Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях

А. Е. Миронов, Т. Е. Панов

Понятие гамильтоновой минимальности (*H-минимальности*) для лагранжевых подмногообразий является симплектическим аналогом минимальности в римановой геометрии. Лагранжево погружение называется H-минимальным, если вариации его объема вдоль всех гамильтоновых векторных полей равны нулю. Это понятие было введено в работе О [1] в связи со знаменитой *гипотезой Арнольда* о числе неподвижных точек гамильтонова симплектоморфизма.

В работах [2] и [3] авторами было введено и изучено семейство H-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^m$, происходящих из пересечений вещественных квадрик. Здесь мы обобщаем эту конструкцию, определяя H-минимальные подмногообразия в торических многообразиях.

Начальными данными является пересечение $m-n$ эрмитовых квадрик в $\mathbb{C}^m$:

$$\mathscr{Z}=\biggl\{\boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{C}^m\colon \sum_{k=1}^{m}\gamma_{jk}|z_k|^2=\delta_j \text{ для } j=1,\dots,m-n\biggr\}. \qquad (1)$$

Мы предполагаем, что это пересечение непусто, невырождено и рационально; эти условия выражаются в терминах векторов-коэффициентов $\gamma_k=(\gamma_{1k},\dots,\gamma_{m-n,k})^t\in\mathbb{R}^{m-n}$ следующим образом:

a) $\delta\in\mathbb{R}_{\geqslant}\langle\gamma_1,\dots,\gamma_m\rangle$ (т. е. δ лежит в конусе, порожденном $\gamma_1,\dots,\gamma_m$);

b) если $\delta\in\mathbb{R}_{\geqslant}\langle\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_p}\rangle$, то $p\geqslant m-n$;

c) векторы $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ порождают решетку L полного ранга в $\mathbb{R}^{m-n}$.

При этих условиях $\mathscr{Z}$ является гладким $(m+n)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^m$, а

$$T_\Gamma=\bigl\{\bigl(e^{2\pi i\langle\gamma_1,\varphi\rangle},\dots,e^{2\pi i\langle\gamma_m,\varphi\rangle}\bigr),\ \varphi\in\mathbb{R}^{m-n}\bigr\}=\mathbb{R}^{m-n}/L^*$$

является $(m-n)$-мерным тором. Определим также

$$D_\Gamma=(\tfrac12L^*)/L^*\cong(\mathbb{Z}_2)^{m-n}.$$

Заметим, что D_Γ канонически вкладывается в качестве подгруппы в T_Γ.

Пусть $\mathscr{R}\subset\mathscr{Z}$ – подмножество вещественных точек:

$$\mathscr{R}=\biggl\{\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_m)\in\mathbb{R}^m\colon \sum_{k=1}^{m}\gamma_{jk}u_k^2=\delta_j \text{ для } j=1,\dots,m-n\biggr\}.$$

Мы "разнесем" подмножество $\mathscr{R}$ действием тора T_Γ, т. е. рассмотрим множество T_Γ-орбит, проходящих через $\mathscr{R}$. Более точно, рассмотрим отображение

$$j\colon\mathscr{R}\times T_\Gamma\longrightarrow\mathbb{C}^m,\qquad (\boldsymbol{u},\varphi)\mapsto\boldsymbol{u}\cdot\varphi=\bigl(u_1e^{2\pi i\langle\gamma_1,\varphi\rangle},\dots,u_me^{2\pi i\langle\gamma_m,\varphi\rangle}\bigr)$$

и заметим, что $j(\mathscr{R}\times T_\Gamma)\subset\mathscr{Z}$. Группа D_Γ диагонально действует на $\mathscr{R}_\Gamma\times T_\Gamma$; это действие свободно, будучи свободным на втором сомножителе. Факторпространство

$$N=\mathscr{R}\times_{D_\Gamma}T_\Gamma$$

является m-мерным многообразием.

Теорема 1 [2]. *Отображение $j\colon\mathscr{R}\times T_\Gamma\to\mathbb{C}^m$ индуцирует H-минимальное лагранжево погружение $i\colon N\looparrowright\mathbb{C}^m$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-92104-Я), фонда "Династия" и гранта 2010-220-01-077 Правительства РФ. Первый автор поддержан также грантами Президента РФ МД-5134.2012.1 и НШ-544.2012.1. Второй автор поддержан также грантами Президента РФ МД-111.2013.1 и НШ-4995-2012.1 и грантом РФФИ 11-01-00694.

DOI: 10.4213/rm9516

Пересечение квадрик (1) инвариантно под действием стандартного тора $\mathbb{T}^m \subset \mathbb{C}^m$. Факторпространство $\mathscr{Z}/\mathbb{T}^m$ отождествляется с множеством неотрицательных решений системы линейных уравнений $\sum_{k=1}^m \gamma_k y_k = \delta$. Это множество описывается выпуклым n-мерным полиэдром

$$P = \bigl\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i \geqslant 0 \text{ для } i = 1, \dots, m\bigr\}, \tag{2}$$

где $(b_1, \dots, b_m)$ – произвольное решение, а система векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ транспонирована к базису решений однородной системы $\sum_{k=1}^m \gamma_k y_k = \mathbf{0}$. Мы называем P *ассоциированным полиэдром* системы квадрик (1).

Пусть N – решетка ранга n, порожденная векторами $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$. Полиэдр (2) называется *дельзантовым*, если для любой вершины $\boldsymbol{x} \in P$ векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_k}$, нормальные к гиперграням, сходящимся в вершине $\boldsymbol{x}$, образуют базис решетки N.

Теорема 2 [3]. *Погружение $i \colon N \looparrowright \mathbb{C}^m$ является вложением H-минимального лагранжева подмногообразия тогда и только тогда, когда ассоциированный полиэдр P дельзантов.*

Теперь рассмотрим две системы квадрик

$$\mathscr{Z}_\Gamma = \biggl\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m \colon \sum\nolimits_{k=1}^m \gamma_k |z_k|^2 = \boldsymbol{c}\biggr\}, \qquad \mathscr{Z}_\Delta = \biggl\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m \colon \sum\nolimits_{k=1}^m \delta_k |z_k|^2 = \boldsymbol{d}\biggr\},$$

$\gamma_k, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{m-n}$, $\delta_k, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{m-\ell}$, такие, что множества $\mathscr{Z}_\Gamma$, $\mathscr{Z}_\Delta$ *и* $\mathscr{Z}_\Gamma \cap \mathscr{Z}_\Delta$ удовлетворяют условиям a)–c) выше. Предположим также, что полиэдры, ассоциированные с $\mathscr{Z}_\Gamma$, $\mathscr{Z}_\Delta$ и $\mathscr{Z}_\Gamma \cap \mathscr{Z}_\Delta$, дельзантовы.

Определим вещественные пересечения квадрик $\mathscr{R}_\Gamma$, $\mathscr{R}_\Delta$, торы $T_\Gamma \cong \mathbb{T}^{m-n}$, $T_\Delta \cong \mathbb{T}^{m-\ell}$ и группы $D_\Gamma \cong \mathbb{Z}_2^{m-n}$, $D_\Delta \cong \mathbb{Z}_2^{m-\ell}$ как описано выше.

Рассмотрим торическое многообразие V, получаемое симплектической редукцией пространства $\mathbb{C}^m$ по действию тора, соответствующего первой системе квадрик: $V = \mathscr{Z}_\Gamma / T_\Gamma$. Это – кэлерово многообразие вещественной размерности $2n$. Факторпространство $\mathscr{R}_\Gamma / D_\Gamma$ является множеством вещественных точек в V (вещественным торическим многообразием); оно имеет размерность n. Рассмотрим подмножество в $\mathscr{R}_\Gamma / D_\Gamma$, задаваемое второй системой квадрик:

$$\mathscr{S} = (\mathscr{R}_\Gamma \cap \mathscr{R}_\Delta)/D_\Gamma,$$

тогда $\dim \mathscr{S} = n + \ell - m$. Наконец, определим n-мерное подмногообразие в V:

$$N = \mathscr{S} \times_{D_\Delta} T_\Delta.$$

Теорема 3. *N является H-минимальным лагранжевым подмногообразием в V.*

Доказательство. Пусть $\widehat{V}$ – результат симплектической редукции многообразия V по действию тора, соответствующего второй системе квадрик, т. е. $\widehat{V} = (V \cap \mathscr{Z}_\Delta)/T_\Delta = (\mathscr{Z}_\Gamma \cap \mathscr{Z}_\Delta)/(T_\Gamma \times T_\Delta)$. Это – торическое многообразие размерности $2(n + \ell - m)$. Его подмногообразие вещественных точек

$$\widehat{N} = N/T_\Delta = (\mathscr{R}_\Gamma \cap \mathscr{R}_\Delta)/(D_\Gamma \times D_\Delta) \hookrightarrow (\mathscr{Z}_\Gamma \cap \mathscr{Z}_\Delta)/(T_\Gamma \times T_\Delta) = \widehat{V}$$

является множеством неподвижных точек комплексного сопряжения, т. е. вполне геодезическим подмногообразием. В частности, $\widehat{N}$ – минимальное подмногообразие в $\widehat{V}$. Согласно [4; следствие 2.7], N является H-минимальным подмногообразием в V.

Список литературы

[**1**] Yong-Geun Oh, *Math. Z.*, **212**:1 (1993), 175–192. [**2**] А. Е. Миронов, *Матем. сб.*, **195**:1 (2004), 89–102. [**3**] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:1 (2013), 47-61. [**4**] Yuxin Dong, *Nonlinear Anal.*, **67**:3 (2007), 865–882.

А. Е. Миронов (A. E. Mironov)
Институт математики им. С. Л. Соболева
E-mail: mironov@math.nsc.ru

Т. Е. Панов (T. E. Panov)
МГУ им. М. В. Ломоносова;
ИППИ РАН; ИТЭФ
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
24.01.2013