Математические заметки

том 63 выпуск 2 февраль 1998

УДК 515.164.24

КЛАССИФИКАЦИЯ С ТОЧНОСТЬЮ ДО КОБОРДИЗМА МНОГООБРАЗИЙ, НЕСУЩИХ ПРОСТОЕ ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ $\mathbb{Z}/p$

Т. Е. Панов

Получено полное описание множества классов кобордизма квазикомплексных многообразий с действием группы $\mathbb{Z}/p$, множество неподвижных точек которого имеет тривиальное нормальное расслоение, в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов и в терминах характеристических чисел. Установлена связь с другими работами в данном направлении, где рассматриваемая проблема была решена в различных частных случаях.

Библиография: 7 названий.

Определение 1. Назовем действие группы $\mathbb{Z}/p$ на квазикомплексном многообразии M^{2n} *простым*, если множество неподвижных точек представляет собой объединение конечного числа подмногообразий, имеющих тривиальное нормальное расслоение, и *сильно простым*, если кроме того наборы весов (собственных чисел дифференциала отображения, соответствующего образующей $\rho \in \mathbb{Z}/p$, в неподвижных точках) одинаковы для всех неподвижных подмногообразий одной размерности.

В работе получена полная классификация классов кобордизма $\sigma \in \Omega_U$, в которых содержатся многообразия, несущие простое действие группы $\mathbb{Z}/p$ в терминах коэффициентов формальной группы геометрических кобордизмов (теорема 1) и в терминах характеристических чисел (теорема 2, следствие 2).

Для сильно простых действий $\mathbb{Z}/p$ проблема классификации была полностью решена Коннером и Флойдом в работе [1] (сильно простое действие в смысле определения 1 называлось в [1] *действием $\mathbb{Z}/p$, множество неподвижных точек которого имеет тривиальное нормальное расслоение*). Обратим внимание на то, что даже в случае действия с изолированными неподвижными точками понятия простого и сильно простого действия отличаются (соответствующие примеры приведены в работе). Результаты Коннера и Флойда получены в качестве следствия в данной работе. В то же время методы, используемые в [1], судя по всему, не позволяют получить наш, более общий, результат.

Начиная с работы [2], для решения задач, связанных с действиями $\mathbb{Z}/p$, использовалась теория формальных групп, которая вошла в топологию благодаря формальной группе геометрических кобордизмов. Рассматриваемая проблема впервые четко сформулирована в работе [3], где была получена формула, выражающая класс кобордизма $\operatorname{mod} p$ многообразия M^{2n} с простым действием $\mathbb{Z}/p$ через инварианты действия (см.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01404.

формулу (7)). Фактически, первые результаты по этой проблеме получены в работе [4] и, в частности, результат, сформулированный у нас как следствие 3. В [4], как и в этой работе, используется описание множества классов кобордизмов, представленных многообразиями с простым действием $\mathbb{Z}/p$ как Ω_U-модуля, натянутого на некоторую систему коэффициентов степенной системы, определяемой формальной группой геометрических кобордизмов. Новый набор образующих этого Ω_U-модуля, введенный нами, позволил решить классификационную задачу в терминах характеристических чисел.

Итак, пусть на квазикомплексном многообразии M^{2n} действует преобразование g простого периода $p>2$ (т.е. $g^p=\mathrm{id}$), так что множество неподвижных точек представляет собой объединение подмногообразий с тривиальными нормальными расслоениями (например, лишь изолированные неподвижные точки), т.е. задано простое $\mathbb{Z}/p$-действие. Пусть множество неподвижных точек преобразования g представляет собой объединение неподвижных подмногообразий классов $\lambda_j\in\Omega_U$, имеющих веса $(x_k^{(j)})\in(\mathbb{Z}/p)^*$ (т.е. неединичные собственные числа дифференциала отображения g в неподвижных точках) в тривиальных нормальных расслоениях к ним. Эти данные определяют класс кобордизма многообразия M^{2n} в Ω_U с точностью до элементов из $p\Omega_U$ (см. [3]), так как в любом классе кобордизмов из $p\Omega_U$, очевидно, имеется многообразие, допускающее действие $\mathbb{Z}/p$ (переставляющее компоненты связности) без неподвижных точек.

Каждому неподвижному подмногообразию класса $\lambda_j\in\Omega_U$ с весами $(x_1^{(j)},\ldots,x_{m_j}^{(j)})$, $2m_j+\dim\lambda_j=2n$, соответствует *инвариант Коннера–Флойда*

$$\alpha_{2m_j-1}(x_1^{(j)},\ldots,x_{m_j}^{(j)})\in U_{2m_j-1}(B\mathbb{Z}/p)$$

(см. [2]). Кольцо кобордизмов $U^*(B\mathbb{Z}/p)$ имеет вид $U^*(B\mathbb{Z}/p)=\Omega_U\big[[u]\big]/[u]_p=0$, где $[u]_p=p\Psi^p(u)$ – p-я степень в формальной группе геометрических кобордизмов (см. [3]). Из того что $D\big(\alpha_i(1,\ldots,1)\big)=u^{n-i}$, где D – оператор двойственности Пуанкаре–Атья между $U_*(L_p^{2n-1})$ и $U^*(L_p^{2n-1})$, следует, что Ω_U-модуль $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ порождается элементами $\alpha_{2i-1}(1,\ldots,1)$ и соотношениями

$$0=\frac{[u]_p}{u}\cap\alpha_{2i-1}(1,\ldots,1),\tag{1}$$

где “$\cap$” – оператор “высечения” Чеха, $u^k\cap\alpha_{2i-1}(1,\ldots,1)=\alpha_{2(i-k)-1}(1,\ldots,1)$.

В [5] было доказано, что

$$\alpha_{2k-1}(x_1,\ldots,x_k)=\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{u}{[u]_{x_j}}\right)\cap\alpha_{2k-1}(1,\ldots,1).\tag{2}$$

Расширив систему образующих модуля $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ элементами $\alpha_{2k-1}(x_1,\ldots,x_k)$ для $x_j\neq 1 \bmod p$ и добавив к соотношениям (1) соотношения (2), получим $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$-свободную резольвенту модуля $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ (здесь $\mathbb{Z}_{(p)}$ – кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, которое можно рассматривать как кольцо p-адических чисел):

$$0\longrightarrow F_1\longrightarrow F_0\longrightarrow \widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)\longrightarrow 0,$$

где F_0 – свободный $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$-модуль, натянутый на образующие $\alpha_{2k-1}(x_1,\ldots,x_k)$, F_1 – свободный $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$-модуль соотношений, натянутый на соотношения

$$a(x_1,\ldots,x_k)=\alpha_{2k-1}(x_1,\ldots,x_k)-\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{u}{[u]_{x_j}}\right)\cap\alpha_{2k-1}(1,\ldots,1),$$

$$a_k=\frac{[u]_p}{u}\cap\alpha_{2k-1}(1,\ldots,1).$$

Каждое простое действие $\mathbb{Z}/p$ на M^{2n} задает соотношение между элементами $\alpha_{2k-1}(x_1,\dots,x_k)$ в $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$. В силу определения элементов $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ как классов бордизмов многообразий со свободным действием группы $\mathbb{Z}/p$ верно и обратное: каждое соотношение в $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ вида

$$\sum_j \lambda_j \alpha_{2m_j-1}(x_1^{(j)},\dots,x_{m_j}^{(j)}) = 0, \qquad \lambda_j \in \Omega_U, \quad 2m_j + \dim\lambda_j = 2n,$$

реализуется на некотором многообразии M^{2n} с простым действием $\mathbb{Z}/p$ (M^{2n} получается из “пленки” со свободным действием $\mathbb{Z}/p$, натянутой на объединение многообразий $\lambda_j \times S^{2m_j-1}$, соответствующей соотношению в $\widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$, путем приклеивания $\lambda_j \times D^{2m_j}$), причем класс кобордизма M^{2n} в Ω_U определен однозначно с точностью до элементов $p\Omega_U$. Таким образом, определен *гомоморфизм реализации*

$$\Phi\colon F_1 \to \Omega_U/p\Omega_U = \Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p,$$

ставящий в соответствие соотношению между $\alpha_{2k-1}(x_1,\dots,x_k) \in \widetilde{U}_*(B\mathbb{Z}/p)$ класс кобордизмов $\operatorname{mod} p$ многообразия, на котором это соотношение реализуется в указанном выше смысле. В силу результатов Коннера и Флойда (см. [1], а также [4]) для базисных соотношений из F_1 имеем

$$\Phi\bigl(a(x_1,\dots,x_k)\bigr) = \Bigl\langle \prod_{i=1}^{k} \frac{u}{[u]_{x_i}} \Bigr\rangle_k \operatorname{mod} p \in \Omega_U/p\Omega_U,$$
$$\Phi(a_k) = -\Bigl\langle \frac{[u]_p}{u} \Bigr\rangle_k \operatorname{mod} p \in \Omega_U/p\Omega_U,$$

где $\langle\,\cdot\,\rangle_k$ означает коэффициент при u^k. Отсюда следует, что $\operatorname{Im}\Phi = \widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$, где $\widetilde{\Lambda}(1) = \Lambda^+(1)\cdot\Omega_U$ есть Ω_U-модуль, натянутый на положительную часть $\Lambda^+(1)$ кольца коэффициентов $\Lambda(1)$ степенной системы $[u]_k$. Гомоморфизм Φ поднимается до гомоморфизмов $\Phi\colon F_1 \to \widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ или $\Phi\colon F_1 \to \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, где $\widetilde{\Lambda}_p(1)$ есть Ω_U-модуль, натянутый на $\Lambda^+(1)$ и p.

Таким образом, задача об описании множества классов кобордизмов многообразий с простым действием $\mathbb{Z}/p$ сводится к описанию $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}/p$ или $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модулей $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ и $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, которые также являются идеалами в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}/p$ и $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ соответственно.

Пусть

$$[u]_k = ku + \sum_{n\geqslant 1} \alpha_n^{(k)} u^{n+1},$$

$\alpha_n^{(k)} \in \Omega_U^{-2n}$ – коэффициенты степенной системы.

Теорема 1. *В качестве образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять следующие коэффициенты $\alpha_n \in \Omega_U^{-2n}$:*

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n^{(p_1)}, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1, \\ \alpha_n^{(p)}, & \text{если } n \text{ делится на } p-1, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где p_1 – простой первообразный корень $\operatorname{mod} p$ (т.е. p_1 – образующая циклической группы $(\mathbb{Z}/p)^*$).

Замечание. Из теоремы Дирихле следует, что среди всех первообразных корней $\operatorname{mod} p$ имеются простые числа.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим вначале коэффициенты $\alpha_n^{(r)}$, где r не является простым. Пусть $r = p_1 q$, где p_1 – простое число. Так как $[x]_r = \big[[x]_{p_1}\big]_q$, имеем

$$rx + \sum_n \alpha_n^{(r)} x^{n+1} = q[x]_{p_1} + \sum_n \alpha_n^{(q)} ([x]_{p_1})^{n+1}$$
$$= p_1 q x + q \sum_n \alpha_n^{(p_1)} x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(q)} \left(p_1 x + \sum_m \alpha_m^{(p_1)} x^{m+1} \right)^{n+1}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $\alpha_n^{(r)} = P(\alpha_1^{(p_1)}, \dots, \alpha_n^{(p_1)}, \alpha_1^{(q)}, \dots, \alpha_n^{(q)})$, где P – некоторый полином с целыми коэффициентами (без свободного члена). Отсюда получаем представление

$$\alpha_n^{(r)} = \lambda_1 \alpha_1^{(p_1)} + \dots + \lambda_n \alpha_n^{(p_1)} + \mu_1 \alpha_1^{(q)} + \dots + \mu_n \alpha_n^{(q)}, \qquad \lambda_i, \mu_i \in \Omega_U.$$

Таким образом, коэффициенты $\alpha_n^{(r)}$, $r = p_1 q$, можно исключить из системы образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Если q снова не является простым, то повторяем эту процедуру, и т.д. В итоге получаем систему образующих модуля $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, состоящую лишь из коэффициентов $\alpha_n^{(p_1)}$ с простыми p_1. Среди всех простых p_1 имеется выделенное простое число p. Далее покажем, что эту систему образующих можно сузить до системы (3).

Вначале заметим, что в размерности 1 (т.е. в Ω_U^{-2}) в качестве образующей $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять $\alpha_1^{(p_1)}$, где p_1 – простой первообразный корень $\operatorname{mod} p$. Действительно, пусть p_2 – любое простое число. Тогда $\big[[x]_{p_2}\big]_{p_1} = \big[[x]_{p_1}\big]_{p_2}$, т.е.

$$p_1 p_2 x + p_1 \sum_n \alpha_n^{(p_2)} x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(p_1)} \left(p_2 x + \sum_m \alpha_m^{(p_2)} x^{m+1} \right)^{n+1}$$
$$= p_2 p_1 x + p_2 \sum_n \alpha_n^{(p_1)} x^{n+1} + \sum_n \alpha_n^{(p_2)} \left(p_1 x + \sum_m \alpha_m^{(p_1)} x^{m+1} \right)^{n+1}. \tag{4}$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, получим $p_1 \alpha_1^{(p_2)} + p_2^2 \alpha_1^{(p_1)} = p_2 \alpha_1^{(p_1)} + p_1^2 \alpha_1^{(p_2)}$, т.е. $(p_1 - p_1^2)\alpha_1^{(p_2)} = (p_2 - p_2^2)\alpha_1^{(p_1)}$. Так как p_1 – первообразный корень, $p_1 - p_1^2$ обратимо в $\mathbb{Z}_{(p)}$. Значит, $\alpha_1^{(p_2)} = \lambda \alpha_1^{(p_1)}$, где $\lambda \in \mathbb{Z}_{(p)} \subset \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, т.е. для любого p_2 коэффициент $\alpha_1^{(p_2)}$ выражается через $\alpha_1^{(p_1)}$.

Допустим, мы доказали, что система (3) коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ (т.е. α_i – коэффициент при x^{i+1} в $[x]_{p_1}$, если i не делится на $p-1$, и коэффициент при x^{i+1} в $[x]_p$, если i делится на $p-1$) является системой образующих $\widetilde{\Lambda}(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ до размерности $n-1$, т.е. при любом $k \leqslant n-1$ и любом q имеется представление $\alpha_k^{(q)} = \lambda_1^{(q)} \alpha_1 + \dots + \lambda_k^{(q)} \alpha_k$, $\lambda_i^{(q)} \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Докажем, что такое представление имеется и для $\alpha_n^{(q)}$. Из сказанного выше следует, что достаточно ограничиться простыми q. Пусть вначале n не делится на $p-1$, т.е. $\alpha_n = \alpha_n^{(p_1)}$, где p_1 – первообразный корень $\operatorname{mod} p$, и пусть p_2 – произвольное простое число. Приравняем в (4) коэффициенты при x^{n+1}:

$$p_1 \alpha_n^{(p_2)} + p_2^{n+1} \alpha_n^{(p_1)} + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_{n-1} \alpha_{n-1} = p_2 \alpha_n^{(p_1)} + p_1^{n+1} \alpha_n^{(p_2)} + \nu_1 \alpha_1 + \dots + \nu_{n-1} \alpha_{n-1}$$

(мы разложили все коэффициенты $\alpha_k^{(p_1)}, \alpha_k^{(p_2)}$, $k<n$, по образующим $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$, т.е. $\mu_i,\nu_i\in\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$). Отсюда

$$p_1(1-p_1^n)\alpha_n^{(p_2)}=(p_2-p_2^{n+1})\alpha_n^{(p_1)}+(\nu_1-\mu_1)\alpha_1+\dots+(\nu_{n-1}-\mu_{n-1})\alpha_{n-1}. \qquad (5)$$

Так как p_1 – первообразный корень $\operatorname{mod} p$ и n не делится на $p-1$, то $p_1(1-p_1^n)$ обратимо в $\mathbb{Z}_{(p)}$. Тогда из (5) получаем выражение $\alpha_n^{(p_2)}$ через $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ и $\alpha_n=\alpha_n^{(p_1)}$ с коэффициентами в $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$.

Пусть теперь n делится на $p-1$. Сделаем вначале несколько предварительных замечаний. Известно, что Ω_U является кольцом полиномов: $\Omega_U=\mathbb{Z}[a_1,a_2,\dots,a_n,\dots]$, $a_n\in\Omega_U^{-2n}$. Кольцо Ω_U является кольцом коэффициентов (универсальной) формальной группы геометрических кобордизмов, а кольцом коэффициентов логарифма этой формальной группы является кольцо $\Omega_U(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[b_1,b_2,\dots,b_n,\dots]$,

$$b_n=\frac{\mathbb{CP}_n}{n+1},\qquad g(u)=u+\sum_n\frac{\mathbb{CP}_n}{n+1}u^{n+1}.$$

При этом в кольцах Ω_U, $\Omega_U(\mathbb{Z})$ можно выбрать мультипликативные образующие $\{a_i^*\}$, $\{b_i^*\}$ так, что вложение $\iota_0\colon\Omega_U\to\Omega_U(\mathbb{Z})$ задается следующим образом:

$$\iota_0(a_i^*)=\begin{cases} p\cdot b_i^*, & \text{если } i=p^k-1 \text{ для некоторого } k,\\ b_i^* & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пусть B^+ – положительная часть кольца $B=\Omega_U(\mathbb{Z})$. Тогда $(B^+)^2$ – разложимые элементы в $\Omega_U(\mathbb{Z})$. При вложении $\iota_0\colon\Omega_U\to\Omega_U(\mathbb{Z})$ коэффициенты $\alpha_n^{(p)}$ ряда $[x]_p$ переходят в элементы $(p-p^{n+1})b_n+(B^+)^2$. Таким образом, коэффициенты $\alpha_{p^k-1}^{(p)}$ можно взять за мультипликативные образующие кольца $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ в размерностях p^k-1. В размерностях $l\ne p^k-1$ имеем $\alpha_l^{(p)}\in p\Omega_U$, т.е. $\alpha_l^{(p)}$ делится на p в Ω_U.

Перепишем соотношение (4), подставляя p вместо p_1:

$$\begin{aligned} pp_2x&+p\sum_m\alpha_m^{(p_2)}x^{m+1}+\sum_m\alpha_m^{(p)}(p_2x+\alpha_1^{(p_2)}x^2+\alpha_2^{(p_2)}x^3+\cdots)^{m+1}\\ &=p_2px+p_2\sum_m\alpha_m^{(p)}x^{m+1}+\sum_m\alpha_m^{(p_2)}(px+\alpha_1^{(p)}x^2+\alpha_2^{(p)}x^3+\cdots)^{m+1}.\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при x^{n+1}:

$$\begin{aligned} p\alpha_n^{(p_2)}&+p_2^{n+1}\alpha_n^{(p)}+\Big\langle\sum_{m<n}\alpha_m^{(p)}(p_2x+\alpha_1^{(p_2)}x^2+\alpha_2^{(p_2)}x^3+\cdots)^{m+1}\Big\rangle_{n+1}\\ &=p_2\alpha_n^{(p)}+p^{n+1}\alpha_n^{(p_2)}+\Big\langle\sum_{m<n}\alpha_m^{(p_2)}(px+\alpha_1^{(p)}x^2+\alpha_2^{(p)}x^3+\cdots)^{m+1}\Big\rangle_{n+1},\end{aligned}$$

где $\langle\,\cdot\,\rangle_{n+1}$ означает коэффициент при x^{n+1}. Разложим коэффициенты $\alpha_m^{(p_2)}$ при $m<n$ по образующим $\alpha_1,\dots,\alpha_m$. Так как $\alpha_m^{(p)}\in p\Omega_U$ при $m\ne p^k-1$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned} p(1-p^n)\alpha_n^{(p_2)}&=p_2(1-p_2^n)\alpha_n^{(p)}+p(\mu_1\alpha_1+\dots+\mu_n\alpha_n)\\ &-\Big\langle\sum_{k:p^k-1<n}\alpha_{p^k-1}^{(p)}(p_2x+\alpha_1^{(p_2)}x^2+\alpha_2^{(p_2)}x^3+\cdots)^{p^k}\Big\rangle_{n+1}\\ &+\Big\langle\sum_{m<n}\alpha_m^{(p_2)}(\alpha_{p-1}^{(p)}x^p+\alpha_{p^2-1}^{(p)}x^{p^2}+\dots+\alpha_{p^k-1}^{(p)}x^{p^k}+\cdots)^{m+1}\Big\rangle_{n+1}.\end{aligned} \qquad (6)$$

Последние два слагаемых мы можем записать в виде $\alpha^{(p)}_{p-1}\nu_1+\alpha^{(p)}_{p^2-1}\nu_2+\dots+\alpha^{(p)}_{p^k-1}\nu_k$, где $p^k-1<n$, $\nu_i\in\Omega_U$. Так как остальная часть соотношения (6) лежит в $p\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ (т.е. делится на p), а $\alpha^{(p)}_{p^i-1}$ являются полиномиальными образующими $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ в размерностях p^i-1, отсюда следует, что и $\nu_i\in p\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$, т.е. ν_i делятся на p в $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$. Пусть $\nu_i=p\varkappa_i$, $\varkappa_i\in\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$. Тогда (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned}p(1-p^n)\alpha^{(p_2)}_n&=p_2(1-p_2^n)\alpha^{(p)}_n+p(\mu_1\alpha_1+\dots+\mu_n\alpha_n)\\&+p(\alpha^{(p)}_{p-1}\varkappa_1+\alpha^{(p)}_{p^2-1}\varkappa_2+\dots+\alpha^{(p)}_{p^k-1}\varkappa_k),\qquad p^k-1<n,\quad \mu_i,\varkappa_i\in\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}.\end{aligned}$$

Так как n делится на $p-1$, то $1-p_2^n$ делится на p (при $p_2\neq p$). Таким образом, все соотношение делится на p. Разделим его на p, учитывая, что $1-p^n$ обратимо в $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$, получим, что $\alpha^{(p_2)}_n$ представляется в виде

$$\alpha^{(p_2)}_n=\frac{p_2(1-p_2^n)}{p(1-p^n)}\alpha^{(p)}_n+\lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Полагая

$$\lambda_n=\frac{p_2(1-p_2^n)}{p(1-p^n)}\in\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)},$$

получим искомое представление и для $\alpha^{(p_2)}_n$ (так как $\alpha_n=\alpha^{(p)}_n$). Теорема доказана.

Следствие 1. *В качестве образующих $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ можно взять следующие*:

$$\alpha_n=\begin{cases}p, & \text{если } n=0,\\ \alpha^{(p_1)}_n, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1,\ p_1 \text{ – первообразный корень} \bmod p,\\ \alpha^{(p)}_{p^k-1}, & \text{если } n=p^k-1,\ k=1,2,\dots.\end{cases}$$

В качестве образующих $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}/p$-модуля $\widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}/p$ можно взять

$$\alpha_n=\begin{cases}\alpha^{(p_1)}_n, & \text{если } n \text{ не делится на } p-1,\\ \alpha^{(p)}_{p^k-1}, & \text{если } n=p^k-1,\ k=1,2,\dots.\end{cases}$$

В остальных размерностях образующих нет.

Доказательство. Это следует из того, что для системы образующих $\widetilde{\Lambda}(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$, построенной в теореме 1 при n кратных $p-1$, но $n\neq p^k-1$, элементы α_n делятся на p, т.е. лежат в $p\Omega_U$, а остальные α_n не лежат в $p\Omega_U$.

Далее, используя описание структуры $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$, докажем результат, аналогичный теореме Стонга–Хаттори, – опишем множество классов кобордизма, имеющих в качестве представителя многообразие с простым действием $\mathbb{Z}/p$ в терминах характеристических чисел.

Как известно из [3], гомоморфизм $\Phi\colon F_1\to\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ продолжается до гомоморфизма $\gamma_p: F_0\to\Omega_U(\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$, причем имеет место формула

$$\gamma_p(x_1,x_2,\dots,x_k)=\left\langle\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{u}{[u]_{x_j}}\right)\frac{pu}{[u]_p}\right\rangle_k.$$

В частности,

$$\gamma_p(1,\dots,1)=\left\langle \frac{pu}{[u]_p}\right\rangle_k,$$

где $\gamma_p(x_1,x_2,\dots,x_k):=\gamma_p\left(\alpha_{2k-1}(x_1,x_2,\dots,x_k)\right)$, $\alpha_{2k-1}(x_1,x_2,\dots,x_k)\in F_0$.

Таким образом, для действия группы $\mathbb{Z}/p$ на M^{2n} с неподвижными подмногообразиями классов $\lambda_j\in\Omega_U$, имеющими веса $(x_k^{(j)})\in(\mathbb{Z}/p)^*$ в тривиальных нормальных расслоениях к ним, имеет место соотношение

$$[M^{2n}]\equiv\sum_j\lambda_j\gamma_p(x_1^{(j)},\dots,x_{m_j}^{(j)})\bmod p\Omega_U. \tag{7}$$

Возникает вопрос, аналогичный проблеме Милнора–Хирцебруха (ответ на которую дает теорема Стонга–Хаттори), поставленный в работе [3]: какие из элементов вида

$$\sum_j\lambda_j\gamma_p(x_1^{(j)},\dots,x_{m_j}^{(j)})\in\Omega_U(\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$$

представляют собой классы кобордизма многообразий, несущих простое действие $\mathbb{Z}/p$? Ответ на этот вопрос дает теорема 2.

Определение 2. Пусть $\omega=\sum_i k_i\cdot(i)$, $k_i\geqslant 0$, – разбиение числа $n=\|\omega\|=\sum_i k_i\cdot i$. Назовем разбиение ω *кратным* $p-1$, если все i, для которых $k_i\neq 0$, кратны $p-1$ (естественно, такие разбиения существуют только для n, кратных $p-1$). Назовем разбиение ω *не p-адическим*, если для любого $j>0$ $k_{p^j-1}=0$.

Теорема 2. *Элемент $\sigma\in\Omega_U(\mathbb{Z})^{-2n}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ лежит в $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$-модуле $\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ и, таким образом, является классом кобордизма многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда все K-характеристические числа $s_\omega(\sigma)$, $\omega=\sum_i k_i\cdot(i)$, $\|\omega\|=\sum_i k_i\cdot i\leqslant n$, лежат в $\mathbb{Z}_{(p)}$ и для всех разбиений ω, кратных $p-1$, когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\|=n$, делятся на p.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\sigma\in\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$. Заметим, что система образующих $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$-модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$, описанная в следствии 1, обладает тем свойством, что каждый элемент $\alpha_i\in\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ из системы образующих является также полиномиальной образующей $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ в размерности $-2i$. Дополним эту систему образующих полиномиальными образующими α_i в недостающих размерностях $-2i$ таких, что i делится на $p-1$, но $i\neq p^k-1$. Таким образом, $\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}=\mathbb{Z}_{(p)}[\alpha_1,\alpha_2,\dots]$.

Так как $\sigma\in\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}\subset\Omega_U\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$, все K-характеристические числа $s_\omega(\sigma)$ лежат в $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Если n не делится на $p-1$, то разбиений ω, кратных $p-1$, не существует.

Пусть $n=m(p-1)$. Представим σ как полином от α_i (σ является однородным полиномом степени $-2m(p-1)$):

$$\sigma=\sum_{\|\omega\|=m(p-1)}r_\omega\alpha_\omega=r_{m(p-1)}\alpha_{m(p-1)}+\cdots,\qquad \omega=\sum_i k_i\cdot(i),\quad \alpha_\omega=\alpha_1^{k_1}\cdot\alpha_2^{k_2}\cdots. \tag{8}$$

Из описания структуры $\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ (см. следствие 1) следует, что $\sigma\in\widetilde{\Lambda}_p(1)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ тогда и только тогда, когда для всех не p-адических разбиений ω, кратных $p-1$, коэффициенты r_ω в разложении (8) делятся на p.

Пусть

$$\mathrm{ch}_U(u) = t + \sum_{i\geqslant 1} \beta_i t^{i+1}, \qquad u = c_1^U(\zeta) \in U^2(\mathbb{CP}(\infty)), \quad t = c_1^H(\zeta) \in H^2(\mathbb{CP}(\infty)),$$

ch_U – характер Чженя–Дольда в кобордизмах (см. [6]), $\beta_i \in \Omega_U(\mathbb{Z})$. Тогда для любого $\sigma \in \Omega_U^{-2n}$ имеем

$$\sigma = \sum_{\|\omega\|=n} s_\omega(\sigma)\beta_\omega \quad \text{ и } \quad B = \Omega_U(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \dots].$$

Кроме того,

$$\alpha_i = \begin{cases} e_i \cdot \beta_i + (B^+)^2 & \text{для } i \neq p^k - 1, \\ pe_i \cdot \beta_i + (B^+)^2 & \text{для } i = p^k - 1, \end{cases}$$

где $e_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ – обратимый элемент (единица). Таким образом, для всех разбиений $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, кратных $p-1$, коэффициент при β_ω в разложении σ равен

$$s_\omega(\sigma) = \sum_{\omega' : \omega' \supset \omega} r_{\omega'} s_\omega(\alpha_{\omega'}), \tag{9}$$

где $\omega' \supset \omega$ означает, что ω является измельчением разбиения ω'. Этот коэффициент делится на p. Действительно, если разбиение $\omega' = \sum_i k_i' \cdot (i)$ кратно $p-1$ и не p-адическое, то $r_{\omega'}$ делится на p, так как $\sigma \in \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ (см. выше), а если среди i таких, что $k_i' \neq 0$, есть числа вида $p^k - 1$, то $\alpha_{\omega'} \in p\Omega_U(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, т.е. $s_\omega(\alpha_{\omega'})$ делится на p.

Достаточность. Так как все K-характеристические числа σ лежат в $\mathbb{Z}_{(p)}$, по теореме Стонга–Хаттори (см. [7]) $\sigma \in \Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Пусть, кроме того, для любого разбиения $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, $\|\omega\| = n$, кратного $p-1$, число $s_\omega(\sigma)$ делится на p.

Рассмотрим построенную выше систему $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ образующих $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Для того чтобы доказать, что $\sigma \in \widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, необходимо доказать, что для любого не p-адического разбиения $\omega = \sum_i k_i \cdot (i)$, кратного $p-1$, коэффициент r_ω в разложении (8) делится на p. Пусть ω – такое разбиение. Перепишем соотношение (9) в виде

$$s_\omega(\sigma) = r_\omega s_\omega(\alpha_\omega) + \sum_{\omega' \supset \omega, \omega' \neq \omega} r_{\omega'} s_\omega(\alpha_{\omega'}). \tag{10}$$

По индукции для любого не p-адического, кратного $p-1$ разбиения $\omega' \supset \omega$, $\omega' \neq \omega$, $\|\omega'\| = m(p-1)$, имеем, что $r_{\omega'}$ делится на p. Если же в разбиении $\omega' = \sum_i k_i' \cdot (i)$ найдется $k_i' = p^k - 1$, то $s_\omega(\alpha_{\omega'})$ делится на p. Поэтому второе слагаемое в правой части (10) делится на p. По предположению $s_\omega(\sigma)$ также делится на p, а $s_\omega(\alpha_\omega)$ не делится на p, так как при нашем выборе ω имеем $\alpha_\omega = e \cdot \beta_\omega + \cdots$, где $e \in \mathbb{Z}_{(p)}$ – обратимый элемент. Поэтому из (10) следует, что r_ω делится на p. Теорема доказана.

Следствие 2. *Элемент $\sigma \in \Omega_U$ является классом кобордизма многообразия с действием $\mathbb{Z}/p$ с неподвижными многообразиями с тривиальными нормальными расслоениями тогда и только тогда, когда для всех разбиений ω, кратных $p-1$, когомологические числа $s_\omega(\sigma)$, $\|\omega\| = n$, делятся на p.*

Следствие 3. *В каждом классе кобордизма многообразий M^n, $n \leqslant 4p-6$, содержатся многообразия, несущие простое действие $\mathbb{Z}/p$.*

В размерности $n = 4p-4$ уже имеется многообразие (например, $\mathbb{CP}^{2p-2}$), в классе кобордизма которого не содержатся многообразия с простым действием $\mathbb{Z}/p$.

В работе Коннера и Флойда [1] методами, не использующими технику формальных групп, показано, что класс кобордизма $\sigma \in \Omega_U$ содержит многообразие с *сильно* простым действием $\mathbb{Z}/p$ тогда и только тогда, когда *все* характеристические числа $s_\omega(\sigma)$ делятся на p. Точнее, множество классов кобордизма, содержащих многообразия с сильно простым действием $\mathbb{Z}/p$, совпадает с Ω_U-модулем, натянутым на систему образующих $Y^0 = p, Y^1, Y^2, \dots$, где $Y^i \in \Omega_U^{p^i-1}$ – так называемые *многообразия Милнора*, однозначно определяемые условиями: $s_{p^i-1}(Y^i) = p$, $s_\omega(Y^i)$ делятся на p при любом ω. Если вместо Ω_U-модулей рассматривать $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модули (этого вполне достаточно для описания множества классов кобордизма в терминах характеристических чисел), то в качестве представителей Y^i можно взять элементы $\alpha^{(p)}_{p^i-1}$ из следствия 1. Отсюда становится ясно, каким образом $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модуль $\Omega_U\langle p, Y^1, Y^2, \dots\rangle \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, изучавшийся Коннером и Флойдом, вложен в $\Omega_U \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$-модуль $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, изученный нами (система образующих модуля Коннера и Флойда является подсистемой образующих модуля $\widetilde{\Lambda}_p(1) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$).

Заметим, наконец, что если некоторый класс $\sigma \in \Omega_U$ содержит представителя M, несущего сильно простое действие $\mathbb{Z}/p$, то необязательно любое простое действие $\mathbb{Z}/p$ на M будет сильно простым. Действительно, рассмотрим $M_1 = \mathbb{CP}^{p-1}$ с действием образующей $\rho(z_1 : \dots : z_p) = (z_1 : \rho z_2 : \dots : \rho^{p-1} z_p)$ (это действие с p неподвижными точками является сильно простым действием) и $M_2 = \mathbb{CP}^1$, $\rho(z_1 : z_2) = (z_1 : \rho z_2)$ (это простое действие с двумя неподвижными точками не является сильно простым). Тогда на $M = M_1 \times M_2$ имеется два простых действия $\mathbb{Z}/p$: $\rho(a,b) = (\rho a, b)$ и $\rho(a,b) = (a, \rho b)$, $a \in \mathbb{CP}^{p-1}$, $b \in \mathbb{CP}^1$, первое из которых является сильно простым, а второе – нет.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. В.М. Бухштаберу за полезные рекомендации и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Коннер П., Флойд Э. Гладкие периодические отображения. М.: Мир, 1969.
[2] Новиков С.П. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 855–951.
[3] Бухштабер В.М., Новиков С.П. Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса // Матем. сб. 1971. Т. 84(126). С. 81–118.
[4] Каспаров Г.Г. Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. С. 735–747.
[5] Новиков С.П. Операторы Адамса и неподвижные точки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. С. 1245–1263.
[6] Бухштабер В.М. Характер Чженя–Дольда в теории кобордизмов. I // Матем. сб. 1970. Т. 83(125). С. 575–595.
[7] Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: `tpanov@nw.math.msu.su`

Поступило
23.10.97

\$.tmp \$.tex

\$