homology classes”, *Geom. Topol.*, **17**:3 (2013), 1745–1772.

[8] А. А. Гайфуллин, “Малые накрытия над граф-ассоциэдрами и реализация циклов”, *Матем. сб.*, **207**:11 (2016), 53–81.

[9] H. Servatius, C. Droms, B. Servatius, “Surface subgroups of graph groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106**:3 (1989), 573–578.

[10] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault, Jie Wu, “The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **368**:9 (2016), 6663–6682.

[11] M. W. Davis, “Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space”, *Ann. of Math.* (2), **117**:2 (1983), 293–324.

[12] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.

[13] Li Cai, “On products in a real moment-angle manifold”, *J. Math. Soc. Japan* (to appear); arXiv: 1410.5543.

[14] T. E. Panov, N. Ray, “Categorical aspects of toric topology”, *Toric topology*, Contemp. Math., **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 293–322.

[15] G. J. Porter, “The homotopy groups of wedges of suspensions”, *Amer. J. Math.*, **88**:3 (1966), 655–663.

[16] Е. Грбич, С. Терио, “Теория гомотопий в торической топологии”, *УМН*, **71**:2(428) (2016), 3–80; англ. пер.: J. Grbić, S. Theriault, “Homotopy theory in toric topology”, *Russian Math. Surveys*, **71**:2 (2016), 185–251.

[17] C. Droms, “A complex for right-angled Coxeter groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**:8 (2003), 2305–2311.

[18] M. Stafa, “On the fundamental group of certain polyhedral products”, *J. Pure Appl. Algebra*, **219**:6 (2015), 2279–2299.

[19] D. R. Fulkerson, O. A. Gross, “Incidence matrices and interval graphs”, *Pacific J. Math*, **15**:3 (1965), 835–855.

[20] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974, 455 с.; пер. с англ.: W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Pure Appl. Math., **13**, Interscience Publishers [John Wiley & Sons, Inc.], New York–London–Sydney, 1966, xii+444 pp.

[21] Я. А. Верёвкин, “Алгебры Понтрягина некоторых момент-угол комплексов”, *Дальневост. матем. журн.*, **16**:1 (2016), 9–23.

Тарас Евгеньевич Панов
(Taras E. Panov)
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова;
Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова, г. Москва;
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
20.03.2016 и 09.08.2016

Яков Александрович Верёвкин
(Yakov A. Veryovkin)
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова;
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: verevkin_j.a@mail.ru