Минимально неголодовы кольца граней и произведения Масси

И. Ю. Лимонченко, Т. Е. Панов

В статье получен критерий голодовости кольца граней $\Bbbk[K]$ симплициального комплекса K над полем $\Bbbk$. Подобный критерий был предложен в [4], но одно из утверждений в нем опиралось на основной результат работы [1], контрпример к которому найден в [5]. Наше доказательство устраняет этот пробел. Мы также строим пример минимально неголодова комплекса K такого, что в когомологиях его момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_K$ умножение тривиально, но имеется нетривиальное тройное произведение Масси.

Пусть K – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]=\{1,2,\dots,m\}$. *Кольцо граней* $\Bbbk[K]:=\Bbbk[v_1,\dots,v_m]/(v_{i_1}\cdots v_{i_r}\mid\{i_1,\dots,i_r\}\notin K)$ называется *голодовым* (над полем $\Bbbk$), если произведение и все операции Масси в комплексе Кошуля $(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[K],d)$ тривиальны. В силу [3] кольцо $\Bbbk[K]$ голодово тогда и только тогда, когда *неравенство Серра*, связывающее ряды Гильберта для $\operatorname{Ext}_{\Bbbk[K]}(\Bbbk,\Bbbk)$ и $\operatorname{Tor}_{\Bbbk[v_1,\dots,v_m]}(\Bbbk,\Bbbk[K])$, обращается в равенство. Если $\Bbbk[K]$ не голодово, но кольца $\Bbbk[K_{[m]\setminus\{i\}}]$ голодовы для каждого $i\in[m]$, то $\Bbbk[K]$ называется *минимально неголодовым* (над $\Bbbk$).

Для пары (X,A) ее *полиэдральное произведение* $(X,A)^K$ есть $\bigcup_{\sigma\in K}(X,A)^\sigma$, где $(X,A)^\sigma:=\prod_{i\in[m]}X_i$, а $X_i=X$, если $i\in\sigma$, и $X_i=A$ в противном случае. Тогда $\mathcal{Z}_K:=(\mathbb{D}^2,\mathbb{S}^1)^K$ и $DJ(K):=(\mathbb{CP}^\infty,*)^K$. Комплекс Кошуля $(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[K],d)$ квазиизоморфен клеточному коцепному комплексу $\mathcal{Z}_K$ с подходящей диагональной аппроксимацией [2; лемма 4.5.3]; в частности, $H^*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)\cong\operatorname{Tor}_{\Bbbk[v_1,\dots,v_m]}(\Bbbk,\Bbbk[K])$.

Теорема 1. *Пусть $\Bbbk$ – поле. Следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *кольцо $\Bbbk[K]$ голодово над $\Bbbk$*;

(b) *произведение и все высшие произведения Масси в $H^+(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ тривиальны*;

(c) *$H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ – градуированная свободная ассоциативная алгебра*;

(d) $\operatorname{Hilb}(H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t)=1/(1-\operatorname{Hilb}(\Sigma^{-1}\widetilde{H}^*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t))$.

Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (b) следует из [2; теорема 4.5.4].

(a) $\Leftrightarrow$ (d). По теореме Голода [3] кольцо $\Bbbk[K]$ голодово тогда и только тогда, когда $\operatorname{Hilb}\bigl(\operatorname{Ext}_{\Bbbk[K]}(\Bbbk,\Bbbk);t\bigr)=(1+t)^m/(1-\sum_{i,j>0}\beta^{-i,2j}(\Bbbk[K])t^{-i+2j-1})$, где $\beta^{-i,2j}(\Bbbk[K])=\dim\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[v_1,\dots,v_m]}(\Bbbk,\Bbbk[K])$. Имеем изоморфизм алгебр: $H_*(\Omega DJ(K);\Bbbk)\cong\operatorname{Ext}_{\Bbbk[K]}(\Bbbk,\Bbbk)$ (см. [2; предложение 8.4.10]). В силу разложения $\Omega DJ(K)\simeq\Omega\mathcal{Z}_K\times\mathbb{T}^m$ [2; (8.15)] имеем: $\operatorname{Hilb}(H_*(\Omega DJ(K);\Bbbk);t)=\operatorname{Hilb}(H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t)\cdot(1+t)^m$. Но $\operatorname{Hilb}(\Sigma^{-1}\widetilde{H}^*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t)=\sum_{i,j>0}\beta^{-i,2j}(\Bbbk[K])t^{-i+2j-1}$ по [2; теорема 4.5.4], откуда получаем соотношение (d).

(c) $\Rightarrow$ (d). Положим $Q=H_{>0}(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)/(H_{>0}(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)\cdot H_{>0}(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk))$. По предположению мы имеем $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)=T\langle Q\rangle$, где $T\langle Q\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра на градуированном $\Bbbk$-модуле Q. Спектральная последовательность Милнора–Мура с членом $E_2^b=\operatorname{Tor}_{H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)}(\Bbbk,\Bbbk)$ сходится к $\Sigma^{-1}H_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$. По предположению, $E_2^b\cong\operatorname{Tor}_{H_*(T\langle Q\rangle)}(\Bbbk,\Bbbk)\cong\Bbbk\oplus Q$, поэтому $\operatorname{Hilb}(\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t)=\operatorname{Hilb}(E_\infty^b;t)-1\leqslant\operatorname{Hilb}(E_2^b;t)-1=\operatorname{Hilb}(Q;t)$. В частности, $\operatorname{Hilb}(T\langle\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)\rangle;t)\leqslant\operatorname{Hilb}(T\langle Q\rangle;t)=\operatorname{Hilb}(H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t)$. Применим далее спектральную последовательность Адамса с членом $E_2^c=\operatorname{Cotor}_{H_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)}(\Bbbk;\Bbbk)$, которая сходится к $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$: $\operatorname{Hilb}(H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t)=\operatorname{Hilb}(E_\infty^c;t)\leqslant\operatorname{Hilb}(E_2^c;t)\leqslant\operatorname{Hilb}(T\langle\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)\rangle;t)$, где последнее неравенство следует из кобар-конструкции (оно обращается в равенство, когда все дифференциалы

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Первый автор является победителем конкурса “Молодая математика России” и хотел бы поблагодарить его спонсоров и жюри.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm10065

в кобар-конструкции на $H_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ тривиальны). Из этих двух неравенств мы получаем $\operatorname{Hilb}\bigl(H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t\bigr) = \operatorname{Hilb}\bigl(T\langle\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)\rangle;t\bigr) = 1/(1-\operatorname{Hilb}(\Sigma^{-1}\widetilde{H}^*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t))$.

(d) $\Rightarrow$ (c). Так как (d) равносильно $\operatorname{Hilb}(H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk);t) = \operatorname{Hilb}(T\langle\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)\rangle;t)$, дифференциалы в кобар-конструкции Адамса на $H_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ нулевые, и, следовательно, $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ – свободная ассоциативная алгебра (на $\Sigma^{-1}\widetilde{H}_*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$).

В случае флагового K в [2] было показано, что $\Bbbk[K]$ голодово тогда и только тогда, когда $\operatorname{cup}(\mathcal{Z}_K)=1$, а если $\Bbbk[K]$ минимально неголодово, то $\operatorname{cup}(\mathcal{Z}_K)=2$. В общем случае для минимально неголодова $\Bbbk[K]$ мы имеем оценку сверху $\operatorname{cup}(\mathcal{Z}_K)\leqslant 2$, получающуюся из описания произведения в $H^*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ (см. [2; теорема 4.5.4]). На основе конструкции из [5] мы построим пример минимально неголодова комплекса $\mathcal{K}$ такого, что $\operatorname{cup}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})=1$ и $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ содержит нетривиальное произведение Масси.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс, задаваемый минимальными не-гранями* $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(1,4,7),(1,2,4,5),(5,6,7,8),(2,3,7,8),(2,3,5,6,7)$, $(1,2,4,6,8,9),(1,3,4,5,8,9),(1,3,5,6,7,9),(2,3,4,5,7,9),(2,3,4,5,8,9),(2,3,4,6,7,9)$, $(2,3,5,6,8,9)$. *Тогда $\mathcal{K}$ есть четырехмерный минимально неголодов комплекс такой, что* $\operatorname{cup}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})=1$ *и существует нетривиальное, мультипликативно неразложимое тройное произведение Масси пятимерных классов* $\langle[v_1v_2u_3],[v_5v_6u_4],[v_7v_8u_9]\rangle = \{[v_1v_2v_5v_7v_8u_3u_4u_6u_9]\}$ *в* $H^{14}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

Из [2; теорема 4.5.4] легко видеть, что $\operatorname{cup}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})=1$. Полные подкомплексы $\mathcal{K}_{[m]\setminus\{i\}}$ голодовы для каждого $i\in[m]$ в силу [5; теорема 6.3, (5)]. Указанное тройное произведение Масси однозначно определено в силу [6; лемма 3.3] (так как $\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_{\{1,2,3,4,5,6\}}) = \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_{\{4,5,6,7,8,9\}})=0$), нетривиально (так как $[v_1v_2v_5v_7v_8u_3u_4u_6u_9]$ соответствует ненулевому классу в $H^4(\mathcal{K})$), неразложимо (так как $\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_{[m]\setminus\{1,2,3\}})\cong\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_{[m]\setminus\{4,5,6\}})\cong\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_{[m]\setminus\{7,8,9\}})=0$, а $\widetilde{H}^p(\mathcal{K}_{[m]\setminus\{1,4,7\}})\cong\Bbbk$ при $p=4$ и равно нулю в остальных случаях, в то время как $\widetilde{H}^q(\mathcal{K}_{\{1,4,7\}})\cong\Bbbk$ при $q=1$ и равно нулю в остальных случаях).

Из [5; теорема 6.3, (5), (7)] вытекает, что если K – минимально неголодов комплекс, $\operatorname{cup}(\mathcal{Z}_K)=1$ и существует нетривиальное произведение Масси в $H^*(\mathcal{Z}_K)$, то $\dim(K)\geqslant\dim(\mathcal{K})=4$ и $f_0(K)\geqslant f_0(\mathcal{K})=9$.

Мы благодарны чл.-корр. РАН, профессору В. М. Бухштаберу за плодотворные обсуждения и интерес к этой работе.

Список литературы

[1] A. Berglund, M. Jöllenbeck, *J. Algebra*, **315**:1 (2007), 249–273. [2] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Math. Surveys Monogr., **204**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xiv+518 pp. [3] Е. С. Голод, *Докл. АН СССР*, **144**:3 (1962), 479–482. [4] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault, Jie Wu, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **368**:9 (2016), 6663–6682. [5] L. Katthän, *J. Algebra*, **479** (2017), 244–262. [6] И. Ю. Лимонченко, *Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика*, Труды МИАН, **305**, МИАН, М., 2019, 174–196.

И. Ю. Лимонченко (I. Yu. Limonchenko)
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: ilimonchenko@hse.ru

Т. Е. Панов (T. E. Panov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
05.04.2022