Функциональный анализ и его приложения
2013, т. 47, вып. 1, с. 47–61

УДК 514.76+514.16

Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения*

© 2013. А. Е. Миронов, Т. Е. Панов

Мы изучаем топологию гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий N в $\mathbb{C}^m$, построенных по пересечениям вещественных квадрик в работе первого автора. Эта конструкция связывается при помощи критерия вложения с известной конструкцией Дельзанта гамильтоновых торических многообразий. Устанавливаются следующие топологические свойства многообразий N: каждое N вкладывается в качестве подмногообразия в соответствующее момент-угол-многообразие $\mathscr{Z}$ и каждое N является тотальным пространством двух расслоений, над тором T^{m-n} со слоем вещественное момент-угол-многообразие $\mathscr{R}$ и над факторпространством многообразия $\mathscr{R}$ по действию конечной группы со слоем тор. Эти свойства используются для построения новых примеров гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий с достаточно сложной топологией.

§1. Введение

В данной работе мы изучаем топологию класса гамильтоново-минимальных (H-минимальных) лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^m$, получаемых из пересечений вещественных квадрик.

Пусть M — кэлерово многообразие. Лагранжево подмногообразие $N \subset M$ называется *H-минимальным*, если его объем принимает критическое значение относительно гамильтоновых деформаций. Простейшим примером H-минимального лагранжева подмногообразия является клиффордов тор [26]

$$S^1(r_1) \times \cdots \times S^1(r_m) \subset \mathbb{C}^m,$$

где $S^1(r_k) \subset \mathbb{C}$ — окружность радиуса r_k. Другие H-минимальные лагранжевы торы в $\mathbb{C}^2$ были построены в [9], [17], пример H-минимального лагранжева погружения бутылки Клейна был дан в [18], другие примеры в высоких размерностях были получены в [1]. В работе [23] первым автором был предложен универсальный метод построения H-минимальных лагранжевых погружений $N \looparrowright \mathbb{C}^m$ на основе пересечений вещественных квадрик $\mathscr{R}$. При помощи этого метода строятся H-минимальные лагранжевы погружения в $\mathbb{C}^m$ бутылки Клейна $\mathscr{K}^m$, $S^{m-1} \times S^1$, $\mathscr{K}^{m-1} \times S^1$ и других многообразий.

В этой работе мы получаем эффективные критерии того, что отображение $N \to \mathbb{C}^m$ является вложением (теоремы 4.1 и 4.5). Для этого мы исследуем взаимосвязи между пересечениями квадрик, простыми многогранниками и момент-угол-многообразиями, используя методы *торической топологии* ([7], [27]). Ока-

*Исследования первого автора поддержаны грантами Президента РФ МД-5134.2012.1 и НШ-544.2012.1. Исследования второго автора поддержаны грантами Президента РФ МД-111.2013.1 и НШ-4995-2012.1 и грантом РФФИ 11-01-00694. Исследования обоих авторов поддержаны грантом РФФИ 12-01-92104-ЯФ, грантами фонда «Династия» и грантом 2010-220-01-077 Правительства РФ.

зывается, что $N \to \mathbb{C}^m$ является H-минимальным лагранжевым вложением тогда и только тогда, когда многогранник, соответствующий пересечению квадрик, *дельзантов*, что устанавливает взаимосвязь нашей конструкции с известной конструкцией Дельзанта [12] гамильтоновых торических многообразий; в этом случае пересечение квадрик является множеством уровня для отображения моментов, используемого в конструкции торических многообразий на основе симплектической редукции (см., например, [7, §8.2]). В предложении 5.1 мы показываем, что N вкладывается в момент-угол-многообразие $\mathscr{Z}$ и что N является тотальным пространством двух различных расслоений: над тором со слоем пересечение квадрик $\mathscr{R}$ и главного расслоения со слоем тор над факторпространством многообразия $\mathscr{R}$ по действию конечной группы. Это факторпространство известно под названием *малого накрытия* над простым многогранником [11]. Мы также даем топологическую классификацию многообразий N в случае, когда $\mathscr{R}$ является пересечением двух квадрик (см. теорему 5.8).

Естественно задаться вопросом, какие замкнутые многообразия могут быть вложены в $\mathbb{C}^m$ в качестве лагранжевых подмногообразий. Имеются различные топологические ограничения на существование таких вложений. Например, многообразие M с $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$ не может быть вложено в качестве лагранжева подмногообразия в $\mathbb{C}^m$ [15]. Не существует лагранжевых вложений четномерной бутылки Клейна в $\mathbb{C}^{2m}$ [25] (в случае $m = 1$ см. также [31]). Наша конструкция дает широкий класс лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^m$ с достаточно сложной топологией. Например, имеется лагранжево подмногообразие в $\mathbb{C}^5$, которое является тотальным пространством расслоения над T^3 со слоем поверхность рода 5 (см. пример 5.9).

При помощи модификации конструкции H-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^m$ можно получить H-минимальные лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}P^{m-1}$, см. [23]. А именно, если N является H-минимальным лагранжевым конусом, то, взяв его пересечение с единичной сферой и профакторизовав по диагональному действию окружности, мы получаем H-минимальное лагранжево подмногообразие в $\mathbb{C}P^{m-1}$. При помощи этой процедуры может быть получен широкий класс новых явных примеров. Он включает H-минимальные лагранжевы погружения торов в $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^3$, описанные в [21], [22], [24]. Другие проективные примеры были получены в [8], [10] и [16]. Заметим, что, как и в случае $\mathbb{C}^m$, имеются топологические ограничения на лагранжевы вложения в $\mathbb{C}P^{m-1}$ (см., например, [4], [30]).

Другим важным свойством лагранжевых подмногообразий является гамильтонова стабильность. Согласно результату из [26], клиффордов тор является гамильтоново стабильным H-минимальным подмногообразием в $\mathbb{C}^m$. Другие примеры гамильтоново стабильных подмногообразий были получены в [2], [3]. Было бы интересно изучить свойство гамильтоновой стабильности для H-минимальных подмногообразий N, рассматриваемых в нашей работе.

Мы будем использовать следующие обозначения:

• $\mathbb{Z}^m$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$ — стандартная целочисленная решетка ранга m, стандартные вещественное и комплексное пространства соответственно;

• $\mathbb{T}^m = \{(e^{2\pi i\chi_1}, \dots, e^{2\pi i\chi_m}) \in \mathbb{C}^m\}$, где $(\chi_1, \dots, \chi_m) \in \mathbb{R}^m$, — стандартный m-мерный тор;

• $[m] = \{1, \dots, m\}$ — стандартное множество из m элементов;

• $\mathbb{Z}\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\rangle$ — множество целочисленных линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$;

• $\sigma\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\rangle$ — конус (множество неотрицательных $\mathbb{R}$-линейных комбинаций), порожденный векторами $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^m$;

• $\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geqslant 0$ для всех $i\}$ — стандартный положительный конус, т. е. конус, порожденный стандартным базисом.

Авторы благодарны С. Ю. Немировскому за полезные обсуждения известных примеров лагранжевых подмногообразий и результатов о лагранжевой невложимости. Мы благодарны рецензенту за ссылку на работу Донга [13] и предложение более детально исследовать аспекты нашей конструкции, связанные с симплектической редукцией.

§ 2. Пересечения квадрик

Пусть дан набор из m векторов

$$\Gamma = \{\gamma_k = (\gamma_{1,k}, \dots, \gamma_{m-n,k}) \in \mathbb{R}^{m-n},\ 1 \leqslant k \leqslant m\}$$

и вектор $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}$. Рассмотрим следующие подмножества в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно, задаваемые как пересечения $m-n$ квадрик:

$$\mathscr{R}_\Gamma = \biggl\{\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m \colon \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} u_k^2 = c_j \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant m-n\biggr\}, \tag{2.1}$$

$$\mathscr{Z}_\Gamma = \biggl\{\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} |z_k|^2 = c_j \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant m-n\biggr\}. \tag{2.2}$$

Мы будем рассматривать эти пересечения квадрик с точностью до *линейной эквивалентности*, что соответствует применению невырожденного линейного преобразования пространства $\mathbb{R}^{m-n}$ к Γ и $\boldsymbol{c}$. Очевидно, что такая линейная эквивалентность не изменяет множества $\mathscr{R}_\Gamma$ и $\mathscr{Z}_\Gamma$.

Следующее предложение (в несколько ином виде) появлялось в работе [20], а приводимое нами доказательство является модификацией рассуждения из [5, лемма 0.3]:

Предложение 2.1. *Пересечения квадрик* (2.1) *и* (2.2) *являются непустыми и невырожденными тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия*:

(a) $\boldsymbol{c} \in \sigma\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m\rangle$;

(b) *если* $\boldsymbol{c} \in \sigma\langle \gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_k}\rangle$, *то* $k \geqslant m-n$.

При этих условиях $\mathscr{R}_\Gamma$ *и* $\mathscr{Z}_\Gamma$ *являются гладкими подмногообразиями в* $\mathbb{R}^m$ *и* $\mathbb{C}^m$ *размерности* n *и* $m+n$ *соответственно*, *а векторы* $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ *порождают* $\mathbb{R}^{m-n}$.

Доказательство. Мы приведем доказательство в случае $\mathscr{R}_\Gamma$; случай $\mathscr{Z}_\Gamma$ рассматривается аналогично. Предположим, что выполнены условия (a) и (b). Тогда из (a) вытекает, что $\mathscr{R}_\Gamma \neq \varnothing$. Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathscr{R}_\Gamma$. Тогда ранг матрицы градиентов для (2.1) в точке $\boldsymbol{u}$ равен

$$\operatorname{rk}\{\gamma_k \colon k \notin I_{\boldsymbol{u}}\}.$$

Имеем $\boldsymbol{c} \in \sigma\langle \gamma_k \colon k \notin I_{\boldsymbol{u}}\rangle$. По теореме Каратеодори вектор $\boldsymbol{c}$ лежит в конусе, порожденном некоторыми $m-n$ из этих векторов, т. е. $\boldsymbol{c} \in \sigma\langle \gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_{m-n}}\rangle$, где

$k_i \notin I_{\boldsymbol{u}}$ для $i = 1, \dots, m-n$. Кроме того, векторы $\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_{m-n}}$ линейно независимы (иначе, снова по теореме Каратеодори, получаем противоречие с (b)). Это означает, что $m-n$ градиентов квадрик системы (2.1) линейно независимы в точке $\boldsymbol{u}$, а значит, $\mathscr{R}_\Gamma$ гладко и n-мерно.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что если условие (b) не выполнено, т. е. $\boldsymbol{c}$ лежит в конусе, порожденном некоторыми $m-n-1$ векторами из $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, то найдется точка $\boldsymbol{u} \in \mathscr{R}_\Gamma$, в которой по крайней мере $n+1$ координат обращаются в нуль. Тогда градиенты квадрик системы (2.1) не могут быть линейно независимы в $\boldsymbol{u}$. $\square$

Тор $\mathbb{T}^m$ действует на $\mathscr{Z}_\Gamma$ покоординатно. Аналогично, «вещественный тор» $(\mathbb{Z}/2)^m \subset \mathbb{T}^m$ (соответствующий $(\chi_1, \dots, \chi_m) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^m$) действует на $\mathscr{R}_\Gamma$.

Далее мы будем предполагать, что выполнены условия из предложения 2.1. Кроме того, предположим, что

(c) векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождают некоторую решетку L в $\mathbb{R}^{m-n}$.

Очевидно, что условия (a)–(c) инвариантны относительно линейной эквивалентности. Из предложения 2.1 следует, что L имеет полный ранг, т. е. $L \cong \mathbb{Z}^{m-n}$. Заменив, если необходимо, набор Γ на линейно эквивалентный, мы можем считать, что L является стандартной решеткой $\mathbb{Z}^{m-n} \subset \mathbb{R}^{m-n}$. Пусть

$$L^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R}^{m-n} \colon \langle \lambda^*, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \lambda \in L\}$$

— двойственная решетка.

Векторы γ_i задают $(m-n)$-мерный тор

$$T_\Gamma = \{(e^{2\pi i \langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, e^{2\pi i \langle \gamma_m, \varphi \rangle}) \in \mathbb{T}^m\}, \quad \text{где } \varphi \in \mathbb{R}^{m-n},$$

решетка характеров которого изоморфна L. Тор T_Γ отождествляется с факторгруппой $\mathbb{R}^{m-n}/L^*$, мы будем задавать его элементы векторами $\varphi \in \mathbb{R}^{m-n}$. Положим

$$D_\Gamma = \tfrac{1}{2} L^*/L^* \cong (\mathbb{Z}/2)^{m-n}.$$

Заметим, что D_Γ канонически вкладывается как подгруппа в T_Γ.

Для каждой точки $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathscr{Z}_\Gamma$ определим подрешетку

$$L_{\boldsymbol{z}} = \mathbb{Z}\langle \gamma_k \colon z_k \neq 0 \rangle \subset L = \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle.$$

Следующая лемма доказывается так же, как предложение 2.1.

Лемма 2.2. *Для любой точки $\boldsymbol{z} \in \mathscr{Z}_\Gamma$ подрешетка $L_{\boldsymbol{z}}$ имеет полный ранг $m-n$, и то же верно для любой точки $\boldsymbol{u} \in \mathscr{R}_\Gamma$.*

Напомним, что действие группы G на пространстве X называется *почти свободным*, если все стационарные подгруппы конечны.

Предложение 2.3. *Группа T_Γ действует на $\mathscr{Z}_\Gamma$ почти свободно. Более того, стационарная подгруппа точки $\boldsymbol{z} \in \mathscr{Z}_\Gamma$ есть $L_{\boldsymbol{z}}^*/L^*$.*

Доказательство. Элемент $(e^{2\pi i \langle \gamma_1, \varphi \rangle}, \dots, e^{2\pi i \langle \gamma_m, \varphi \rangle}) \in T_\Gamma$ оставляет неподвижной данную точку $\boldsymbol{z} \in \mathscr{Z}_\Gamma$ тогда и только тогда, когда $e^{2\pi i \langle \gamma_k, \varphi \rangle} = 1$ при $z_k \neq 0$. Это условие эквивалентно тому, что $\langle \gamma_k, \varphi \rangle \in \mathbb{Z}$ при $z_k \neq 0$, т. е. $\varphi \in L_{\boldsymbol{z}}^*$. Так как $\varphi \in L^*$ отображается в $1 \in T_\Gamma$, стационарная подгруппа точки $\boldsymbol{z}$ действительно отождествляется с $L_{\boldsymbol{z}}^*/L^*$. Эта группа конечна согласно лемме 2.2. $\square$

§3. Лагранжевы погружения

Здесь мы даем краткий обзор конструкции из [23], задающей H-минимальное лагранжево погружение в $\mathbb{C}^m$ по любому пересечению квадрик $\mathscr{R}_\Gamma$, удовлетворяющему условиям (a)–(c) из предыдущего параграфа.

Пусть M — симплектическое $2n$-мерное многообразие с симплектической формой ω. Погружение $i\colon N \looparrowright M$ многообразия размерности n называется *лагранжевым*, если $i^*(\omega) = 0$. Если i является вложением, то его образ называется *лагранжевым подмногообразием* в M. Векторное поле ξ на M называется *гамильтоновым*, если 1-форма $\omega(\,\cdot\,,\xi)$ является точной.

Пусть на M выбрана согласованная риманова метрика. Лагранжево погружение $i\colon N \looparrowright M$ называется *гамильтоново минимальным* (*H-минимальным*), если вариации объема образа $i(N)$ вдоль всех гамильтоновых векторных полей с компактным носителем равны нулю, т. е.

$$\frac{d}{dt}\operatorname{vol}(i_t(N))\big|_{t=0} = 0,$$

где $i_0(N) = i(N)$, $i_t(N)$ — деформация образа $i(N)$ вдоль гамильтонова векторного поля, а $\operatorname{vol}(i_t(N))$ — объем деформированной части $i_t(N)$. Погружение называется *минимальным*, если вариации объема образа $i(N)$ вдоль *всех* векторных полей равны нулю.

Снабдим $\mathbb{C}^m$ стандартной эрмитовой метрикой $\sum_{k=1}^m d\bar{z}_k \otimes dz_k$. Ее вещественная часть является стандартной римановой метрикой, а мнимая часть задает стандартную симплектическую форму $\frac{i}{2}\sum_{k=1}^m dz_k \wedge d\bar{z}_k$ на $\mathbb{C}^m$.

Используя обозначения из предыдущего параграфа, рассмотрим отображение

$$j\colon \mathscr{R}_\Gamma \times T_\Gamma \to \mathbb{C}^m, \qquad (\boldsymbol{u},\varphi) \mapsto \boldsymbol{u}\cdot\varphi = (u_1 e^{2\pi i\langle\gamma_1,\varphi\rangle},\dots,u_m e^{2\pi i\langle\gamma_m,\varphi\rangle}).$$

Заметим, что $j(\mathscr{R}_\Gamma \times T_\Gamma) \subset \mathscr{Z}_\Gamma$. Рассмотрим диагональное действие группы D_Γ на $\mathscr{R}_\Gamma \times T_\Gamma$; это действие свободно, так как оно свободно на втором сомножителе. Факторпространство

$$N_\Gamma = \mathscr{R}_\Gamma \times_{D_\Gamma} T_\Gamma,$$

является m-мерным многообразием.

Лемма 3.1. (1) *Отображение $j\colon \mathscr{R}_\Gamma \times T_\Gamma \to \mathbb{C}^m$ индуцирует погружение $i_\Gamma\colon N_\Gamma \looparrowright \mathbb{C}^m$.*

(2) *Погружение i_Γ является вложением тогда и только тогда, когда $L_{\boldsymbol{u}} = L$ для всех $\boldsymbol{u} \in \mathscr{R}_\Gamma$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathscr{R}_\Gamma$, $\varphi \in T_\Gamma$ и $g \in D_\Gamma$. Тогда мы имеем $\boldsymbol{u}\cdot g \in \mathscr{R}_\Gamma$ и $j(\boldsymbol{u}\cdot g, g\varphi) = \boldsymbol{u}\cdot g^2\varphi = \boldsymbol{u}\cdot\varphi = j(\boldsymbol{u},\varphi)$. Следовательно, отображение j постоянно на D_Γ-орбитах, а значит, оно индуцирует отображение факторпространства $N_\Gamma = (\mathscr{R}_\Gamma \times T_\Gamma)/D_\Gamma$, которое мы обозначим через i_Γ.

Предположим, что $j(\boldsymbol{u},\varphi) = j(\boldsymbol{u}',\varphi')$. Тогда $L_{\boldsymbol{u}} = L_{\boldsymbol{u}'}$ и

$$u_k e^{2\pi i\langle\gamma_k,\varphi\rangle} = u'_k e^{2\pi i\langle\gamma_k,\varphi'\rangle} \quad \text{при } k = 1,\dots,m. \tag{3.1}$$

Так как координаты u_k и u'_k являются вещественными, отсюда следует, что $e^{2\pi i\langle\gamma_k,\varphi-\varphi'\rangle} = \pm 1$ при $u_k \neq 0$ или, эквивалентно, $\varphi - \varphi' \in \frac{1}{2}L^*_{\boldsymbol{u}}/L^*$. Другими словами, из соотношения (3.1) следует, что $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}\cdot g$ и $\varphi' = g\varphi$ для некоторого элемента $g \in \frac{1}{2}L^*_{\boldsymbol{u}}/L^*$. Последняя группа является конечной по лемме 2.3, а это означает, что прообраз любой точки пространства $\mathbb{C}^m$ при отображении j состоит из конечного числа точек. Если $L_{\boldsymbol{u}} = L$, то $\frac{1}{2}L^*_{\boldsymbol{u}}/L^* = \frac{1}{2}L^*/L^* = D_\Gamma$, а значит, пары $(\boldsymbol{u},\varphi)$ и $(\boldsymbol{u}',\varphi')$ представляют одну точку многообразия N. Отсюда следует второе утверждение. Для доказательства первого утверждения заметим, что соотношение $L_{\boldsymbol{u}} = L$ выполнено для точки $\boldsymbol{u}$ общего положения (со всеми ненулевыми координатами). □

Теорема 3.2 ([23, теорема 1]). *Погружение $i_\Gamma\colon N_\Gamma \looparrowright \mathbb{C}^m$ является H-минимальным лагранжевым. Более того, если $\sum_{k=1}^m \gamma_k = 0$, то i_Γ является минимальным лагранжевым погружением.*

Минимальные погружения, соответствующие одной квадрике, рассматривались ранее в [19].

§ 4. Лагранжевы вложения и момент-угол-многообразия

Вначале мы сведем все наблюдения из предыдущих параграфов в следующем критерии того, что N_Γ вкладывается как лагранжево подмногообразие в $\mathbb{C}^m$.

Теорема 4.1. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) $i_\Gamma\colon N_\Gamma \to \mathbb{C}^m$ *является вложением H-минимального лагранжева подмногообразия*;

(2) $L_{\boldsymbol{u}} = L$ *для всех* $\boldsymbol{u} \in \mathscr{R}_\Gamma$;

(3) T_Γ *действует на* $\mathscr{Z}_\Gamma$ *свободно.*

Доказательство. Эквивалентность (1) ⇔ (2) вытекает из леммы 3.1 и теоремы 3.2. Эквивалентность (2) ⇔ (3) следует из предложения 2.3. □

Этот результат позволяет явно строить новые семейства H-минимальных лагранжевых подмногообразий при условии наличия эффективного метода получения невырожденных пересечений квадрик $\mathscr{R}_\Gamma$, удовлетворяющих условиям (2) или (3) теоремы 4.1. Торическая топология предоставляет такой метод, который мы описываем ниже, следуя [5] и [27].

Факторпространство многообразия $\mathscr{R}_\Gamma$ по действию $(\mathbb{Z}/2)^m$ (или факторпространство многообразия $\mathscr{Z}_\Gamma$ по действию $\mathbb{T}^m$) отождествляется с множеством P неотрицательных решений следующей системы из $m-n$ линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k = \boldsymbol{c}. \tag{4.1}$$

Это множество может быть описано как выпуклый полиэдр, получаемый пересечением m полупространств в $\mathbb{R}^n$,

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i \geqslant 0 \text{ при } i = 1,\dots,m\}, \tag{4.2}$$

где $(b_1,\dots,b_m)$ — произвольное решение системы (4.1), а векторы $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ образуют матрицу, транспонированную к матрице базиса решений однородной системы $\sum_{k=1}^m \gamma_k y_k = \mathbf{0}$. Заметим, что P может быть неограниченным; на самом деле P ограничен тогда и только тогда когда $\mathscr{R}_\Gamma$ ограничено (компактно). Ограниченные полиэдры называются *многогранниками*.

Предложение 4.2. *Пересечение квадрик $\mathscr{R}_\Gamma$ ограничено тогда и только тогда, когда оно линейно эквивалентно пересечению следующего вида*:

$$\mathscr{R}_\Gamma = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \gamma_{11}u_1^2 + \dots + \gamma_{1m}u_m^2 = c_1,\\ \gamma_{j1}u_1^2 + \dots + \gamma_{jm}u_m^2 = 0 \text{ при } 2 \leqslant j \leqslant m-n\}, \qquad (4.3)$$

где $c_1 > 0$ *и* $\gamma_{1k} > 0$ *при всех* k.

Доказательство. Факторпространство многообразия $\mathscr{R}_\Gamma$ по действию $(\mathbb{Z}/2)^m$ представляет собой пересечение $(m-n)$-мерной аффинной плоскости L, задаваемой системой (4.1), с $\mathbb{R}^m_\geqslant$. Оно ограничено тогда и только тогда, когда $L_0 \cap \mathbb{R}^m_\geqslant = \{0\}$, где L_0 есть $(m-n)$-мерная плоскость, проходящая через 0 и параллельная L. Выберем гиперплоскость H_0, проходящую через 0 и отделяющую два выпуклых множества L_0 и $\mathbb{R}^m_\geqslant$, т. е. $L_0 \subset H_0$ и $H_0 \cap \mathbb{R}^m_\geqslant = \{0\}$. Пусть H — аффинная гиперплоскость, параллельная H_0 и содержащая L. Так как $L \subset H$, мы можем взять уравнение, задающее H, в качестве первого уравнения в (4.1). Из условий на H_0 вытекает, что $H \cap \mathbb{R}^m_\geqslant$ непусто и ограничено, т. е. $c_1 > 0$ и $\gamma_{1k} > 0$ для всех k. Теперь, вычитая первое уравнение из остальных уравнений в (4.1) с подходящими коэффициентами, получаем $c_j = 0$ при $2 \leqslant j \leqslant m-n$. □

Будем называть (4.2) *представлением* полиэдра P неравенствами. Эти неравенства содержат несколько больше информации, чем геометрическое множество P в силу следующих причин. Может оказаться, что некоторые из неравенств $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i \geqslant 0$ можно удалить из представления, не меняя множества P; мы будем называть такие неравенства *лишними*. Представление без лишних неравенств будем называть *минимальным*. Каждый полиэдр имеет единственное минимальное представление; однако для того, чтобы покрыть все невырожденные пересечения квадрик $\mathscr{R}_\Gamma$, необходимо также рассматривать представления с лишними неравенствами.

Скажем, что (4.2) является представлением *общего положения*, если полиэдр P является n-мерным, имеет хотя бы одну вершину и гиперплоскости, задаваемые уравнениями $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + b_i = 0$, находятся в общем положении в каждой вершине полиэдра P. Если P является многогранником, то существование представления общего положения означает, что P *простой*, т. е. в каждой его вершине сходятся в точности n гиперграней. Представление общего положения может содержать лишние неравенства, но для каждого такого неравенства пересечение соответствующей гиперплоскости с P пусто (т. е. неравенство является строгим для любого $\boldsymbol{x} \in P$).

Теорема 4.3 (см. [5, лемма 0.12] или [28, теорема 4.3])**.** *Пересечения квадрик* (2.1) *и* (2.2) *являются непустыми и невырожденными тогда и только тогда, когда* (4.2) *является представлением общего положения.*

Обратно, по представлению общего положения (4.2) некоторого полиэдра P можно восстановить пересечения квадрик $\mathscr{R}_\Gamma$ и $\mathscr{Z}_\Gamma$ следующим образом.

Конструкция 4.4 (момент-угол-многообразие [7, §6.1])**.** Рассмотрим аффинное отображение

$$i_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto (\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}\rangle + b_1, \dots, \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x}\rangle + b_m).$$

Оно является мономорфизмом на некоторую n-мерную плоскость в $\mathbb{R}^m$ (так как P имеет вершину), и $i_P(P)$ есть пересечение этой плоскости с $\mathbb{R}^m_\geqslant$.

Рассмотрим пространство $\mathscr{Z}_P$, определяемое из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m_{\geqslant} \end{array} \tag{4.4}$$

где $\mu(z_1,\dots,z_m)=(|z_1|^2,\dots,|z_m|^2)$. Последнее отображение можно рассматривать как проекцию на пространство орбит для покоординатного действия тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$. Следовательно, $\mathbb{T}^m$ действует на $\mathscr{Z}_P$ с пространством орбит P, а i_Z является $\mathbb{T}^m$-эквивариантным вложением.

Если (4.2) является представлением общего положения, то $\mathscr{Z}_P$ является гладким многообразием размерности $m+n$, называемым (*полиэдральным*) *момент-угол-многообразием*, соответствующим P.

Теперь мы можем задать n-мерную плоскость $i_P(\mathbb{R}^n)$ при помощи $m-n$ линейных уравнений в $\mathbb{R}^m$, как в (4.1). Заменяя каждое y_k на $|z_k|^2$, мы получаем представление многообразия $\mathscr{Z}_P$ в виде пересечения квадрик (2.2).

Если в (4.4) заменить $\mathbb{C}^m$ на $\mathbb{R}^m$, то мы получим *вещественное момент-угол-многообразие* $\mathscr{R}_P$. Его можно задать пересечением квадрик (2.1).

Из предыдущей конструкции ясно, что векторы $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ порождают решетку L в $\mathbb{R}^{m-n}$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ в (4.2) порождают решетку Λ в $\mathbb{R}^n$. Соответствующие полиэдры P называются *рациональными*. Если P рационален, то определено отображение решеток

$$A_P\colon \Lambda^*\to\mathbb{Z}^m, \qquad \boldsymbol{x}\mapsto(\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}\rangle,\dots,\langle\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{x}\rangle). \tag{4.5}$$

Его сопряженное определяет отображение торов $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m\to\mathbb{R}^n/\Lambda$, ядро которого мы обозначим через T_P. Эта подгруппа превращается в T_Γ при отождествлении $\mathscr{Z}_P$ с $\mathscr{Z}_\Gamma$. Группа $D_P\cong(\mathbb{Z}/2)^{m-n}$ также определена. Используя $\mathscr{R}_P$, T_P и D_P, мы можем определить m-мерное многообразие N_P, как описано в §3.

Многообразия $\mathscr{R}_P$, $\mathscr{Z}_P$, N_P представляют те же самые геометрические объекты, что и $\mathscr{R}_\Gamma$, $\mathscr{Z}_\Gamma$, N_Γ, но в их определении используются различные начальные данные. Далее мы будем использовать индексы P или Γ в обозначениях этих многообразий, лишь если необходимо подчеркнуть их происхождение из полиэдров или квадрик. В остальных случаях будем использовать сокращенные обозначения $\mathscr{R}$, $\mathscr{Z}$, N.

Теперь мы можем переформулировать условия вложения из теоремы 4.1 в терминах P. Полиэдр (4.2) называется *дельзантовым*, если он рационален и для любого $\boldsymbol{x}\in P$ векторы $\boldsymbol{a}_{j_1},\dots,\boldsymbol{a}_{j_k}$, для которых $\langle\boldsymbol{a}_{j_l},\boldsymbol{x}\rangle+b_{j_l}=0$ при $1\leqslant l\leqslant k$, образуют часть базиса решетки $\Lambda=\mathbb{Z}\langle\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\rangle$. (Последнее условие достаточно проверять лишь для вершин $\boldsymbol{x}\in P$; в этом случае соответствующий набор из n векторов $\boldsymbol{a}_{j_1},\dots,\boldsymbol{a}_{j_n}$ должен составлять базис решетки Λ.) Название происходит из конструкции [12] гамильтоновых торических многообразий.

Теорема 4.5. *Отображение $N_P=\mathscr{R}_P\times_{D_P}T_P\to\mathbb{C}^m$ является вложением тогда и только тогда, когда полиэдр P является дельзантовым.*

Доказательство. Возьмем точку $\boldsymbol{u}\in\mathscr{R}_P$. Она проектируется на $\boldsymbol{x}\in P$, где $\langle\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{x}\rangle+b_i=u_i^2$ при $1\leqslant i\leqslant m$. Предположим, что в точности k из этих чисел обращаются в нуль. Пусть $\iota\colon\mathbb{Z}^{m-k}\to\mathbb{Z}^m$ — вложение координатной подрешетки, соответствующее ненулевым числам u_i, и пусть $\kappa\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^k$ — проекция. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \Lambda^* & & & & \\ & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle A_P} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{m-k} & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{\kappa} & \mathbb{Z}^k & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma} & & & & \\ & & & & L & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

в которой вертикальная и горизонтальная последовательности точны, отображение A_P задается формулой (4.5), а Γ переводит k-й базисный вектор из $\mathbb{Z}^m$ в γ_k. Тогда условие дельзантовости эквивалентно тому, что композиция $\kappa \cdot A_P$ сюръективна, а второе условие из теоремы 4.1 эквивалентно тому, что $\Gamma \cdot \iota$ сюръективно. Простой диаграммный поиск (см. также [27, теорема I.2]) показывает, что эти два условия эквивалентны. □

Замечание. Когда многогранник P является дельзантовым, момент-угол-многообразие $\mathscr{Z}_P$, задаваемое пересечением квадрик (2.2), совпадает с множеством уровня $\mu_P^{-1}(\boldsymbol{c})$ отображения моментов $\mu_P\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$, используемого в конструкции гамильтонова (или проективного) торического многообразия $M_P = \mu_P^{-1}(\boldsymbol{c})/T_P$ при помощи симплектической редукции (см., например, [7, §8.2]). Используя это наблюдение, результат об H-минимальности из теоремы 3.2 в случае дельзантова многогранника P можно также вывести из результата Донга [13, следствие 2.7].

В торической топологии возникают широкие классы явно описываемых дельзантовых многогранников. Простейшие примеры включают симплексы и кубы произвольной размерности. Легко видеть, что условие дельзантовости сохраняется при некоторых операциях над многогранниками, таких, как взятие произведения или срезка вершин или граней подходящими гиперплоскостями. Этого оказывается достаточно, чтобы показать, что многие важные семейства многогранников, такие, как *ассоциаэдры* (многогранники Сташева), *пермутаэдры* и общие *нестоэдры*, допускают дельзантовы реализации (см. [29] и [6]).

§5. Топология лагранжевых подмногообразий N

В предыдущем параграфе мы привели конструкцию H-минимального лагранжева подмногообразия в $\mathbb{C}^m$ по любому дельзантову многограннику P. Известно, что момент-угол-многообразия $\mathscr{Z}_P$ и $\mathscr{R}_P$, появляющиеся как промежуточные объекты в этой конструкции, имеют весьма сложную топологическую структуру, см. [7] и [27]. Поэтому рассчитывать на общую топологическую классификацию лагранжевых подмногообразий, получаемых при этой конструкции, не приходится. Тем не менее в некоторых случаях топология многообразий N

может быть описана достаточно явно, что дает новые примеры H-минимальных лагранжевых подмногообразий.

Мы начнем с описания трех простых свойств, связывающих топологию многообразия N с топологией многообразий $\mathscr{Z}$ и $\mathscr{R}$.

Предложение 5.1. (1) *Погружение многообразия N в $\mathbb{C}^m$ разлагается в композицию $N \looparrowright \mathscr{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$;*

(2) *N является тотальным пространством расслоения над тором T^{m-n} со слоем $\mathscr{R}$;*

(3) *если $N \to \mathbb{C}^m$ — вложение, то N является тотальным пространством главного T^{m-n}-расслоения над n-мерным многообразием $\mathscr{R}/D_P$.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно. Так как D_P действует на T_P свободно, проекция $N = \mathscr{R} \times_{D_P} T_P \to T_P/D_P$ на второй множитель является расслоением со слоем $\mathscr{R}$. Тогда (2) вытекает из того, что $T_P/D_P \cong T^{m-n}$.

Если $N \to \mathbb{C}^m$ — вложение, то T_P действует свободно на $\mathscr{Z}$ по теореме 4.1. Тогда действие D_P на $\mathscr{R}$ также свободно. Следовательно, проекция $N = \mathscr{R} \times_{D_P} T_P \to \mathscr{R}/D_P$ на первый множитель является главным T_P-расслоением, что доказывает (3). □

Замечание. Факторпространство $\mathscr{R}_P/D_P$ является *вещественным торическим многообразием*, или *малым накрытием*, соответствующим дельзантову многограннику P. Эти многообразия изучены практически так же хорошо, как и неособые торические многообразия, см. [11] и [7].

Пример 5.2 (одна квадрика)**.** Пусть $m-n=1$, т. е. $\mathscr{R}$ задано одним уравнением

$$\gamma_1 u_1^2 + \dots + \gamma_m u_m^2 = c \tag{5.1}$$

в $\mathbb{R}^m$, где $\gamma_k \in \mathbb{R}$. Если $\mathscr{R}$ компактно, то $\mathscr{R} \cong S^{m-1}$, а соответствующий многогранник P представляет собой n-мерный симплекс Δ^n. Тогда $N \cong S^{m-1} \times_{\mathbb{Z}/2} S^1$, где образующая группы $\mathbb{Z}/2$ действует свободной инволюцией на S^1 и некоторой инволюцией τ на S^{m-1}. Топологический тип многообразия N зависит от τ. А именно,

$$N \cong \begin{cases} S^{m-1} \times S^1, & \text{если } \tau \text{ сохраняет ориентацию сферы } S^{m-1}, \\ \mathscr{K}^m, & \text{если } \tau \text{ обращает ориентацию сферы } S^{m-1}, \end{cases}$$

где $\mathscr{K}^m$ есть *m-мерная бутылка Клейна.*

Предложение 5.3. *В случае $m-n=1$ (одна квадрика) мы получаем H-минимальное лагранжево вложение многообразия $N \cong S^{m-1} \times_{\mathbb{Z}/2} S^1$ в $\mathbb{C}^m$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$ в (5.1). В этом случае топологический тип многообразия $N = N(m)$ зависит лишь от четности m, а именно*

$$N(m) \cong \begin{cases} S^{m-1} \times S^1, & \text{если } m \text{ четно}, \\ \mathscr{K}^m, & \text{если } m \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Доказательство. Так как $\mathscr{R}$ содержит точки с лишь одной ненулевой координатой, из теоремы 4.1 вытекает, что N вкладывается в $\mathbb{C}^m$ тогда и только тогда, когда γ_i порождает ту же решетку, что и весь набор $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, для любого i. Следовательно, $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$. В этом случае $D_\Gamma \cong \mathbb{Z}/2$ действует на сфере

S^{m-1} стандартной антиподальной инволюцией, которая сохраняет ориентацию, если m четно, и обращает ориентацию в противном случае. $\square$

Оба примера H-минимальных лагранжевых вложений из предложения 5.3 хорошо известны. При этом $S^{m-1} \times S^1$ допускает лагранжево вложение в $\mathbb{C}^m$ и для нечетного m (см. [25]), но неизвестно, можно ли его сделать H-минимальным. Бутылка Клейна $\mathscr{K}^m$ с четным m не может быть лагранжево вложена в $\mathbb{C}^m$ (см. [25] и [31]).

Пример 5.4 (две квадрики)**.** В случае $m - n = 2$ топология многообразий $\mathscr{R}$ и N может быть полностью описана на основе анализа канонической формы многообразия $\mathscr{R}$, описанной в (4.3), и действия двух коммутирующих инволюций на нем.

Сначала, используя предложение 4.2, мы запишем $\mathscr{R}$ в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{11}u_1^2 + \dots + \gamma_{1m}u_m^2 &= c_1, \\ \gamma_{21}u_1^2 + \dots + \gamma_{2m}u_m^2 &= 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $c_1 > 0$, $\gamma_{1i} > 0$ для всех i.

Предложение 5.5. *Существует число p, $0 < p < m$, такое, что $\gamma_{2i} > 0$ при $i = 1, \dots, p$ и $\gamma_{2i} < 0$ при $i = p+1, \dots, m$ в* (5.2)*, возможно, после перенумерации* Q1 *координат $u_1, \dots, u_m$. Соответствующее многообразие $\mathscr{R} = \mathscr{R}(p,q)$, где $q = m - p$, диффеоморфно $S^{p-1} \times S^{q-1}$. Многогранник P (пространство орбит) есть либо Δ^{m-2} (если одно из неравенств в* (4.2) *является лишним), либо комбинаторно эквивалентен произведению $\Delta^{p-1} \times \Delta^{q-1}$ (если нет лишних неравенств).*

Доказательство. Заметим, что $\gamma_{2i} \neq 0$ для всех i в (5.2), так как если $\gamma_{2i} = 0$, то вектор $\boldsymbol{c}$ лежит в конусе, порожденном вектором γ_i, что противоречит предложению 2.1(b). Переупорядочивая координаты, мы можем добиться того, что первые p чисел γ_{2i} положительны, а остальные отрицательны. Тогда $1 < p < m$, так как в противном случае пересечение (5.2) пусто. Далее, (5.2) является пересечением конуса над произведением двух эллипсоидов размерностей $p-1$ и $q-1$ (задаваемым второй квадрикой) и $(m-1)$-мерного эллипсоида (задаваемого первой квадрикой). Следовательно, $\mathscr{R}(p,q) \cong S^{p-1} \times S^{p-1}$. Утверждение о многограннике вытекает из комбинаторного факта о том, что простой n-многогранник с не более чем $n+2$ гипергранями комбинаторно эквивалентен произведению симплексов (см., например, [27, пример I.8]); случай одного лишнего неравенства соответствует $p = 1$ или $q = 1$). $\square$

Теперь рассмотрим действие $D_\Gamma \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ на $\mathscr{R}(p,q)$. Элемент $\varphi \in D_\Gamma = \frac{1}{2}L^*/L^*$ действует на $\mathscr{R}$ следующим образом:

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto (\varepsilon_1(\varphi)u_1, \dots, \varepsilon_m(\varphi)u_m),$$

где $\varepsilon_k(\varphi) = e^{2\pi i \langle \gamma_k, \varphi \rangle} = \pm 1$ при $1 \leqslant k \leqslant m$.

Лемма 5.6. *Предположим, что D_Γ действует на $\mathscr{R}(p,q)$ свободно и $\varepsilon_i(\varphi) = 1$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Тогда $\varepsilon_l(\varphi) = -1$ при $p+1 \leqslant l \leqslant m$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\varepsilon_i(\varphi) = 1$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, и $\varepsilon_j(\varphi) = 1$ для некоторого j, $p+1 \leqslant j \leqslant m$. Имеется точка $\boldsymbol{u} \in \mathscr{R}(p,q)$, единственными ненулевыми координатами которой являются u_i и u_j, см. (5.2). Тогда φ оставляет $\boldsymbol{u}$ неподвижной, что приводит к противоречию. $\square$

Лемма 5.7. *Предположим, что* D_Γ *действует на* $\mathscr{R}(p,q)$ *свободно. Тогда можно выбрать образующие* $\varphi_1,\varphi_2\in D_\Gamma$ *(т.е.* $D_\Gamma=\{0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1+\varphi_2\}$*), действие которых на* $\mathscr{R}$ *задается одной из формул* (1) *или* (2) *ниже, возможно, после перенумерации координат*:

$$(1)\quad \begin{aligned}&\varphi_1\colon (u_1,\dots,u_m)\mapsto(u_1,\dots,u_k,-u_{k+1},\dots,-u_p,-u_{p+1},\dots,-u_m),\\ &\varphi_2\colon (u_1,\dots,u_m)\mapsto(-u_1,\dots,-u_k,u_{k+1},\dots,u_p,-u_{p+1},\dots,-u_m);\end{aligned}$$

$$(2)\quad \begin{aligned}&\varphi_1\colon (u_1,\dots,u_m)\mapsto(-u_1,\dots,-u_p,u_{p+1},\dots,u_{p+l},-u_{p+l+1},\dots,-u_m),\\ &\varphi_2\colon (u_1,\dots,u_m)\mapsto(-u_1,\dots,-u_p,-u_{p+1},\dots,-u_{p+l},u_{p+l+1},\dots,u_m);\end{aligned}$$

здесь $0\leqslant k\leqslant p$ *и* $0\leqslant l\leqslant q$.

Доказательство. В силу леммы 5.6 для каждого из трех ненулевых элементов $\varphi\in D_\Gamma$ мы имеем либо $\varepsilon_i(\varphi)=-1$ при $1\leqslant i\leqslant p$, либо $\varepsilon_i(\varphi)=-1$ при $p+1\leqslant i\leqslant m$. Следовательно, мы можем выбрать два различных ненулевых элемента $\varphi_1,\varphi_2\in D_\Gamma$, таких, что либо $\varepsilon_i(\varphi_j)=-1$ при $j=1,2$ и $p+1\leqslant i\leqslant m$, либо $\varepsilon_i(\varphi_j)=-1$ при $j=1,2$ и $1\leqslant i\leqslant p$. Это отвечает случаям (1) и (2) из формулировки леммы соответственно. В первом случае мы можем предположить, после перенумерации координат, что φ_1 действует, как в (1). Тогда φ_2 также действует, как в (1), так как в противном случае сумма $\varphi_1+\varphi_2$ не может действовать свободно в силу леммы 5.6. Второй случай рассматривается аналогично. □

Каждое из действий группы D_Γ, описанных в лемме 5.7, может быть реализовано пересечением квадрик вида (5.2). Например,

$$\begin{aligned}&2u_1^2+\dots+2u_k^2+u_{k+1}^2+\dots+u_p^2+u_{p+1}^2+\dots+u_m^2=3,\\ &u_1^2+\dots+u_k^2+2u_{k+1}^2+\dots+2u_p^2-u_{p+1}^2-\dots-u_m^2=0\end{aligned}\tag{5.3}$$

дает первое из действий из леммы 5.7; второе действие реализуется аналогично. Заметим, что решетка L, соответствующая пересечению квадрик (5.3), есть подрешетка индекса 3 в $\mathbb{Z}^2$. Мы можем переписать (5.3) как

$$\begin{aligned}&u_1^2+\dots+u_k^2+u_{k+1}^2+\dots+u_p^2 &&=1,\\ &u_1^2+\dots+u_k^2 &&+u_{p+1}^2+\dots+u_m^2=2,\end{aligned}\tag{5.4}$$

и тогда $L=\mathbb{Z}^2$. Действие двух инволюций $\psi_1,\psi_2\in D_\Gamma=\frac12\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$, соответствующих стандартным базисным векторам в $\frac12\mathbb{Z}^2$, задается следующим образом:

$$\begin{aligned}&\psi_1\colon (u_1,\dots,u_m)\mapsto(-u_1,\dots,-u_k,-u_{k+1},\dots,-u_p,u_{p+1},\dots,u_m),\\ &\psi_2\colon (u_1,\dots,u_m)\mapsto(-u_1,\dots,-u_k,u_{k+1},\dots,u_p,-u_{p+1},\dots,-u_m).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Обозначим многообразие N_Γ, соответствующее (5.4), через $N_k(p,q)$. Тогда

$$N_k(p,q)\cong(S^{p-1}\times S^{q-1})\times_{\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2}(S^1\times S^1),\tag{5.6}$$

причем действие двух инволюций на $S^{p-1}\times S^{q-1}$ задается формулами (5.5). Заметим, что ψ_1 не действует на S^{q-1} и действует антиподально на S^{p-1}. Поэтому

$$N_k(p,q)\cong N(p)\times_{\mathbb{Z}/2}(S^{q-1}\times S^1),$$

где $N(p)$ — многообразие из предложения 5.3. При $k = 0$ вторая инволюция ψ_2 не действует на $N(p)$ и мы получаем $N_0(p,q) = N(p) \times N(q)$ — произведение двух многообразий из примера 5.2. В общем случае проекция $N_k(p,q) \to S^{q-1} \times_{\mathbb{Z}/2} S^1 = N(q)$ описывает $N_k(p,q)$ так тотальное пространство расслоения над $N(q)$ со слоем $N(p)$.

Сведем все предыдущие факты и наблюдения в следующем классификационном результате для компактных H-минимальных лагранжевых подмногообразий $N \subset \mathbb{C}^m$, получаемых из пересечений двух квадрик.

Теорема 5.8. *Пусть $m - n = 2$ (две квадрики) и $N_\Gamma \to \mathbb{C}^m$ — вложение соответствующего H-минимального лагранжева подмногообразия. Тогда N_Γ диффеоморфно некоторому $N_k(p,q)$, описанному в (5.6), где $p + q = m$, $0 < p < m$ и $0 \leqslant k \leqslant p$. Более того, каждая такая тройка (k,p,q) реализуется некоторым N_Γ.*

В разобранных выше случаях, когда число квадрик не превосходит двух, топология многообразия $\mathscr{R}_\Gamma$ достаточно проста, а анализ топологии многообразия N_Γ сводится к описанию действия инволюций на $\mathscr{R}_\Gamma$. В случае большего числа квадрик топология самого пересечения квадрик $\mathscr{R}_\Gamma$ начинает играть роль.

Пример 5.9 (три квадрики)**.** В случае $m - n = 3$ топология компактных многообразий $\mathscr{R}$ и $\mathscr{Z}$ была полностью описана в [20, теорема 2]. Каждое такое многообразие диффеоморфно произведению трех сфер или связной сумме произведений сфер, по две сферы в каждом произведении.

Отметим, что в случае $m - n = 3$ топологический тип многообразия $\mathscr{R}_P$ (или $\mathscr{Z}_P$) определяется *диаграммой Гейла* соответствующего простого многогранника P, которая в этом случае является 2-мерной (см. подробности в [5] или [27]). Это согласуется с классификацией n-мерных простых многогранников с $n + 3$ гипергранями, известной в комбинаторной геометрии.

Простейшим нетривиальным примером многогранника с $m - n = 3$ является пятиугольник. Он имеет много дельзантовых реализаций, например,

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ -x_1 + 2 \geqslant 0,\ -x_2 + 2 \geqslant 0,\ -x_1 - x_2 + 3 \geqslant 0\}.$$

В этом случае $\mathscr{R}_P$ является ориентированной поверхностью рода 5 (простое комбинаторное доказательство этого можно найти в [7, пример 6.40]), а $\mathscr{Z}_P$ диффеоморфно связной сумме пяти экземпляров $S^3 \times S^4$.

Мы тем самым получаем H-минимальное лагранжево подмногообразие $N_P \subset \mathbb{C}^5$, которое является тотальным пространством расслоения над T^3 со слоем поверхность рода 5.

В общем случае многообразия $\mathscr{R}_P$, соответствующие многоугольникам, описываются следующим образом.

Предложение 5.10 [7, пример 6.40]**.** *Пусть $n = 2$ в (2.1), а 2-мерный многогранник P, соответствующий пересечению квадрик $\mathscr{R}$, является m-угольником (т.е. в (4.2) нет лишних неравенств). Тогда $\mathscr{R}$ является ориентированной поверхностью S_g рода $g = 1 + 2^{m-3}(m - 4)$.*

Многообразие $\mathscr{Z}_P$, соответствующее многоугольнику, является достаточно сложной связной суммой произведений сфер [5, теорема 6.3].

В общем случае при $n = 2$ в (2.1) многогранник P является $(m - k)$-угольником, где k — число лишних неравенств в (4.2). Тогда $\mathscr{R} \cong \mathscr{R}' \times (S^0)^k$, где

$\mathscr{R}'$ соответствует $(m-k)$-угольнику без лишних неравенств. Таким образом, $\mathscr{R}$ является несвязным объединением 2^k поверхностей рода $1+2^{m-k-3}(m-k-4)$. Аналогично, $\mathscr{Z} \cong \mathscr{Z}' \times (S^1)^k$.

H-минимальное лагранжево подмногообразие $N \subset \mathbb{C}^m$, соответствующее пересечению квадрик $\mathscr{R}$ из предложения 5.10, является тотальным пространством расслоения над T^{m-2} со слоем S_g. Это асферическое многообразие (при $m \geqslant 4$), фундаментальная группа которого входит в короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow \pi_1(S_g) \longrightarrow \pi_1(N) \longrightarrow \mathbb{Z}^{m-2} \longrightarrow 1.$$

При $n > 2$ и $m-n > 3$ топология многообразий $\mathscr{R}$ и $\mathscr{Z}$ намного более сложна, результаты в этом направлении можно найти в [7], [14] и [27, §III.2].

Литература

[1] H. Anciaux, I. Castro, *Construction of Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in complex Euclidean space*, Results Math., **60**:1–4 (2011), 325–349; http://arxiv.org/abs/0906.4305.

[2] A. Amarzaya, Y. Ohnita, *On Hamiltonian stability of certain H-minimal Lagrangian submanifolds and related problems*, in: General Study on Riemannian Submanifolds, RIMS Kokyuroku, vol. 1292, Kyoto University, Kyoto, 2002, 72–93.

[3] A. Amarzaya, Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of certan symmetric R-spaces embedded in complex Euclidian spaces*, Tokyo Metropolitan University preprint series, No. 13, 2002.

[4] P. Biran, *Geometry of symplectic intersections*, in: Proceedings of ICM, Vol. 2 (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 241–256.

[5] F. Bosio, L. Meersseman, *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes*, Acta Math., **197**:1 (2006), 53–127.

[6] V. M. Buchstaber, *Lectures on Toric Topology*, Trends in Math., **10**:1 (Information Center for Math. Sci., KAIST) (2008), 1–64.

[7] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, Univ. Lecture Series, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[8] I. Castro, H. Li, F. Urbano, *Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in complex space form*, Pacific J. Math., **227**:1 (2006), 43–63.

[9] I. Castro, F. Urbano, *Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}^2$*, Compositio Math., **111**:1 (1998), 1–14.

[10] Bang-Yen Chen, O. J. Garay, *Classification of Hamiltonian-stationary Lagrangian sumbanifolds of constant in $\mathbb{C}P^3$ with positive nullity*, Nonlinear Anal., **69**:2 (2008), 747–762.

[11] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., **62**:2 (1991), 417–451.

[12] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France, **116**:3 (1988), 315–339.

[13] Y. Dong, *Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in Kaehler manifolds with symmetries*, Nonlinear Anal., **67**:3 (2007), 865–882.

[14] S. Gitler, S. Lopez de Medrano, *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*, http://arxiv.org/abs/0901.2580.

[15] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math., **82**:2 (1985), 307–347.

[16] M. Haskins, N. Kapouleas, *Twisted products and $SO(p) \times SO(q)$-invariant special Lagrangian cones*, http://arxiv.org/abs/1005.1419.
[17] F. Hélein, P. Romon, *Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}^2$*, Comm. Anal. Geom., **10**:1 (2002), 79–126.
[18] F. Hélein, P. Romon, *Weierstrass representation of Lagrangian surfaces in four-dimensional space using spinors and quaternions*, Comm. Math. Helv., **75**:4 (2000), 688–680.
[19] D. Joyce, *Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries*, Duke Math. J., **115**:1 (2002), 1–51.
[20] S. L. de Medrano, *Topology of the intersection of quadrics in $\mathbb{R}^n$*, in: Algebraic Topology, Lecture Notes in Math., vol. 1370, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 280–292.
[21] Hui Ma, *Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}P^2$*, Ann. Global. Anal. Geom., **27**:1 (2005), 1–16.
[22] А. Е. Миронов, *О гамильтоново-минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$*, Сиб. матем. журн., **44**:6 (2003), 1324–1328.
[23] А. Е. Миронов, *О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$*, Матем. сб., **195**:1 (2004), 89–102.
[24] A. E. Mironov, Dafeng Zuo, *On a family of conformally flat Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}P^3$*, Internat. Math. Res. Notices, 2008, doi:10.1093/imrn/rnn078.
[25] S. Nemirovski, *Lagrangian Klein bottles in $\mathbb{R}^{2n}$*, Geom. Funct. Anal., **19**:3 (2009), 902–909; http://arxiv.org/abs/0712.1760.
[26] Yong-Geun Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Z., **212**:2 (1993), 175–192.
[27] T. Panov, *Moment-angle manifolds and complexes*, in: Trends in Math., vol. 12, Information Center for Math. Sci., KAIST, 2010, 43–69; http://arxiv.org/abs/1008.5047.
[28] T. Panov, Y. Ustinovsky, *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds*, Moscow Math. J. (to appear); http://arxiv.org/abs/1008.4764.
[29] A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, Internat. Math. Res. Notices, **6** (2009), 1026–1106; http://arxiv.org/abs/math/0507163.
[30] P. Seidel, *Graded Lagrangian submanifolds*, Bull. Soc. Math. Fr., **128**:1 (2000), 103–149.
[31] В. В. Шевчишин, *Лагранжевы вложения бутылки Клейна и комбинаторные свойства группы классов отображений*, Изв. РАН. Сер. матем., **73**:4 (2009), 153–224.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Лаборатория геометрических методов в математической физике, МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: mironov@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
22 апреля 2011 г.

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Вопросы к авторам

Q1. Сделала здесь ту же правку, которую Вы разрешили в лемме 5.7. Так?