ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2024, т. 326, с. 293–310

Полиэдральные произведения, граф-произведения и p-центральные ряды*

Т. Е. Панов[а,б,в,г], **Т. А. Рахматуллаев**[б,г]

Поступило 19.02.2024; после доработки 07.06.2024; принято к публикации 11.06.2024

К 80-летию Виктора Матвеевича Бухштабера

Устанавливается связь полиэдральных произведений топологических пространств с граф-произведениями групп. Алгебры гомологий пространств петель полиэдральных произведений отождествляются с универсальными обертывающими алгебр Ли, ассоциированных с центральными рядами граф-произведений. В качестве приложения описана ограниченная алгебра Ли, ассоциированная с нижним 2-центральным рядом прямоугольной группы Коксетера, при этом ее универсальная обертывающая алгебра отождествляется с гомологиями петель пространства Дэвиса–Янушкевича.

Ключевые слова: полиэдральное произведение, граф-произведение, прямоугольная группа Коксетера, центральный ряд, ограниченная алгебра Ли, гомологии пространств петель.

MSC: 16S10, 17B35, 20F40, 20F65, 55P35, 57M07, 57S12

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4425

1. ВВЕДЕНИЕ

Полиэдральное произведение $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$ определено для последовательности пар топологических пространств $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})=((X_1,A_1),\dots,(X_m,A_m))$ и симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на конечном множестве $[m]=\{1,\dots,m\}$. В случае, когда каждое A_i является точкой, полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}=(\boldsymbol{X},\mathrm{pt})^{\mathcal{K}}$ содержит m-кратный букет $X_1\vee\dots\vee X_m$ и содержится в m-кратном произведении $X_1\times\dots\times X_m$. Полиэдральные произведения возникли в торической топологии [6] и в последнее время активно изучаются в теории гомотопий [2]. Важными примерами являются пространство Дэвиса–Янушкевича $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$, момент–угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}=(D^2,S^1)^{\mathcal{K}}$ и его вещественный аналог $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}=(D^1,S^0)^{\mathcal{K}}$. Последний представляет собой кубический комплекс, рассматриваемый в геометрической теории групп.

Полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ можно определить также для последовательности объектов $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_m)$ в произвольной категории C с конечными произведениями и копреде-

*Исследование первого автора (разделы 2, 3, 7) выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00143, https://rscf.ru/project/23-11-00143/, в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук. Исследование второго автора (разделы 4–6) выполнено в рамках проекта “Зеркальные лаборатории” НИУ ВШЭ.

[а] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

[б] Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

[в] Курчатовский комплекс теоретической и экспериментальной физики, Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия.

[г] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

✉ tpanov@mech.math.msu.su (Т.Е. Панов), raxtemur@gmail.com (Т.А. Рахматуллаев).

лами или в симметрической моноидальной категории с конечными копределами. Для многих категорий алгебраических объектов, таких как группы Grp или ассоциативные алгебры Ass, полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ зависит только от одномерного остова (графа) $\mathcal{K}^1 = \Gamma$ и называется *граф-произведением* (см. предложение 2.3). Это отражает тот факт, что множество попарно коммутирующих элементов группы (алгебры) порождает коммутативную подгруппу (подалгебру). Напротив, полиэдральное произведение топологических пространств не определяется одномерным остовом $\mathcal{K}^1$. Например, когда $\mathcal{K} = \partial\Delta_{[m]}$ — граница симплекса, полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\partial\Delta_{[m]}}$ известно в теории гомотопий как *толстый букет* пространств $X_1, \ldots, X_m$ и отличается от m-кратного произведения $\boldsymbol{X}^{\Delta_{[m]}} = X_1 \times \ldots \times X_m$.

Граф-произведения часто возникают в комбинаторной и геометрической теории групп. Наиболее известными примерами являются *прямоугольная группа Артина*

$$\mathrm{RA}_{\mathcal{K}} = F(a_1, \ldots, a_m)/\bigl(a_i a_j = a_j a_i \text{ при } \{i,j\} \in \mathcal{K}\bigr),$$

которая является граф-произведением $\mathbb{Z}^{\mathcal{K}}$, и *прямоугольная группа Коксетера*

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} = F(a_1, \ldots, a_m)/\bigl(a_i^2 = 1,\ a_i a_j = a_j a_i \text{ при } \{i,j\} \in \mathcal{K}\bigr),$$

которая является граф-произведением $\mathbb{Z}_2^{\mathcal{K}}$. (Мы обозначаем группу целых чисел через $\mathbb{Z}$, а группу/поле вычетов по простому модулю p через $\mathbb{Z}_p$.)

Ряд результатов в гомотопической теории полиэдральных произведений и геометрической теории групп можно интерпретировать как свойство некоторого функтора сохранять граф-произведения. К ним относятся конструкции классифицирующих пространств для прямоугольных групп Артина и Коксетера, описание их когомологий и описание алгебр гомологий пространств петель полиэдральных произведений. Более подробно такие результаты описаны в разд. 2. Теоретико-групповые и теоретико-гомотопические результаты такого рода обычно появляются парами, с аналогичными формулировками, но разными доказательствами. Например, имеются весьма схожие описания коммутанта $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ прямоугольной группы Коксетера $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ (см. [19]) и подалгебры-коммутанта $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ алгебры Понтрягина (гомологий петель) $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}})$ (см. [10]). При этом в случае флагового комплекса $\mathcal{K}$ коммутант $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ и подалгебра-коммутант $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ свободны тогда и только тогда, когда одномерный остов $\mathcal{K}^1$ является хордовым графом. Также имеется аналогия между критериями того, что $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ и $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ являются группой и алгеброй с одним определяющим соотношением [11]. Граф-произведения также определяются для симплициальных групп [7], и их классифицирующие пространства описываются как полиэдральные произведения в рамках симплициальной теории гомотопий.

В этой работе мы показываем, что теоретико-групповые результаты о граф-произведениях и теоретико-гомотопические результаты о полиэдральных произведениях могут быть связаны друг с другом через центральные ряды групп и ассоциированные с ними градуированные алгебры Ли. Наиболее наглядно это проявляется в случае прямоугольных групп Артина $\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}$. А именно, алгебра Ли, ассоциированная с нижним центральным рядом

$$\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}) = \bigl\{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}} = \gamma_1(\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}) \supset \gamma_2(\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}) \supset \ldots\bigr\},$$

— это “частично коммутативная” фактор-алгебра свободной алгебры Ли:

$$\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}) \cong \mathrm{FL}(v_1, \ldots, v_m)/\bigl([v_i, v_j] = 0 \text{ при } \{i,j\} \in \mathcal{K}\bigr).$$

Это обобщает классический результат Магнуса о нижнем центральном ряде свободной группы и доказывается аналогичным методом, основанным на отображении Магнуса [9, 20, 25, 4].

Универсальная обертывающая алгебра $\mathcal{U}(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RA}_\mathcal{K}))$ является частично коммутативной ассоциативной алгеброй. Эта алгебра изоморфна гомологиям петель полиэдрального произведения сфер $(S^{2p+1})^\mathcal{K}$ согласно результату работы [5]:

$$\mathcal{U}(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RA}_\mathcal{K}))\cong H_*\bigl(\Omega(S^{2p+1})^\mathcal{K};\mathbb{Z}\bigr).$$

Нижний центральный ряд прямоугольной группы Коксетера $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$ устроен более сложно. Ассоциированная алгебра Ли $\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RC}_\mathcal{K})$ — это алгебра Ли над $\mathbb{Z}_2$, которая не является конечно представленной [23, 24]. Она не представляется в виде граф-произведения и не связана напрямую с гомологиями петель полиэдральных произведений. *Ограниченные* алгебры Ли, ассоциированные с *p-центральными* рядами, лучше подходят для этой цели.

Нижний p-центральный ряд группы G — это наиболее быстро убывающий центральный ряд $\bigl\{G=\gamma_1^{[p]}(G)\supset\gamma_2^{[p]}(G)\supset\ldots\bigr\}$ со свойством $\bigl(\gamma_k^{[p]}(G)\bigr)^p\subset\gamma_{kp}^{[p]}(G)$ для $k=1,2,\ldots$. Ассоциированная градуированная абелева группа

$$\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}(G)=\bigoplus_{k\geq 1}\gamma_k^{[p]}(G)/\gamma_{k+1}^{[p]}(G)$$

является *ограниченной алгеброй Ли*, или *p-алгеброй Ли*, т.е. представляет собой $\mathbb{Z}_p$-модуль со скобкой Ли и p-степенной операцией $x\mapsto x^{[p]}$. Подробности приведены в разд. 4.

В теореме 6.4 мы даем следующее явное описание 2-алгебры Ли, ассоциированной с нижним 2-центральным рядом группы $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$:

$$\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[2]}(\mathrm{RC}_\mathcal{K})\cong\mathrm{FL}_2(u_1,\ldots,u_m)/\bigl(u_i^{[2]}=0,\ [u_i,u_j]=0\ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr).$$

Здесь правая часть представляет собой граф-произведение тривиальных 2-алгебр Ли $\mathbb{Z}_2\langle u\rangle=$ $=\mathrm{FL}_2(u)/(u^{[2]}=0)$ с одной образующей. Этот результат обобщается на граф-произведение элементарных абелевых p-групп для произвольного простого числа p (теорема 6.1). Доказательство использует результат Квиллена [21], связывающий нижний p-центральный ряд группы с фильтрацией ее групповой алгебры степенями аугментационного идеала, а также построение аналога отображения Магнуса. Универсальная обертывающая алгебра $\mathcal{U}_2(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[2]}(\mathrm{RC}_\mathcal{K}))$ отождествляется с гомологиями петель пространства $(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ (предложение 6.5). В качестве следствия мы получаем такую связь между фундаментальной группой полиэдрального произведения пространств $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ и гомологиями петель полиэдрального произведения пространств $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ для флаговых комплексов $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{U}_2\bigl(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[2]}\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}\bigr)\cong H_*\bigl(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbb{Z}_2\bigr).$$

Напомним, что $\pi_1((\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K})=(\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty))^\mathcal{K}=\mathrm{RC}_\mathcal{K}$.

В приложении мы приводим сравнительную таблицу теоретико-групповых и теоретико-гомотопических результатов о полиэдральных произведениях и граф-произведениях.

2. ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ГРАФ-ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на конечном упорядоченном множестве $[m]=\{1,\ldots,m\}$. Мы предполагаем, что пустое множество $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\}\subset[m]$ принадлежат $\mathcal{K}$. Назовем $I=\{i_1,\ldots,i_k\}\in\mathcal{K}$ *симплексом* или *гранью* комплекса $\mathcal{K}$. В *категории граней* $\mathsf{Cat}(\mathcal{K})$ объектами являются симплексы $I\in\mathcal{K}$, а морфизмами — включения $I\subset J$.

Конструкция 2.1 (полиэдральное произведение)**.** Пусть

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})=\{(X_1,A_1),\ldots,(X_m,A_m)\}$$

— последовательность пар топологических пространств с отмеченными точками, $\mathrm{pt} \in A_i \subset X_i$, где pt обозначает отмеченную точку. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{k=1}^m X_k \colon\ x_k \in A_k \ \text{при}\ k \notin I \right\}.$$

Обозначим через Top категорию топологических пространств с отмеченной точкой. Рассмотрим $\mathsf{Cat}(\mathcal{K})$-диаграмму

$$\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \colon\ \mathsf{Cat}(\mathcal{K}) \to \mathsf{Top}, \qquad I \mapsto (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I,$$

которая отображает морфизм $I \subset J$ из $\mathsf{Cat}(\mathcal{K})$ во включение пространств $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I \subset (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^J$.

Полиэдральное произведение $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее комплексу $\mathcal{K}$, определяется как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\mathsf{Top}} \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \operatorname{colim}^{\mathsf{Top}}_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I.$$

Здесь colim обозначает *функтор копредела* из категории $\mathsf{Cat}(\mathcal{K})$-диаграмм топологических пространств в категорию Top. По определению colim является левым сопряженным функтору постоянной диаграммы. В явном виде

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right) \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

Когда каждое A_i является точкой, мы используем сокращенное обозначение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ для $(\boldsymbol{X}, \mathrm{pt})^{\mathcal{K}}$.

Полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ можно определить в любой симметрической моноидальной категории C с конечными копределами. Рассмотрим последовательность объектов $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)$ в C, положим $\boldsymbol{X}^I = \prod_{i \in I} X_i$, где произведение берется в моноидальной структуре, и рассмотрим диаграмму

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}) \colon\ \mathsf{Cat}(\mathcal{K}) \to \mathsf{C}, \qquad I \mapsto \boldsymbol{X}^I,$$

которая переводит морфизм $I \subset J$ в канонический морфизм $\boldsymbol{X}^I \to \boldsymbol{X}^J$. Последний определяется с использованием единичного объекта в C. Определим полиэдральное произведение

$$\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\mathsf{C}} \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X}) = \operatorname{colim}^{\mathsf{C}}_{I \in \mathcal{K}} \boldsymbol{X}^I. \tag{2.1}$$

Полный подкомплекс $\mathcal{K}$ на подмножестве $I \subset [m]$ определяется как $\mathcal{K}_I = \{J \in \mathcal{K} \colon J \subset I\}$.

Недостающая грань (или *минимальная негрань*) в $\mathcal{K}$ — это подмножество $I \subset [m]$ такое, что I не является симплексом в $\mathcal{K}$, но любое собственное подмножество в I является симплексом в $\mathcal{K}$. Каждая недостающая грань соответствует полному подкомплексу $\partial\Delta_I \subset \mathcal{K}$, где $\partial\Delta_I$ обозначает границу симплекса на множестве вершин I.

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *флаговым комплексом*, если каждая его недостающая грань состоит из двух вершин. Эквивалентное условие состоит в том, что любой набор вершин в $\mathcal{K}$, попарно соединенных ребрами, является множеством вершин грани.

Полные подграфы в простом графе Γ образуют флаговый симплициальный комплекс $\mathcal{K}(\Gamma)$, называемый *кликовым комплексом* Γ. Каждый флаговый комплекс $\mathcal{K}$ является кликовым комплексом своего 1-остова $\mathcal{K}^1$.

Полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\partial\Delta_{[m]}}$ топологических пространств с отмеченной точкой $X_1, \dots, X_m$ известно как *толстый букет*. При $m = 2$ это обычный букет $X_1 \vee X_2$.

Определение 2.2. Симметрическая моноидальная категория C с конечными копределами называется *толстой*, если канонический морфизм

$$\boldsymbol{X}^{\partial\Delta_{[m]}} \to \prod_{i=1}^m X_i$$

является изоморфизмом для любых объектов $X_1, \dots, X_m$ и $m \geq 3$.

В данной работе будут использоваться следующие толстые категории:

- Grp — группы (моноидальное произведение — прямая сумма, копроизведение — свободное произведение);
- Tmn — топологические моноиды (моноидальное произведение — прямая сумма, копроизведение — свободное произведение);
- Tgp — топологические группы (полная подкатегория в Tmn);
- Ass — ассоциативные алгебры с единицей над коммутативным кольцом R (моноидальное произведение — тензорное произведение, копроизведение — свободное произведение);
- Lie — алгебры Ли над R (моноидальное произведение — прямая сумма, копроизведение — свободное произведение).

В каждой из этих категорий набор попарно коммутирующих элементов группы (алгебры) порождает коммутативную подгруппу (подалгебру). С другой стороны, категория Top не является толстой.

Предложение 2.3. *В толстой категории* C *морфизм* $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}^1} \to \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ *является изоморфизмом для любого симплициального комплекса* $\mathcal{K}$ *и любой последовательности объектов* $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)$.

Доказательство. Будем последовательно добавлять к $\mathcal{K}^1$ симплексы I, $|I| \geq 3$, пока не получим $\mathcal{K}$, и используем индукцию по количеству добавленных симплексов. База индукции $\mathcal{K} = \mathcal{K}^1$ очевидна. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup I$, где $|I| \geq 3$, и $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}^1} \to \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}'}$ — изоморфизм по предположению индукции. Имеем кодекартов квадрат симплициальных комплексов и соответствующий кодекартов квадрат полиэдральных произведений:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_I & \longrightarrow & \Delta_I \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}' & \longrightarrow & \mathcal{K} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}^{\partial\Delta_I} & \longrightarrow & \boldsymbol{X}^{\Delta_I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}'} & \longrightarrow & \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} \end{array}$$

Поскольку $\boldsymbol{X}^{\partial\Delta_I} \to \boldsymbol{X}^{\Delta_I}$ является изоморфизмом, $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}'} \to \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ также является изоморфизмом. Поэтому $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}^1} \to \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ также изоморфизм. $\square$

Определение 2.4. Для последовательности $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)$ объектов из C и конечного простого графа Γ с m вершинами определим *граф-произведение* $\boldsymbol{X}^{\Gamma}$ как полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}(\Gamma)}$.

Согласно предложению 2.3 если категория C толстая, то $\boldsymbol{X}^{\Gamma}$ канонически изоморфно $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ для любого $\mathcal{K}$ такого, что $\mathcal{K}^1 = \Gamma$.

Пример 2.5 (граф-произведение групп)**.** Пусть $\boldsymbol{G} = (G_1, \dots, G_m)$ — последовательность из m (топологических) групп. Поскольку категория Tgp толстая, имеем

$$\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}^1} = \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\mathsf{Tgp}}_{I \in \mathcal{K}} \boldsymbol{G}^I.$$

В явном виде

$$\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} = \mathop{\bigstar}_{k=1}^{m} G_k \big/ \big(g_i g_j = g_j g_i \text{ при } g_i \in G_i,\ g_j \in G_j,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}\big),$$

где $\bigstar_{k=1}^m G_k$ — свободное произведение групп G_k. Существуют канонические инъективные гомоморфизмы $\boldsymbol{G}^I \to \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ для $I \in \mathcal{K}$.

Далее будут рассмотрены примеры, когда функтор между двумя категориями сохраняет граф-произведения. Это, безусловно, имеет место, когда функтор сохраняет конечные произведения и копределы. Среди других примеров — функтор классифицирующего пространства и функтор гомологий петель, рассматриваемые ниже.

Для топологической группы G рассмотрим универсальное G-расслоение $EG \to BG$, где EG — универсальное G-пространство, а BG — классифицирующее пространство для G.

В обозначениях примера 2.5 классифицирующее пространство $B\boldsymbol{G}^I$ является произведением пространств BG_i, $i \in I$. Таким образом, мы имеем полиэдральное произведение $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$, соответствующее последовательности пар $(B\boldsymbol{G}, \mathrm{pt}) = \{(BG_1, \mathrm{pt}), \dots, (BG_m, \mathrm{pt})\}$. Аналогично последовательности пар $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G}) = \{(EG_1, G_1), \dots, (EG_m, G_m)\}$ соответствует полиэдральное произведение $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$. Здесь G_i содержится в EG_i как слой над отмеченной точкой расслоения $EG_i \to BG_i$.

Предложение 2.6 [18, Proposition 5.1; 6, Exercise 4.3.10]**.** *Существует гомотопическое расслоение полиэдральных произведений*

$$(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \to (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} BG_i. \tag{2.2}$$

Функтор классифицирующего пространства

$$B\colon \mathsf{Tgp} \to \mathsf{Top},$$

вообще говоря, не сохраняет копределы над малыми категориями, но он сохраняет *гомотопические копределы* при соответствующих модельных структурах на Top и Tgp (см. [18, Theorem 7.12]). Следующее утверждение описывает взаимосвязь между полиэдральными произведениями пространств и граф-произведениями групп.

Теорема 2.7 [18, Proposition 6.1, Theorem 7.17]**.** *Существует коммутативный квадрат естественных отображений*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{hocolim}^{\mathsf{Top}}_{I\in\mathcal{K}} B\boldsymbol{G}^I \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"] & B\operatorname{hocolim}^{\mathsf{Tgp}}_{I\in\mathcal{K}} \boldsymbol{G}^I \arrow[d] \\
\operatorname{colim}^{\mathsf{Top}}_{I\in\mathcal{K}} B\boldsymbol{G}^I \arrow[r] & B\operatorname{colim}^{\mathsf{Tgp}}_{I\in\mathcal{K}} \boldsymbol{G}^I
\end{tikzcd}$$

в Top, *где верхнее и левое отображения являются гомотопическими эквивалентностями, а правое является гомотопической эквивалентностью в случае, когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс.*

Следствие 2.8. *Естественное отображение*

$$(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \to B(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}})$$

является гомотопической эквивалентностью в случае, когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, т.е. функтор классифицирующего пространства сохраняет граф-произведения с точностью до гомотопической эквивалентности.

Предложение 2.9. *Если комплекс $\mathcal{K}$ флаговый и $\boldsymbol{G} = (G_1, \dots, G_m)$ состоит из дискретных групп, то полиэдральное произведение $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ является асферическим пространством с $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) \cong \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$.*

Доказательство вытекает из следствия 2.8. С другой стороны, утверждение можно доказать с помощью стандартной техники Уайтхеда склеивания асферических пространств. Вариант приведенного ниже рассуждения изложен в [13, Theorem 10] для случая прямоугольных групп Артина.

Согласно теореме Уайтхеда [26, Theorem 5] если $P = P_1 \cup P_2$ — клеточное пространство, где P_1 и P_2 — такие клеточные подпространства в P, что

(а) P_1, P_2 и $P_1 \cap P_2$ асферичны;

(б) оба гомоморфизма $\pi_1(P_1 \cap P_2) \to \pi_1(P_1)$ и $\pi_1(P_1 \cap P_2) \to \pi_1(P_2)$ инъективны, то P также асферично. Используем индукцию по числу вершин m комплекса $\mathcal{K}$. База индукции $m=1$ очевидна. Рассмотрим подкомплексы $\mathrm{st}_{\mathcal{K}}\{m\}=\{I\colon I\cup\{m\}\in\mathcal{K}\}$ (звезда m-й вершины в $\mathcal{K}$) и $\mathcal{K}_{[m-1]}$ (полный подкомплекс на первых $m-1$ вершинах). Их пересечение есть линк m-й вершины:

$$\mathrm{st}_{\mathcal{K}}\{m\}\cap\mathcal{K}_{[m-1]}=\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}\{m\}=\bigl\{J\colon J\not\ni m,\ J\cup\{m\}\in\mathcal{K}\bigr\}.$$

Имеем кодекартов квадрат симплициальных комплексов и соответствующий кодекартов квадрат полиэдральных произведений:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{lk}_{\mathcal{K}}\{m\} & \longrightarrow & \mathcal{K}_{[m-1]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{st}_{\mathcal{K}}\{m\} & \longrightarrow & \mathcal{K} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (B\boldsymbol{G})^{\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}\{m\}} & \longrightarrow & (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_{[m-1]}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B\boldsymbol{G})^{\mathrm{st}_{\mathcal{K}}\{m\}} & \longrightarrow & (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \end{array}$$

Положим $P_1=(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_{[m-1]}}$ и $P_2=(B\boldsymbol{G})^{\mathrm{st}_{\mathcal{K}}\{m\}}$ в теореме Уайтхеда. Заметим, что $(B\boldsymbol{G})^{\mathrm{st}_{\mathcal{K}}\{m\}}=(B\boldsymbol{G})^{\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}\{m\}}\times BG_m$ по определению полиэдрального произведения. Так как полные подкомплексы и линки во флаговом комплексе являются флаговыми, полиэдральные произведения P_1, $P_1\cap P_2=(B\boldsymbol{G})^{\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}\{m\}}$ и $P_2=(P_1\cap P_2)\times BG_m$ асферичны по предположению индукции. Гомоморфизм $\pi_1(P_1\cap P_2)\to\pi_1(P_2)$, очевидно, инъективен. Далее, $\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}\{m\}$ является полным подкомплексом в $\mathcal{K}_{[m-1]}$, поэтому $(B\boldsymbol{G})^{\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}\{m\}}$ является ретрактом полиэдрального произведения $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_{[m-1]}}$ (см. [19, предложение 2.2]). Поэтому гомоморфизм $\pi_1(P_1\cap P_2)\to\pi_1(P_1)$ также инъективен. Следовательно, пространство $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}=P_1\cup P_2$ асферично согласно теореме Уайтхеда. Изоморфизм $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})\cong\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ легко следует из теоремы Зейферта–ван Кампена. $\square$

Пример 2.10. В этих примерах $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс.

1. Пусть $G_i=\mathbb{Z}$ — группа целых чисел для $i=1,\dots,m$. Соответствующее граф-произведение известно как *прямоугольная группа Артина* или *частично коммутативная группа*, соответствующая $\mathcal{K}$ (или графу $\mathcal{K}^1$). Она определяется следующим образом:

$$\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}=\mathbb{Z}^{\mathcal{K}}=F(a_1,\dots,a_m)/\bigl(a_ia_j=a_ja_i \text{ при } \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr), \tag{2.3}$$

где $F(a_1,\dots,a_m)$ — свободная группа на m образующих. Классифицирующим пространством группы $\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}$ является полиэдральное произведение $(B\mathbb{Z})^{\mathcal{K}}=(S^1)^{\mathcal{K}}$ — подкомплекс в m-мерном торе $T^m=(S^1)^m$. Гомотопическое расслоение (2.2) в Top приобретает вид

$$(\mathbb{R},\mathbb{Z})^{\mathcal{K}}\to(S^1)^{\mathcal{K}}\to(S^1)^m,$$

где все пространства асферичны. Переходя к фундаментальным группам, мы получаем короткую точную последовательность

$$1\to\mathrm{RA}'_{\mathcal{K}}\to\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}\xrightarrow{\mathrm{Ab}}\mathbb{Z}^m\to 1,$$

где Ab — отображение абелианизации, а $\mathrm{RA}'_{\mathcal{K}}$ — коммутант.

2. Пусть $G_i=\mathbb{Z}_2$ — циклическая группа порядка 2 для $i=1,\dots,m$. Соответствующее граф-произведение известно как *прямоугольная группа Коксетера*, соответствующая $\mathcal{K}$:

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}=\mathbb{Z}_2^{\mathcal{K}}=F(a_1,\dots,a_m)/\bigl(a_i^2=1,\ a_ia_j=a_ja_i \text{ при } \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr). \tag{2.4}$$

Классифицирующим пространством для $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ является полиэдральное произведение $(B\mathbb{Z}_2)^{\mathcal{K}}=(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}$. Полиэдральное произведение $(E\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)^{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентно *вещественному момент-угол-комплексу* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}=(D^1,S^0)^{\mathcal{K}}$, где D^1 — отрезок, а S^0 — его граница. Гомотопическое расслоение (2.2) в Top приобретает вид

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}\to(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}\to(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^m,$$

где все пространства асферичны. Переходя к фундаментальным группам, мы получаем короткую точную последовательность

$$1 \to \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}} \to \mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\mathrm{Ab}} \mathbb{Z}_2^m \to 1. \tag{2.5}$$

3. Будем обозначать через T или T^1 окружность как объект в Tgp, а через S^1 окружность как объект в Top. Пусть $G_i = T^1$ для $i = 1, \ldots, m$. Соответствующее граф-произведение является копределом торов T^I в категории топологических групп; оно называется *циркуляционной группой* [18]:

$$\mathrm{Cir}_{\mathcal{K}} = T^{\mathcal{K}} = \mathrm{colim}^{\mathsf{Tgp}}_{I\in\mathcal{K}}\, T^I.$$

Классифицирующим пространством последней группы является полиэдральное произведение $(BT^1)^{\mathcal{K}} = (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}$, известное как *пространство Дэвиса–Янушкевича*. Полиэдральное произведение $(ET^1, T^1)^{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентно *момент–угол-комплексу* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$, где D^2 — это 2-диск. Гомотопическое расслоение (2.2) приобретает вид

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^m.$$

Применяя функтор пространства петель Мура $\varOmega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Tmn}$ к данному расслоению, получим коммутативную диаграмму в гомотопической категории $\mathrm{Ho}(\mathsf{Tmn})$

$$\begin{tikzcd}
 & \varOmega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \varOmega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & T^m \arrow[d, equal] & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Cir}'_{\mathcal{K}} \arrow[r] & \mathrm{Cir}_{\mathcal{K}} \arrow[r, "\mathrm{Ab}"] & T^m \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

где $\mathrm{Cir}'_{\mathcal{K}}$ — топологическая подгруппа-коммутант в $\mathrm{Cir}_{\mathcal{K}}$. Нижняя строка является короткой точной последовательностью в Tgp и аналогична (2.5).

4. В более общем случае пусть G_i — моноид петель Мура $\varOmega X_i$ односвязного пространства X_i, $i = 1, \ldots, m$. Применяя функтор $\varOmega$ к гомотопической эквивалентности из следствия 2.8, получаем для флагового $\mathcal{K}$ эквивалентность

$$\varOmega(\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}) \simeq (\varOmega\boldsymbol{X})^{\mathcal{K}} = \mathrm{colim}^{\mathsf{Tmn}}_{I\in\mathcal{K}}(\varOmega\boldsymbol{X})^I$$

в $\mathrm{Ho}(\mathsf{Tmn})$. Это выражает тот факт, что функтор петель Мура сохраняет граф-произведения с точностью до гомотопии.

Для коммутативного кольца R с единицей гомологии петель $H_*(\varOmega X; R)$ односвязного пространства X являются ассоциативной некоммутативной алгеброй относительно произведения Понтрягина. Получаем функтор $H_*\varOmega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Ass}$. Если R — поле или $H_*(\varOmega X; R)$ свободно над R, то определено кокоммутативное копроизведение $H_*(\varOmega X; R) \to H_*(\varOmega X; R) \otimes H_*(\varOmega X; R)$, индуцированное диагональным отображением $\Delta\colon \varOmega X \to \varOmega X \times \varOmega X$, которое превращает $H_*(\varOmega X; R)$ в кокоммутативную алгебру Хопфа [16, Comments 8.9].

Для последовательности ассоциативных алгебр $\boldsymbol{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ полиэдральное произведение

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{K}} = \mathrm{colim}^{\mathsf{Ass}}_{I\in\mathcal{K}}\Bigl(\bigotimes_{i\in I} A_i\Bigr)$$

также является граф-произведением, так как категория Ass является толстой.

Теорема 2.11 [8, Corollary 1.2] (см. также [7, Theorem 4.2])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ — последовательность односвязных пространств, а R — поле.*

Существуют изоморфизмы

$$H_*\big(\Omega(\boldsymbol{X}^{\mathcal K});R\big)\cong\big(H_*(\Omega\boldsymbol{X};R)\big)^{\mathcal K}\cong$$
$$\cong\mathop{\bigstar}_{k=1}^{m}H_*(\Omega X_i)/\big([x_i,x_j]=0\ \text{при}\ x_i\in H_*(\Omega X_i),\ x_j\in H_*(\Omega X_j),\ \{i,j\}\in\mathcal K\big)$$

градуированных R-алгебр, где $[x_i,x_j]=x_ix_j-(-1)^{|x_i|\cdot|x_j|}x_jx_i$, т.е. функтор гомологий петель $H_*\Omega\colon \mathsf{Top}\to\mathsf{Ass}$ с коэффициентами в поле сохраняет граф-произведения.

Особое значение имеют случаи $X_i=S^{2p+1}$ (нечетномерная сфера) и $X_i=\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$. Соответствующие гомологии петель $H_*(\Omega S^{2p+1};R)=R[v]$ — полиномиальная (симметрическая) алгебра с одной образующей v степени $2p$. Для флагового $\mathcal K$ граф-произведение алгебр $H_*(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal K};R)$ является алгебраическим аналогом прямоугольной группы Артина (2.3).

Теорема 2.12 [5]. *Для любого флагового комплекса $\mathcal K$ и $p\ge1$ существуют изоморфизмы*

$$\begin{aligned}H_*\big(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal K};R\big)&\cong R[v]^{\mathcal K}=\operatorname{colim}^{\mathsf{Ass}}_{I\in\mathcal K}R[v_i\colon i\in I]\cong\\&\cong T(v_1,\dots,v_m)/\big(v_iv_j-v_jv_i=0\ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal K\big)\end{aligned}\tag{2.7}$$

градуированных R-алгебр, где $T(v_1,\dots,v_m)$ — свободная ассоциативная алгебра, $R[v_i\colon i\in I]$ — полиномиальная алгебра и $|v_i|=2p$.

Аналогично алгебра $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};R)$ связана с прямоугольными группами Коксетера. Чтобы прояснить это, рассмотрим внешнюю алгебру

$$H_*\big(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^m;R\big)=H(T^m;R)=\Lambda[u_1,\dots,u_m],$$

где $|u_i|=1$. Из гомотопического расслоения (2.6) получаем короткую точную последовательность алгебр гомологий петель [6, Proposition 8.4.1]

$$R\to H_*(\Omega\mathcal Z_{\mathcal K};R)\to H_*\big(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};R\big)\to\Lambda[u_1,\dots,u_m]\to R,\tag{2.8}$$

т.е. $H_*(\Omega\mathcal Z_{\mathcal K};R)\subset H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};R)$ является нормальной подалгеброй [16] и

$$H_*\big(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};R\big)/\!/H_*(\Omega\mathcal Z_{\mathcal K};R)=\Lambda[u_1,\dots,u_m].$$

По аналогии с короткой точной последовательностью (2.5) можно рассматривать $H_*(\Omega\mathcal Z_{\mathcal K};R)$ как *подалгебру-коммутант* в $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};R)$ или как ядро отображения абелианизации из некоммутативной алгебры $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};R)$.

Теорема 2.13 [17, Theorem 9.3; 6, Theorem 8.5.2, Corollary 8.5.3]. *Для любого флагового комплекса $\mathcal K$ существуют изоморфизмы*

$$\begin{aligned}H_*\big(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};R\big)&\cong\Lambda[u]^{\mathcal K}=\operatorname{colim}^{\mathsf{Ass}}_{I\in\mathcal K}\Lambda[u_i\colon i\in I]\cong\\&\cong T(u_1,\dots,u_m)/\big(u_i^2=0,\ u_iu_j+u_ju_i=0\ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal K\big)\end{aligned}\tag{2.9}$$

градуированных R-алгебр, где $\Lambda[u_i\colon i\in I]$ — внешняя алгебра и $|u_i|=1$.

Разложение градуированной алгебры $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};R)$ в копредел (2.9) аналогично разложению прямоугольной группы Коксетера в копредел $\mathrm{RC}_{\mathcal K}=\operatorname{colim}^{\mathsf{Grp}}_{I\in\mathcal K}\mathbb Z_2^I$. Эту аналогию можно продолжить, рассмотрев коммутанты и подалгебры-коммутанты. Будем обозначать групповой коммутатор $g^{-1}h^{-1}gh$ через (g,h), а градуированный алгебраический коммутатор $uv-(-1)^{|u|\cdot|v|}vu$ через $[u,v]$.

Теорема 2.14 [19, теорема 4.5]. *Коммутант $\mathrm{RC}'_{\mathcal K}$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из $\sum_{J\subset[m]}\operatorname{rank}\widetilde H_0(\mathcal K_J)$ вложенных коммутаторов вида*

$$(g_j,g_i),\quad (g_{k_1},(g_j,g_i)),\quad \dots,\quad (g_{k_1},(g_{k_2},\dots(g_{k_{m-2}},(g_j,g_i))\dots)),$$

где $k_1 < k_2 < \ldots < k_{\ell-2} < j > i$, $k_s \neq i$ *для любого* s *и* i — *наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса* $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_{\ell-2},j,i\}}$, *не содержащей* j.

Теорема 2.15 [10, Theorem 4.3]**.** *Пусть* $\mathcal{K}$ — *флаговый комплекс, а* R — *поле. Алгебра* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; R)$, *рассматриваемая как подалгебра-коммутант в* $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}; R)$ *при помощи точной последовательности* (2.8), *мультипликативно порождается* $\sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ *вложенными коммутаторами вида*

$$[u_j, u_i], \quad [u_{k_1}, [u_j, u_i]], \quad \ldots, \quad [u_{k_1}, [u_{k_2}, \ldots [u_{k_{m-2}}, [u_j, u_i]] \ldots]],$$

где $k_1 < k_2 < \ldots < k_p < j > i$, $k_s \neq i$ *для любого* s, *а* i — *наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса* $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_p,j,i\}}$, *не содержащей* j. *Более того, данное мультипликативно порождающее множество минимально, т.е. приведенные выше коммутаторы образуют базис в подмодуле неразложимых элементов в алгебре* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; R)$.

3. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РЯДЫ И АССОЦИИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Алгебра Ли над коммутативным унитарным кольцом R — это R-модуль L вместе с R-линейным отображением $L \times L \to L$, $(x, y) \mapsto [x, y]$, удовлетворяющим условиям

(1) $[x, x] = 0$;

(2) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ для всех $x, y, z \in L$ (тождество Якоби).

Из условия (1) следует, что $[x, y] = -[y, x]$.

Рассмотрим функтор $\mathcal{L}\colon \mathsf{Ass} \to \mathsf{Lie}$, переводящий ассоциативную R-алгебру A в алгебру Ли $\mathcal{L}A$ на том же R-модуле со скобкой Ли $[x, y] = xy - yx$. Функтор $\mathcal{L}$ имеет левый сопряженный $\mathcal{U}\colon \mathsf{Lie} \to \mathsf{Ass}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ass}}(\mathcal{U}L, A) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Lie}}(L, \mathcal{L}A).$$

Ассоциативная алгебра $\mathcal{U}L$ вместе с каноническим гомоморфизмом алгебр Ли $L \to \mathcal{L}\mathcal{U}L$ называется *универсальной обертывающей алгеброй* для L. В явном виде $\mathcal{U}L$ — это фактор-алгебра алгебры TL (свободной ассоциативной алгебры на L) по двустороннему идеалу, порожденному элементами вида $xy - yx - [x, y]$, $x, y \in L$. Если L — свободный R-модуль, то гомоморфизм $L \to \mathcal{L}\mathcal{U}L$ инъективен [22, следствие III.1].

Пусть G — группа (при необходимости рассматриваемая как объект в Tgp с дискретной топологией). Если даны две подгруппы H и W в G, обозначим через (H, W) подгруппу, порожденную всеми коммутаторами (h, w), где $h \in H$ и $w \in W$. В частности, $(G, G) = G'$ — коммутант.

Последовательность подгрупп $\Gamma(G) = \{\Gamma_k(G)\colon k \geq 1\}$ таких, что $\Gamma_1(G) = G$, $\Gamma_{k+1}(G) \subset \subset \Gamma_k(G)$ и $(\Gamma_k(G), \Gamma_l(G)) \subset \Gamma_{k+\ell}(G)$ для любых k, ℓ, называется (убывающим) *центральным рядом* (или *центральной фильтрацией*) на G. Отсюда сразу следует, что каждая $\Gamma_k(G)$ является нормальной подгруппой, а фактор-группа $\Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$ абелева.

Самый быстро убывающий центральный ряд — это *нижний центральный ряд* $\gamma(G)$, заданный как $\gamma_1(G) = G$ и $\gamma_k(G) = (\gamma_{k-1}(G), G)$ для $k \geq 2$.

Ассоциированной (или *присоединенной*) *алгеброй Ли* центрального ряда $\Gamma(G)$ называется ассоциированная градуированная абелева группа

$$\mathrm{gr}_\bullet\, \Gamma(G) = \bigoplus_{k\geq 1} \Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$$

со скобкой Ли, заданной формулой

$$[\overline{g}_k, \overline{g}_\ell] = \overline{(g_k, g_\ell)},$$

где $\overline{g}_k$ — образ элемента $g_k \in \Gamma_k(G)$ в фактор-группе $\Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$.

Если задано множество S, то *свободная алгебра Ли* $\mathrm{FL}(x_s\colon s\in S)$, порожденная множеством S, определяется следующим универсальным свойством: любое отображение множеств $S\to L$ в алгебру Ли L однозначно продолжается до гомоморфизма $\mathrm{FL}(x_s\colon s\in S)\to L$ алгебр Ли. Согласно классическому результату Магнуса [15, теорема 5.12] алгебра Ли, ассоциированная с нижним центральным рядом свободной группы $F(a_1,\dots,a_m)$, является свободной алгеброй Ли $\mathrm{FL}(\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_m)$ над $\mathbb{Z}$. Имеется следующее обобщение на прямоугольные группы Артина.

Теорема 3.1 [20] (см. также [25]). *Алгебра Ли, ассоциированная с нижним центральным рядом прямоугольной группы Артина* $\mathrm{RA}_{\mathcal K}$, *имеет вид*

$$\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal K})\cong \mathrm{FL}(v_1,\dots,v_m)/\bigl([v_i,v_j]=0\ \textit{при}\ \{i,j\}\in\mathcal K\bigr). \tag{3.1}$$

Кроме того, каждая компонента $\mathrm{gr}_k\,\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal K})$ *является свободной абелевой группой.*

Алгебра Ли (над $\mathbb{Z}$) в правой части (3.1) известна как *граф-алгебра Ли* или *частично коммутативная алгебра Ли*. Она представляет собой граф-произведение $\mathbb{Z}\langle v\rangle^{\mathcal K}$ тривиальных алгебр Ли $\mathbb{Z}\langle v\rangle=\mathrm{FL}(v)$. Поскольку алгебра (3.1) свободна как абелева группа, она является алгеброй Ли примитивных элементов в $\mathcal U(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal K}))$ (см. [22, теорема III.5.4]). Поскольку функтор универсальной обертывающей $\mathcal U\colon \mathsf{Lie}\to\mathsf{Ass}$ является левым сопряженным и сохраняет произведения, он также сохраняет граф-произведения. Поэтому $\mathcal U(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal K}))$ является алгеброй (2.7) для $R=\mathbb{Z}$. Получаем

Предложение 3.2. *Для флагового комплекса* $\mathcal K$ *существует изоморфизм*

$$\mathcal U(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal K}))\cong H_*\bigl(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal K};\mathbb{Z}\bigr)$$

ассоциативных $\mathbb{Z}$*-алгебр, где* $p\ge 1$.

Чтобы изоморфизм из предложения 3.2 был согласован с градуировкой в $H_*(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal K};\mathbb{Z})$, необходимо положить $\deg v_i=2p$.

Нижний центральный ряд прямоугольной группы Коксетера $\mathrm{RC}_{\mathcal K}$ устроен сложнее (см. [23, 24]). Имеет место включение $(\gamma_k(\mathrm{RC}_{\mathcal K}))^2\subset\gamma_{k+1}(\mathrm{RC}_{\mathcal K})$, т.е. квадрат любого элемента из $\gamma_k(\mathrm{RC}_{\mathcal K})$ лежит в $\gamma_{k+1}(\mathrm{RC}_{\mathcal K})$, так что $\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RC}_{\mathcal K})$ — алгебра Ли над $\mathbb{Z}_2$. Существует эпиморфизм

$$\mathrm{FL}_{\mathbb{Z}_2}(v_1,\dots,v_m)/\bigl([v_i,v_j]=0\ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal K\bigr)\to\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RC}_{\mathcal K})$$

алгебр Ли над $\mathbb{Z}_2$, где $\mathrm{FL}_{\mathbb{Z}_2}(v_1,\dots,v_m)=\mathrm{FL}(v_1,\dots,v_m)\otimes\mathbb{Z}_2$. Этот эпиморфизм не является изоморфизмом уже в случае, когда $\mathcal K$ — две отдельные точки и $\mathrm{RC}_{\mathcal K}=\mathbb{Z}_2\star\mathbb{Z}_2$.

В правильном аналоге предложения 3.2 для прямоугольных групп Коксетера участвует нижний 2-центральный ряд и ассоциированная с ним ограниченная алгебра Ли.

4. ОГРАНИЧЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ И p-ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Пусть p — простое число, а R — поле характеристики p или (в более общем случае) коммутативная алгебра над $\mathbb{Z}_p$. *Ограниченной алгеброй Ли* над R или *p-алгеброй Ли* называется алгебра Ли L над R, снабженная операцией *p-степени*: $x\mapsto x^{[p]}$, обладающая следующими свойствами:

$$[x,y^{[p]}]=[\dots[[x,\underbrace{y],y],\dots,y}_{p}]\qquad\text{для}\quad x,y\in L, \tag{4.1}$$

$$(\alpha x)^{[p]}=\alpha^p x^{[p]}\qquad\text{для}\quad x\in L\quad\text{и}\quad\alpha\in R, \tag{4.2}$$

$$(x+y)^{[p]}=x^{[p]}+y^{[p]}+\sum_{i=1}^{p-1}s_i(x,y), \tag{4.3}$$

где $s_i(x,y)$ определяется из разложения

$$[\dots[[x,\underbrace{\lambda x+y],\lambda x+y],\dots,\lambda x+y}_{p-1}]=\sum_{i=1}^{p-1} is_i(x,y)\lambda^{i-1}$$

для $x,y\in L$ и $\lambda\in R$. Например, если $p=2$, то $(x+y)^{[2]}=x^{[2]}+y^{[2]}+[x,y]$, а если $p=3$, то

$$(x+y)^{[3]}=x^{[3]}+y^{[3]}+[[x,y],y]-[[x,y],x].$$

Любая ассоциативная алгебра A над R является ограниченной алгеброй Ли со скобкой-коммутатором $[x,y]=xy-yx$ и операцией p-степени $x\mapsto x^p$. Это задает функтор $\mathcal{L}_p\colon \mathsf{Ass}\to\mathsf{Lie}_p$ в категорию ограниченных алгебр Ли над R. Левый сопряженный функтор $\mathcal{U}_p\colon \mathsf{Lie}_p\to\mathsf{Ass}$ определяет *ограниченную универсальную обертывающую алгебру* $\mathcal{U}_pL$ для L вместе с каноническим гомоморфизмом $L\to\mathcal{L}_p\mathcal{U}_pL$ ограниченных алгебр Ли. В явном виде $\mathcal{U}_pL$ — это фактор-алгебра свободной ассоциативной алгебры TL по двустороннему идеалу, порожденному элементами $x^p-x^{[p]}$ и $xy-yx-[x,y]$, $x,y\in L$. Если L — свободный R-модуль (например, если R — поле характеристики p), то гомоморфизм $L\to\mathcal{L}_p\mathcal{U}_pL$ инъективен [12, теорема V.12].

Лемма 4.1 [21, Lemma 2.1]**.** *Пусть $f\colon L_1\to L_2$ — гомоморфизм R-свободных p-алгебр Ли. Тогда f сюръективен (инъективен), если и только если $\mathcal{U}_pf\colon\mathcal{U}_pL_1\to\mathcal{U}_pL_2$ сюръективен (инъективен).*

Если задано множество S, то *свободная p-алгебра Ли* $\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)$, порожденная множеством S, определяется следующим универсальным свойством: любое отображение множеств $S\to L$ в ограниченную алгебру Ли L однозначно продолжается до гомоморфизма $\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)\to L$ ограниченных алгебр Ли.

Предложение 4.2 [3, п. 2.7.1]**.** *Если W является R-базисом свободной алгебры Ли $\mathrm{FL}(x_s\colon s\in S)$, то $\{w^{p^i}\colon w\in W,\ i=0,1,\dots\}$ является R-базисом свободной ограниченной алгебры Ли $\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)$.*

Ограниченная универсальная обертывающая p-алгебры Ли является алгеброй Хопфа [16]. Пусть $\mathcal{P}\colon\mathsf{Hpf}\to\mathsf{Lie}_p$ — функтор примитивных элементов из категории алгебр Хопфа над R.

Предложение 4.3. *$\mathcal{U}_p\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)\cong T(x_s\colon s\in S)$ и $\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)\cong\mathcal{P}T(x_s\colon s\in S)$.*

Доказательство. Первое утверждение является формальным следствием универсальных свойств. А именно, отображение множества $S\to A$ в ассоциативную алгебру A однозначно продолжается до гомоморфизма $\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)\to\mathcal{L}_pA$ ограниченных алгебр Ли. Последний однозначно продолжается до гомоморфизма $\mathcal{U}_p\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)\to A$ ассоциативных алгебр. Следовательно, алгебра $\mathcal{U}_p\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)$ обладает универсальным свойством свободного объекта в Ass, поэтому она канонически изоморфна $T(x_s\colon s\in S)$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что $\mathcal{U}\mathrm{FL}(x_s\colon s\in S)=T(x_s\colon s\in S)$. Пусть W — базис R-модуля $\mathrm{FL}(x_s\colon s\in S)$. Из [22, теорема III.5.4, упражнение 2] следует, что $\{w^{p^i}\colon w\in W,\ i=0,1,\dots\}$ является базисом R-модуля $\mathcal{P}T(x_s\colon s\in S)$. Он также является базисом R-модуля $\mathrm{FL}_p(x_s\colon s\in S)$ согласно предложению 4.2, откуда вытекает требуемое. $\square$

Равенство $\mathcal{P}\mathcal{U}_pL=L$ имеет место для любой R-свободной p-алгебры Ли L (см. [16, Theorem 6.11]).

Более подробную информацию о p-алгебрах Ли можно найти в монографиях [12, 3].

Назовем *p-центральным рядом* или *p-центральной фильтрацией* [14, 21] на группе G такой центральный ряд $\varGamma^{[p]}(G)=\bigl\{\varGamma_k^{[p]}(G)\colon k\ge1\bigr\}$, что если $g\in\varGamma_k^{[p]}(G)$, то $g^p\in\varGamma_{pk}^{[p]}(G)$ для любого k. Последовательные факторы $\varGamma_k^{[p]}(G)/\varGamma_{k+1}^{[p]}(G)$ являются элементарными абелевыми p-группами ($\mathbb{Z}_p$-модулями).

Нижним p-центральным рядом называется наиболее быстро убывающий p-центральный ряд, т.е. p-центральный ряд $\gamma^{[p]}(G) = \{\gamma_k^{[p]}(G)\colon k \geq 1\}$ со свойством $\gamma_k^{[p]}(G) \subset \Gamma_k^{[p]}(G)$ для любого p-центрального ряда $\Gamma^{[p]}(G)$ и $k \geq 1$. Он задается следующим образом: $\gamma_1^{[p]}(G) = G$ и $\gamma_k^{[p]}(G) = \big(\gamma_{k-1}^{[p]}(G), G\big)\big(\gamma_{\lceil k/p\rceil}^{[p]}\big)^p$ для $k \geq 2$ или более явно

$$\gamma_k^{[p]}(G) = \prod_{mp^i \geq k} (\gamma_m(G))^{p^i}.$$

Ассоциированный градуированный $\mathbb{Z}_p$-модуль

$$\mathrm{gr}_\bullet\, \Gamma^{[p]}(G) = \bigoplus_{k\geq 1} \Gamma_k^{[p]}(G)/\Gamma_{k+1}^{[p]}(G)$$

p-центрального ряда $\Gamma^{[p]}(G)$ является ограниченной алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_p$ со скобкой и p-степенью, определяемыми как

$$[\overline{g}_k, \overline{g}_\ell] = \overline{(g_k, g_\ell)}, \qquad (\overline{g}_k)^{[p]} = \overline{g_k^p}$$

для $g_k \in \Gamma_k^{[p]}(G)$, $g_\ell \in \Gamma_\ell^{[p]}(G)$.

5. ГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ

Пусть дано коммутативное кольцо с единицей R и группа G. *Групповой алгеброй* $R[G]$ называется ассоциативная алгебра, которая как R-модуль имеет базис $\{g \in G\}$, а умножение базисных элементов задается групповой операцией в G. Функтор групповой алгебры $\mathsf{Grp} \to \mathsf{Ass}$ является левым сопряженным к функтору группы обратимых элементов $\mathsf{Ass} \to \mathsf{Grp}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ass}}(R[G], A) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}(G, A^\times), \tag{5.1}$$

где $A^\times$ обозначает группу обратимых элементов в ассоциативной алгебре A. Это определяет универсальное свойство групповой алгебры.

Предложение 5.1. *Функтор групповой алгебры* $\mathsf{Grp} \to \mathsf{Ass}$ *сохраняет граф-произведения, т.е.* $R[\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}] \cong (R[\boldsymbol{G}])^{\mathcal{K}}$.

Доказательство. Функтор групповой алгебры сохраняет произведения и, поскольку он является левым сопряженным, сохраняет копределы. $\square$

Предложение 5.2. *Пусть группа G задана образующими и соотношениями*:

$$G = F(a_i\colon i \in I)/\big(r_j = 1 \ \textit{при}\ j \in J\big).$$

Тогда

$$R[G] \cong T\big(v_i, v_i^{-1}\colon i \in I\big)/\big(v_i v_i^{-1} = 1 \ \textit{при}\ i \in I,\ R_j = 1 \ \textit{при}\ j \in J\big),$$

где R_j — свободный моном от v_i и v_i^{-1}, соответствующий слову r_j.

Доказательство. Пусть V — ассоциативная алгебра из правой части доказываемого изоморфизма. Нам нужно проверить, что V удовлетворяет универсальному свойству, заданному соотношением (5.1). Имеем гомоморфизм $i\colon G \to V^\times$, заданный на образующих как $i(a_i) = v_i$. Нам необходимо показать, что для любого гомоморфизма $f\colon G \to A^\times$ из G в группу обратимых элементов алгебры A существует единственный гомоморфизм $F\colon V \to A$ такой, что $F^\times \circ i = f$. Из этого соотношения получаем $F(v_i) = f(a_i)$ и $F(v_i^{-1}) = (f(a_i))^{-1}$, и эти формулы однозначно определяют гомоморфизм F. $\square$

Пример 5.3. Применяя любое из двух приведенных выше предложений к прямоугольной группе Коксетера (2.4), получаем

$$\mathbb{Z}_2[\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}] \cong T_{\mathbb{Z}_2}(v_1, \ldots, v_m)/\big(v_i^2 = 1,\ v_i v_j v_i v_j = 1 \ \text{при}\ \{i, j\} \in \mathcal{K}\big).$$

Заметим, что соотношение $v_i v_j v_i v_j = 1$ эквивалентно соотношению $v_i v_j + v_j v_i = 0$.

Гомоморфизм аугментации $\varepsilon\colon R[G]\to R$ задается формулой $\varepsilon\bigl(\sum_i k_ig_i\bigr)=\sum_i k_i$, где $k_i\in R$ и $g_i\in G$. Пусть $\overline{R[G]}=\operatorname{Ker}\varepsilon$ — аугментационный идеал, и пусть

$$\mathrm{gr}_\bullet(R[G])=\bigoplus_{n\geq 1}(\overline{R[G]})^n/(\overline{R[G]})^{n+1}$$

— ассоциированное градуированное кольцо для $\overline{R[G]}$-адической фильтрации.

Теорема 5.4 [21]. *Если R — поле характеристики p, то существует изоморфизм*

$$\mathcal{U}_p\bigl(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}(G)\bigr)\otimes_{\mathbb{Z}}R\cong \mathrm{gr}_\bullet(R[G])$$

градуированных R-алгебр.

6. НИЖНИЕ p-ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РЯДЫ ГРАФ-ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП

В этом разделе мы рассматриваем прямоугольную группу Коксетера $\mathrm{RC}_\mathcal{K}=\mathbb{Z}_2^\mathcal{K}$ и (в более общем случае) граф-произведение групп $\mathbb{Z}_p$:

$$\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}=\operatorname{colim}^{\mathsf{Grp}}_{I\in\mathcal{K}}\mathbb{Z}_p^I=F(a_1,\ldots,a_m)/\bigl(a_i^p=1,\ a_ia_j=a_ja_i\ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr).$$

Следующий результат описывает ограниченную алгебру Ли, ассоциированную с нижним p-центральным рядом группы $\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}$.

Теорема 6.1. *Для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ и любого простого числа p существует изоморфизм*

$$\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}\bigl(\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}\bigr)\cong \mathrm{FL}_p(u_1,\ldots,u_m)/\bigl(u_i^{[p]}=0,\ [u_i,u_j]=0\ \textit{при}\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr)$$

p-алгебр Ли над $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Обозначим через $L_\mathcal{K}^{[p]}$ алгебру из правой части доказываемого изоморфизма. Пусть $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle=\mathrm{FL}_p(u)/(u^{[p]}=0)$ — тривиальная p-алгебра Ли с одной образующей. Тогда $L_\mathcal{K}^{[p]}$ является граф-произведением p-алгебр Ли $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle$:

$$L_\mathcal{K}^{[p]}=\mathrm{FL}_p(u_1,\ldots,u_m)/\bigl(u_i^{[p]}=0,\ [u_i,u_j]=0\ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr)=(\mathbb{Z}_p\langle u\rangle)^\mathcal{K}.$$

По лемме 4.1 достаточно доказать, что

$$\mathcal{U}_p\bigl(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}\bigl(\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}\bigr)\bigr)\cong\mathcal{U}_p\bigl(L_\mathcal{K}^{[p]}\bigr).\tag{6.1}$$

Поскольку функтор универсальной обертывающей $\mathcal{U}_p\colon\mathsf{Lie}_p\to\mathsf{Ass}$ является левым сопряженным и сохраняет произведения, он также сохраняет граф-произведения. Поэтому

$$\mathcal{U}_p\bigl(L_\mathcal{K}^{[p]}\bigr)=T_{\mathbb{Z}_p}(u_1,\ldots,u_m)/\bigl(u_i^p=0,\ u_iu_j=u_ju_i\ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr).\tag{6.2}$$

Теперь рассмотрим левую часть соотношения (6.1). По теореме 5.4 существует изоморфизм

$$\mathcal{U}_p\bigl(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}\bigl(\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}\bigr)\bigr)\cong\mathrm{gr}_\bullet\bigl(\mathbb{Z}_p\bigl[\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}\bigr]\bigr).$$

Ассоциированная градуированная алгебра в правой части берется относительно фильтрации групповой алгебры $\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}]$ степенями аугментационного идеала $\overline{\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}]}=\operatorname{Ker}\varepsilon$. В силу предложения 5.1

$$\mathbb{Z}_p\bigl[\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}\bigr]\cong T_{\mathbb{Z}_p}(v_1,\ldots,v_m)/\bigl(v_i^p=1,\ v_iv_j=v_jv_i\ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr)\tag{6.3}$$

(ср. пример 5.3). Аугментация $\varepsilon\colon \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}] \to \mathbb{Z}_p$ задается формулами $v_i \mapsto 1$, $i = 1,\dots,m$. Сравнивая (6.2) с (6.3), мы получаем изоморфизм аугментированных алгебр

$$\bigl(\mathcal{U}_p\bigl(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\bigr),\varepsilon'\bigr) \to \bigl(\mathbb{Z}_p\bigl[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}\bigr],\varepsilon\bigr), \qquad u_i \mapsto v_i - 1,$$

где $\varepsilon'\colon \mathcal{U}_p\bigl(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\bigr) \to \mathbb{Z}_p$ задается как $u_i \mapsto 0$. Далее, $\mathcal{U}_p\bigl(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\bigr)$ является градуированной фактор-алгеброй свободной ассоциативной алгебры (6.2) с градуировкой $\deg u_i = 1$. Фильтрация алгебры $\mathcal{U}_p\bigl(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\bigr)$ степенями аугментационного идеала $\operatorname{Ker}\varepsilon'$ совпадает с фильтрацией, задаваемой градуировкой. Для этой фильтрации ассоциированная градуированная алгебра $\operatorname{gr}_\bullet\bigl(\mathcal{U}_p\bigl(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\bigr)\bigr)$ есть просто $\mathcal{U}_p\bigl(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\bigr)$. Таким образом,

$$\mathcal{U}_p\bigl(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\bigr) \cong \operatorname{gr}_\bullet\bigl(\mathcal{U}_p\bigl(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\bigr),\varepsilon'\bigr) \cong \operatorname{gr}_\bullet\bigl(\mathbb{Z}_p\bigl[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}\bigr],\varepsilon\bigr) \cong \mathcal{U}_p\bigl(\operatorname{gr}_\bullet\gamma^{[p]}\bigl(\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}\bigr)\bigr),$$

что доказывает изоморфизм (6.1) и теорему. $\square$

Из теоремы 6.1 следует, что функтор $\operatorname{gr}_\bullet\gamma^{[p]}\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Lie}_p$ сохраняет граф-произведения циклических групп $\mathbb{Z}_p$. Этот результат можно обобщить на более широкий класс групп, используя следующую конструкцию.

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, и пусть $\mathcal{K}_i$ — симплициальный комплекс на конечном множестве V_i для $i = 1,\dots,m$. *Подстановочный комплекс* [1] определяется как следующий симплициальный комплекс на множестве $V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_m$:

$$\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m) = \bigl\{I_{j_1} \sqcup \ldots \sqcup I_{j_k}\colon\ I_{j_l} \in \mathcal{K}_{j_l},\ l = 1,\dots,k,\ \text{и}\ \{j_1,\dots,j_k\} \in \mathcal{K}\bigr\}.$$

В случае, когда $\mathcal{K}$ — набор m точек, имеем $\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m) = \mathcal{K}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{K}_m$. Если же $\mathcal{K} = \Delta_{[m]}$, то подстановочный комплекс представляет собой джойн: $\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m) = \mathcal{K}_1 * \ldots * \mathcal{K}_m$.

Пусть даны последовательности $\boldsymbol{X}_i = (X_{v,i}\colon v \in V_i)$ объектов категории C, индексированные элементами множеств V_i для $i = 1,\dots,m$.

Предложение 6.2. *Для полиэдрального произведения* (2.1) *имеет место изоморфизм*

$$(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_m)^{\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)} \cong \bigl(\boldsymbol{X}_1^{\mathcal{K}_1},\dots,\boldsymbol{X}_m^{\mathcal{K}_m}\bigr)^{\mathcal{K}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_m)^{\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)} &= \operatorname{colim}^{\mathsf{C}}_{I_{j_1}\sqcup\ldots\sqcup I_{j_k}\in\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)}(\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_m)^{I_{j_1}\sqcup\ldots\sqcup I_{j_k}} =\\ &= \operatorname{colim}^{\mathsf{C}}_{I_{j_1}\sqcup\ldots\sqcup I_{j_k}\in\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)} \boldsymbol{X}_{j_1}^{I_{j_1}} \times \ldots \times \boldsymbol{X}_{j_k}^{I_{j_k}} \cong\\ &\cong \operatorname{colim}^{\mathsf{C}}_{\{j_1,\dots,j_k\}\in\mathcal{K}}\Bigl(\Bigl(\operatorname{colim}^{\mathsf{C}}_{I_{j_1}\in\mathcal{K}_{j_1}} \boldsymbol{X}_{j_1}^{I_{j_1}}\Bigr) \times \ldots \times \Bigl(\operatorname{colim}^{\mathsf{C}}_{I_{j_k}\in\mathcal{K}_{j_k}} \boldsymbol{X}_{j_k}^{I_{j_k}}\Bigr)\Bigr) =\\ &= \operatorname{colim}^{\mathsf{C}}_{\{j_1,\dots,j_k\}\in\mathcal{K}}\Bigl(\boldsymbol{X}_{j_1}^{\mathcal{K}_{j_1}} \times \ldots \times \boldsymbol{X}_{j_k}^{\mathcal{K}_{j_k}}\Bigr) = \bigl(\boldsymbol{X}_1^{\mathcal{K}_1},\dots,\boldsymbol{X}_m^{\mathcal{K}_m}\bigr)^{\mathcal{K}}. \qquad \square\end{aligned}$$

Предложение 6.3. *Функтор* $\operatorname{gr}_\bullet\gamma^{[p]}\colon \mathsf{Grp} \to \mathsf{Lie}_p$ *сохраняет граф-произведения элементарных абелевых* p*-групп.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} = (G_1,\dots,G_m)^{\mathcal{K}}$ — граф-произведение элементарных абелевых p-групп $G_i = \mathbb{Z}_p^{n_i}$. Тогда $\operatorname{gr}_\bullet\gamma^{[p]}(G_i) = \mathbb{Z}_p\langle u_1,\dots,u_{n_i}\rangle$ — тривиальная p-алгебра Ли с n_i образующими. Заметим, что G_i есть граф-произведение $\mathbb{Z}_p^{\Delta_{[n_i]}}$, а $\mathbb{Z}_p\langle u_1,\dots,u_{n_i}\rangle$ есть граф-произведение $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle^{\Delta_{[n_i]}}$, где $\Delta_{[n_i]}$ — симплекс с n_i вершинами. Рассмотрим подстановочный комплекс $\mathcal{K}(\Delta_{[n_1]},\dots,\Delta_{[n_m]})$. Имеем

$$\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} = \Bigl(\mathbb{Z}_p^{\Delta_{[n_1]}},\dots,\mathbb{Z}_p^{\Delta_{[n_m]}}\Bigr)^{\mathcal{K}} \cong \mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}(\Delta_{[n_1]},\dots,\Delta_{[n_m]})}$$

в силу предложения 6.2. Применяя функтор $\operatorname{gr}_\bullet \gamma^{[p]}$, получаем

$$\operatorname{gr}_\bullet \gamma^{[p]}\big((G_1,\dots,G_m)^{\mathcal K}\big) \cong \operatorname{gr}_\bullet \gamma^{[p]}\Big(\mathbb Z_p^{\mathcal K(\Delta_{[n_1]},\dots,\Delta_{[n_m]})}\Big) \cong (\mathbb Z_p\langle u\rangle)^{\mathcal K(\Delta_{[n_1]},\dots,\Delta_{[n_m]})} \cong$$
$$\cong \big(\mathbb Z_p\langle u\rangle^{\Delta_{[n_1]}},\dots,\mathbb Z_p\langle u\rangle^{\Delta_{[n_m]}}\big)^{\mathcal K} = \big(\operatorname{gr}_\bullet \gamma^{[p]}(G_1),\dots,\operatorname{gr}_\bullet \gamma^{[p]}(G_m)\big)^{\mathcal K},$$

где второй изоморфизм следует из теоремы 6.1, а третий — из предложения 6.2. □

В случае прямоугольных групп Коксетера справедлива

Теорема 6.4. *Для любого симплициального комплекса $\mathcal K$ существует изоморфизм*

$$\operatorname{gr}_\bullet \gamma^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal K}) \cong \mathrm{FL}_2(u_1,\dots,u_m)/\big(u_i^{[2]}=0,\ [u_i,u_j]=0 \ \text{при}\ \{i,j\}\in\mathcal K\big)$$

2-алгебр Ли над $\mathbb Z_2$.

Мы также получаем аналог предложения 3.2 для прямоугольных групп Коксетера.

Предложение 6.5. *Для флагового комплекса $\mathcal K$ существует изоморфизм*

$$\mathcal U_2\big(\operatorname{gr}_\bullet \gamma^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal K})\big) \cong H_*\big(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};\mathbb Z_2\big)$$

ассоциативных $\mathbb Z_2$-алгебр, где алгебра гомологий петель в правой части описана в (2.9).

Чтобы изоморфизм из предложения 6.5 был согласован с градуировкой в $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal K};\mathbb Z_2)$, необходимо положить $\deg u_i = 1$.

Приложение. ГРАФ-ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП И АЛГЕБР: СРАВНЕНИЕ

В левом столбце табл. 1 приведены теоретико-групповые результаты и конструкции, а в правом — параллельные теоретико-гомотопические результаты о гомологиях петель и граф-произведениях алгебр. Четыре строки, охватывающие оба столбца, представляют результаты, связывающие граф-произведения групп с граф-произведениями алгебр и гомологиями петель. В каждом из столбцов $\boldsymbol X^{\mathcal K} = \operatorname{colim}^{\mathsf{Top}}_{I\in\mathcal K} \boldsymbol X^I$ — это полиэдральное произведение последовательности топологических пространств $\boldsymbol X = (X_1,\dots,X_m)$ с отмеченными точками.

Таблица 1

$\boldsymbol G = (G_1,\dots,G_m)$ — последовательность групп	$\boldsymbol A = (A_1,\dots,A_m)$ — последовательность ассоциативных алгебр с единицей над R
Граф-произведение $\boldsymbol G^{\mathcal K} = \operatorname{colim}^{\mathsf{Grp}}_{I\in\mathcal K} \boldsymbol G^I$	Граф-произведение $\boldsymbol A^{\mathcal K} = \operatorname{colim}^{\mathsf{Ass}}_{I\in\mathcal K} \boldsymbol A^{\otimes I}$
Функтор классифицирующего пространства $B\colon \mathsf{Tgp}\to\mathsf{Top}$ и функтор петель Мура $\Omega\colon \mathsf{Top}\to\mathsf{Tmn}$ сохраняют граф-произведения с точностью до гомотопии: $B(\boldsymbol G^{\mathcal K})\simeq(B\boldsymbol G)^{\mathcal K}$ и $\Omega(\boldsymbol X^{\mathcal K})\simeq(\Omega\boldsymbol X)^{\mathcal K}$ для флагового $\mathcal K$ (следствие 2.8)	Функтор гомологий петель $H_*\Omega\colon \mathsf{Top}\to\mathsf{Ass}$ с коэффициентами в поле сохраняет граф-произведения: $H_*(\Omega(\boldsymbol X^{\mathcal K});R)\cong(H_*(\Omega\boldsymbol X;R))^{\mathcal K}$ для флагового $\mathcal K$ (теорема 2.11)
Прямоугольная группа Артина $\mathrm{RA}_{\mathcal K} = \mathbb Z^{\mathcal K} = F(a_1,\dots,a_m)/(a_ia_j=a_ja_i$ при $\{i,j\}\in\mathcal K)$	Граф-произведение алгебр $R[v]^{\mathcal K} = T(v_1,\dots,v_m)/(v_iv_j=v_jv_i$ при $\{i,j\}\in\mathcal K)$
$B(\mathrm{RA}_{\mathcal K})\simeq(S^1)^{\mathcal K}$ (предложение 2.9)	$(S^{2p+1})^{\mathcal K}$, $p\ge 1$
$\pi_1((S^1)^{\mathcal K})\cong\mathrm{RA}_{\mathcal K}$	$H_*(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal K};R)\cong R[v]^{\mathcal K}$ (теорема 2.12)
$\operatorname{gr}_\bullet \gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal K})\cong\mathrm{FL}(v_1,\dots,v_m)/([v_i,v_j]=0$ при $\{i,j\}\in\mathcal K)$ (теорема 3.1)	

<table>
<tr><td colspan="2">$\mathcal{U}(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma(\mathrm{RA}_\mathcal{K})) \cong H_*(\varOmega(S^{2p+1})^\mathcal{K}; \mathbb{Z})$ для флагового $\mathcal{K}$ (предложение 3.2)</td></tr>
<tr><td>Прямоугольная группа Коксетера $\mathrm{RC}_\mathcal{K} = \mathbb{Z}_2^\mathcal{K} = F(a_1, \dots, a_m)/(a_i^2 = 1,\ a_i a_j = a_j a_i,\ \{i,j\} \in \mathcal{K})$</td><td>Граф-произведение алгебр $\Lambda[u]^\mathcal{K} = T(u_1, \dots, u_m)/(u_i^2 = 0,\ u_i u_j + u_j u_i = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K})$</td></tr>
<tr><td>$B(\mathrm{RC}_\mathcal{K}) \simeq (\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}$ (предложение 2.9)</td><td>$(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}$ — пространство Дэвиса–Янушкевича</td></tr>
<tr><td>$\pi_1((\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}) \cong \mathrm{RC}_\mathcal{K}$</td><td>$H_*(\varOmega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}; R) \cong \Lambda[u]^\mathcal{K}$ (теорема 2.13)</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{R}_\mathcal{K} = (D^1, S^0)^\mathcal{K}$ — вещественный момент–угол-комплекс</td><td>$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2, S^1)^\mathcal{K}$ — момент–угол-комплекс</td></tr>
<tr><td>Гомотопическое расслоение асферических пространств $$\mathcal{R}_\mathcal{K} \to (\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^m$$</td><td>Гомотопическое расслоение $$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^m$$</td></tr>
<tr><td>Короткая точная последовательность фундаментальных групп $$1 \to \mathrm{RC}'_\mathcal{K} \to \mathrm{RC}_\mathcal{K} \xrightarrow{\mathrm{Ab}} \mathbb{Z}_2^m \to 1$$</td><td>Короткая точная последовательность алгебр гомологий петель $$R \to H_*(\varOmega\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H_*(\varOmega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}) \to \Lambda[m] \to R$$</td></tr>
<tr><td>$\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ — коммутант группы $\pi_1((\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}) = \mathrm{RC}_\mathcal{K}$</td><td>$H_*(\varOmega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — подалгебра-коммутант в алгебре $H_*(\varOmega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}) \cong \Lambda[u]^\mathcal{K}$</td></tr>
<tr><td>Минимальный базис для $\mathrm{RC}'_\mathcal{K} = \pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$, состоящий из вложенных групповых коммутаторов (теорема 2.14)</td><td>Минимальный базис для $H_*(\varOmega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, состоящий из вложенных лиевых коммутаторов (теорема 2.15)</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{RC}'_\mathcal{K} = \pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф [19, теорема 4.3]</td><td>Для флагового $\mathcal{K}$ алгебра $H_*(\varOmega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является свободной тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф [10, Theorem 4.6]</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[2]}(\mathrm{RC}_\mathcal{K}) \cong \mathrm{FL}_{\mathbb{Z}_2}(u_1, \dots, u_m)/\bigl(u_i^{[2]} = 0,\ [u_i, u_j] = 0$ при $\{i,j\} \in \mathcal{K}\bigr)$ (теорема 6.4)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathcal{U}_2(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[2]}(\mathrm{RC}_\mathcal{K})) \cong H_*(\varOmega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}; \mathbb{Z}_2)$ для флагового $\mathcal{K}$ (предложение 6.5)</td></tr>
</table>

Благодарности. Авторы благодарны анонимному рецензенту за весьма полезные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамян С.А., Панов Т.Е.* Высшие произведения Уайтхеда для момент–угол-комплексов и подстановки симплициальных комплексов // Тр. МИАН. 2019. Т. 305. С. 7–28.
2. *Bahri A., Bendersky M., Cohen F.R.* Polyhedral products and features of their homotopy theory // Handbook of homotopy theory. Boca Raton, FL: CRC Press, 2020. P. 103–144.
3. *Бахтурин Ю.А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
4. *Bartholdi L., Härer H., Schick T.* Right angled Artin groups and partial commutation, old and new // Enseign. math. Sér. 2. 2020. V. 66, N 1–2. P. 33–61.
5. *Bubenik P., Gold L.H.* Graph products of spheres, associative graded algebras and Hilbert series // Math. Z. 2011. Bd. 268, H. 3–4. S. 821–836.
6. *Buchstaber V.M., Panov T.E.* Toric topology. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2015. (Math. Surv. Monogr.; V. 204).

7. *Cai L.* On the graph products of simplicial groups and connected Hopf algebras // J. Algebra. 2024. V. 647. P. 99–143; arXiv: 2306.16625 [math.AT].
8. *Dobrinskaya N.* Loops on polyhedral products and diagonal arrangements: E-print, 2009. arXiv: 0901.2871 [math.AT].
9. *Duchamp G., Krob D.* The lower central series of the free partially commutative group // Semigroup Forum. 1992. V. 45, N 3. P. 385–394.
10. *Grbić J., Panov T., Theriault S., Wu J.* The homotopy types of moment–angle complexes for flag complexes // Trans. Am. Math. Soc. 2016. V. 368, N 9. P. 6663–6682.
11. *Grbić J., Simmons G., Ilyasova M., Panov T.* One-relator groups and algebras related to polyhedral products // Proc. R. Soc. Edinburgh, Sect. A: Math. 2022. V. 152, N 1. P. 128–147.
12. *Jacobson N.* Lie algebras. 2nd ed. New York: Dover Publ., 1979. Рус. пер. 1-го изд.: *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
13. *Kim K.H., Roush F.W.* Homology of certain algebras defined by graphs // J. Pure Appl. Algebra. 1980. V. 17, N 2. P. 179–186.
14. *Lazard M.* Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie // Ann. sci. Éc. norm. supér. Ser. 3. 1954. V. 71, N 2. P. 101–190.
15. *Magnus W., Karrass A., Solitar D.* Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations. 2nd rev. ed. New York: Dover Publ., 1976. Рус. пер. 1-го изд.: *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп: Представление групп в терминах образующих и соотношений. М.: Наука, 1974.
16. *Milnor J.W., Moore J.C.* On the structure of Hopf algebras // Ann. Math. Ser. 2. 1965. V. 81, N 2. P. 211–264.
17. *Panov T.E., Ray N.* Categorical aspects of toric topology // Toric topology: Int. Conf., Osaka, 2006 / Ed. by M. Harada et al. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2008. P. 293–322. (Contemp. Math.; V. 460).
18. *Panov T., Ray N., Vogt R.* Colimits, Stanley–Reisner algebras, and loop spaces // Categorical decomposition techniques in algebraic topology: Proc. Int. Conf., Isle of Skye, 2001. Basel: Birkhäuser, 2004. P. 261–291. (Prog. Math.; V. 215).
19. *Панов Т.Е., Верёвкин Я.А.* Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 11. С. 105–126.
20. *Papadima S., Suciu A.I.* Algebraic invariants for right-angled Artin groups // Math. Ann. 2006. Bd. 334, H. 3. S. 533–555.
21. *Quillen D.G.* On the associated graded ring of a group ring // J. Algebra. 1968. V. 10, N 4. P. 411–418.
22. *Serre J.-P.* Lie Algebras and Lie Groups: 1964 lectures given at Harvard University. 2nd ed. Berlin: Springer, 1992. (Lect. Notes Math.; V. 1500). Рус. пер. 1-го изд.: *Серр Ж.-П.* Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
23. *Верёвкин Я.А.* Градуированные компоненты присоединенной алгебры Ли прямоугольной группы Кокстера // Тр. МИАН. 2022. Т. 318. С. 31–42.
24. *Верёвкин Я.А., Рахматуллаев Т.А.* О последовательных факторах нижнего центрального ряда прямоугольных групп Коксетера // Мат. заметки. 2024. Т. 116, № 1. С. 10–33.
25. *Wade R.D.* The lower central series of a right-angled Artin group // Enseign. math. Sér. 2. 2015. V. 61, N 3–4. P. 343–371.
26. *Whitehead J.H.C.* On the asphericity of regions in a 3-sphere // Fundam. math. 1939. V. 32, N 1. P. 149–166.