ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ КАЛАБИ–ЯУ И SU-БОРДИЗМЫ

И. Ю. ЛИМОНЧЕНКО, ЖИ ЛЮ, AND Т. Е. ПАНОВ

Аннотация. В. В. Батыревым было построено семейство гиперповерхностей Калаби–Яу, двойственных к первому классу Чженя в торических многообразиях Фано. Используя эту конструкцию, мы вводим семейство многообразий Калаби–Яу, классы SU-бордизма которых порождают кольцо специальных унитарных бордизомв $\Omega^{SU}[\frac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][y_i\colon i \geqslant 2]$. Мы также явно описываем многообразия Калаби–Яу, представляющие мультипликативные образующие кольца SU-бордизмов в малых размерностях.

1. Предварительные сведения: SU-бордизмы и торическая геометрия

Стабильно комплексная структура (*унитарная структура* или *U-структура*) на гладком многообразии M задаётся выбором изоморфизма между стабильным касательным расслоением к M и некоторым комплексным расслоением ξ:

$$c_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^N \xrightarrow{\cong} \xi. \tag{1.1}$$

Эквивалентно, стабильно комплексная структура представляет собой класс гомотопии поднятия отображения $M \to BO$, классифицирующего касательное расслоение $\mathcal{T}M$, до отображения $M \to BU$. *Стабильно комплексным многообразием* называется пара $(M, c_{\mathcal{T}})$.

Специальная унитарная структура (*SU-структура*) на M — это стабильно комплексная структура $c_{\mathcal{T}}$ вместе с выбором SU-структуры на комплексном векторном расслоении ξ. Эквивалентно, SU-структура есть класс гомотопии поднятия отображения $M \to BU$, классифицирующего расслоение ξ, до отображения $M \to BSU$. Стабильно комплексное многообразие $(M, c_{\mathcal{T}})$ допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда первый (целочисленный) класс Чженя расслоения ξ обращается в нуль: $c_1(\xi) = 0$. Более того, такая SU-структура единственна, если $H^1(M;\mathbb{Z}) = 0$.

Key words and phrases. Специальные унитарные бордизмы, SU-многообразия, многообразия Калаби–Яу, числа Чженя, торические многообразия Фано, рефлексивные многогранники.

Работа первого автора выполнена при поддержке General Financial Grant from the China Postdoctoral Science Foundation, грант 2016M601486. Работа второго автора выполнена при поддержке NSFC, гранты 11371093, 11661131004 и 11431009. Работа третьего автора поддержана РФФИ, гранты 17-01-00671 и 18-51-50005, а также грантом Фонда Саймонса в НМУ.

Мы называем компактное кэлерово многообразие M с $c_1(M) = 0$ *многообразием Калаби–Яу*. (Это представляется нам наиболее стандартным определением, хотя в литературе встречаются и другие определения многообразия Калаби–Яу, иногда не эквивалентные определению выше.) Согласно теореме Яу, высказанной в качестве гипотезы Калаби, многообразие Калаби–Яу допускает кэлерову метрику с нулевой кривизной Риччи (для этого необходимо лишь обращение в нуль первого *вещественного* класса Чженя). По определению, многообразие Калаби–Яу является SU-многообразием.

Мы имеем

$$H^*(BU(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n], \quad \deg c_i = 2i,$$

где c_i — универсальные характеристические классы Чженя. Для каждой последовательности $\omega = (i_1,\dots,i_n)$ неотрицательных целых чисел определим моном $c_\omega = c_1^{i_1}\cdots c_n^{i_n}$ степени $2\|\omega\| = 2\sum_{k=1}^n k\,i_k$ и соответствующий характеристический класс $c_\omega(\xi)$ комплексного n-мерного расслоения ξ. Соответствующее касательное *характеристическое число Чженя* стабильно касательного многообразия M определяется как

$$c_\omega(M) := \langle c_\omega(\mathcal{T}M),[M]\rangle.$$

Здесь через $[M]$ обозначен фундаментальный гомологический класс многообразия M, а $\mathcal{T}M$ рассматривается как комплексное расслоение при помощи изоморфизма (1.1). Число $c_\omega[M]$ полагается равным нулю, если $2\|\omega\| \ne \dim M$.

Важным примером является характеристический класс s_n. Он определяется как многочлен от $c_1,\dots,c_n$, получаемый выражением симметрического многочлена $x_1^n+\ldots+x_n^n$ через элементарные симметрические функции $\sigma_i(x_1,\dots,x_n)$ с последующей заменой σ_i на c_i. Определим соответствующее характеристическое число

$$s_n(M) := \langle s_n(\mathcal{T}M),[M]\rangle,$$

которое называется *s-числом* или *числом Милнора* многообразия M.

Для каждого целого $i \geqslant 1$ положим

$$m_i := \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \ne p^s \text{ ни для какого простого } p;\\ p, & \text{если } i+1 = p^s \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } s>0. \end{cases}$$

Далее, для каждого целого $n \geqslant 3$ определим

$$g(n) := \begin{cases} 2m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n>3 \text{ нечётно};\\ m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n>3 \text{ чётно};\\ 48, & \text{если } n=3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Например, $g(4) = 6$, $g(5) = 20$. При $n > 3$ число $g(n)$ принимает следующие значения: 1, 2, 4, p, $2p$, $4p$, где p — нечётное простое число.

Числа m_i и $g(n)$ играют роль в следующем описании колец $\varOmega^U$ и $\varOmega^{SU}$ унитарных (комплексных) и специальных унитарных бордизмов, соответственно.

Теорема 1.1 (Милнор–Новиков [9]). *Кольцо Ω^U является алгеброй многочленов от образующих в каждой чётной вещественной размерности:*

$$\Omega^U \cong \mathbb{Z}[a_i, i \geqslant 1], \ \deg a_i = 2i.$$

Класс бордизма стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей a_i тогда и только тогда, когда

$$s_i(M^{2i}) = \pm m_i.$$

Теорема 1.2 (Новиков [9]). *Кольцо Ω^{SU} с обращённой 2 является алгеброй многочленов от образующих в каждой чётной вещественной размерности > 2:*

$$\Omega^{SU}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][y_i : \, i \geqslant 2], \ \deg y_i = 2i.$$

Существуют неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$, $i \geqslant 2$, такие, что

$$s_i(y_i) = g(i+1).$$

Элементы y_i можно взять в качестве полиномиальных образующих алгебры $\Omega^{SU}[\frac{1}{2}]$.

Кручение в кольце Ω^{SU} было описано П. Коннером и Э. Флойдом в работе [5]. По поводу кольцевой структуры в Ω^{SU} см. [10].

В работе [7] показано, что каждый элемент y_i с $i \geqslant 5$ может быть представлен квазиторическим многообразием. В следующем разделе мы введём другие геометрические представители для *всех* классов y_i, происходящие из гиперповерхностей Калаби–Яу в торических многообразиях. Для начала рассмотрим следующую общую конструкцию.

Конструкция 1.3. Рассмотрим стабильно комплексное многообразие $M = M^{2n}$ с фундаментальным классом $[M^{2n}]$. Пусть $N = N^{2n-2}$ — стабильно комплексное подмногообразие, двойственное к классу когомологий $c_1(\mathcal{T}M)$. Таким образом, мы имеем вложение

$$i\colon N^{2n-2} \hookrightarrow M^{2n}, \quad \text{такое, что} \quad i_*([N]) = c_1(M) \cap [M] \quad \text{в } H_*(M;\mathbb{Z}).$$

Так как $c_1(\mathcal{T}N) = 0$, многообразие N допускает SU-структуру.

Торическое многообразие — это нормальное комплексное алгебраическое многообразие V, содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ в качестве открытого по Зарисскому подмножества таким образом, что естественное действие тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ на себе продолжается до действия на V. Мы будем рассматривать лишь неособые полные (компактные в обычной топологии) торические многообразия. *Проективные* торические многообразия V происходят из выпуклых многогранников $P \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами в точках целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Для такого многогранника P мы будем обозначать через $D_1, \ldots, D_m$ тор-инвариантные дивизоры (подмногообразия коразмерности один), соответствующие гиперграням в P, и будем обозначать через $v_1, \ldots, v_m \in H^2(M;\mathbb{Z})$ соответствующие им классы когомологий. Проективное торическое многообразие V является кэлеровым, а его полный класс Чженя равен

$$c(\mathcal{T}V) = (1+v_1)\cdots(1+v_m),$$

так что

$$c_1(\mathcal{T}V) = v_1 + \ldots + v_m.$$

Стандартная комплексная структура на торическом многообразии V никогда не является специальной унитарной (см. [7, Corollary 4.7]), так что среди торических многообразий нет многообразий Калаби–Яу. Однако следующая конструкция даёт гиперповерхности Калаби–Яу в некоторых специальных торических многообразиях.

Конструкция 1.4 (Батырев [1])**.** Торическое многообразие V называется *многообразием Фано*, если его антиканонический класс $D_1 + \ldots + D_m$ (представляющий класс когомологий $c_1(V)$) очень обилен. В геометрических терминах, проективное вложение $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, задаваемое дивизором $D_1 + \ldots + D_m$, происходит из решёточного многогранника P, для которого расстояние в решётке от 0 до любой гиперплоскости, содержащей гипергрань, равно 1. Такой многогранник P называется *рефлексивным*; его полярный многогранник P^* также является решёточным.

Подмногообразие N, двойственное к $c_1(V)$ (см. конструкцию 1.3), задаётся гиперплоским сечением вложения $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, определяемого дивизором $D_1+\ldots+D_m$. Поэтому $N \subset V$ является гладкой алгебраической гиперповерхностью в V, а значит N является многообразием Калаби–Яу комплексной размерности $n-1$.

Таким образом, каждое торическое многообразие Фано V размерности n (или, эквивалентно, каждый неособый рефлексивный n-мерный многогранник P) каноническим образом задаёт $(n-1)$-мерное многообразие Калаби–Яу N_P. В. В. Батырев [1] также обобщил эту конструкцию на особые торические многообразия Фано, путём рассмотрения специального разрешения особенностей. Это привело к определению семейства *зеркально-двойственных* пар многообразий Калаби–Яу.

Характеристическое s-число многообразия Калаби–Яу N_P вычисляется следующим образом.

Лемма 1.5. *Имеет место формула*

$$s_{n-1}(N) = \bigl\langle (v_1^{n-1} + \ldots + v_m^{n-1})(v_1 + \ldots + v_m) - (v_1 + \ldots + v_m)^n, [V]\bigr\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм комплексных расслоений $\mathcal{T}N \oplus \nu \cong i^*\mathcal{T}V$, где ν — нормальное расслоение вложения $i\colon N \hookrightarrow V$. Отсюда получаем $s_{n-1}(\mathcal{T}N) + s_{n-1}(\nu) = i^*s_{n-1}(\mathcal{T}V)$ и далее вычисляем

$$\begin{aligned}\bigl\langle s_{n-1}(\mathcal{T}N), [N]\bigr\rangle &= \bigl\langle -s_{n-1}(\nu) + i^*s_{n-1}(\mathcal{T}V), [N]\bigr\rangle \\ &= \bigl\langle \bigl(-c_1^{n-1}(\mathcal{T}V) + s_{n-1}(\mathcal{T}V)\bigr)c_1(\mathcal{T}V), [V]\bigr\rangle \\ &= \bigl\langle \bigl(s_{n-1}(\mathcal{T}V)c_1(\mathcal{T}V) - c_1^n(\mathcal{T}V)\bigr), [V]\bigr\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

2. Образующие Калаби–Яу кольца SU-бордизмов

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — неупорядоченное разбиение числа n в сумму k натуральных чисел, т. е. $\sigma_1 + \ldots + \sigma_k = n$. Пусть $\varDelta^{\sigma_i}$ — стандартный рефлексивный симплекс размерности σ_i. Тогда $P_\sigma = \varDelta^{\sigma_1} \times \ldots \times \varDelta^{\sigma_k}$ — рефлексивный многогранник, задающий торическое многообразие Фано $V_\sigma = \mathbb{C}P^{\sigma_1} \times \ldots \times \mathbb{C}P^{\sigma_k}$. Обозначим через N_σ каноническую гиперповерхность Калаби–Яу в V_σ.

Обозначим через $\widehat{P}(n)$ множество разбиений σ на части, каждая из которых не больше $n-2$. Т. е.

$$\widehat{P}(n) := \{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)\colon \sigma_1 + \ldots + \sigma_k = n, \quad \sigma \neq (n), (1, n-1).\}$$

Для каждого σ рассмотрим мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{\sigma} = \frac{n!}{\sigma_1! \cdots \sigma_k!}$ и положим

$$\alpha(\sigma) := \binom{n}{\sigma}(\sigma_1+1)^{\sigma_1} \cdots (\sigma_k+1)^{\sigma_k}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$ имеет место формула*

$$s_{n-1}(N_\sigma) = -\alpha(\sigma).$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо когомологий многообразия $V_\sigma = \mathbb{C}P^{\sigma_1} \times \ldots \times \mathbb{C}P^{\sigma_k}$:

$$H^*(V_\sigma; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u_1, \dots, u_k]/(u_1^{\sigma_1+1}, \dots, u_k^{\sigma_k+1}),$$

где $u_1 := v_1 = \ldots = v_{\sigma_1+1}$, $u_2 := v_{\sigma_1+2} = \ldots = v_{\sigma_1+\sigma_2+2}$, $\ldots$, $u_k := v_{\sigma_1+\ldots+\sigma_{k-1}+k} = \ldots = v_{\sigma_1+\ldots+\sigma_k+k} = v_m$. Так как $\sigma \in \widehat{P}(n)$, мы имеем $v_i^{n-1} = 0$ в $H^*(V_\sigma; \mathbb{Z})$ для любого i. Тогда формула из леммы 1.5 даёт

$$s_{n-1}(N_\sigma) = -\langle (v_1 + \ldots + v_m)^n, [V_\sigma]\rangle = -\langle ((\sigma_1+1)u_1 + \ldots + (\sigma_k+1)u_k)^n, [V_\sigma]\rangle.$$

Спаривание с фундаментальным классом $[V_\sigma]$ даёт коэффициент при $u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k}$ в многочлене выше, откуда вытекает результат. □

В работе Дж. Мосли [8, Proposition A.2.1] было доказано следующее соотношение:

$$\underset{\sigma \in \widehat{P}(n)}{\text{нод}} \binom{n}{\sigma} = m_{n-1} m_{n-2},$$

где нод обозначает наибольший общий делитель. Ниже мы получим аналогичный результат, в котором принимаются во внимание дополнительные сомножители в формуле (2.1), и таким образом получим условие делимости на числа $s_{n-1}(N_\sigma)$.

Для простого $p \leqslant n$ запишем p-адическое разложение числа n:

$$n = a_s p^s + \ldots + a_1 p + a_0.$$

Следуя Мосли, введём три специальных разбиения числа n. Вначале положим

$$\sigma(p) = \{p^s, \dots, p^s, \dots, p, \dots, p, 1, \dots, 1\},$$

где число элементов p^i равно a_i для $i \geqslant 0$. Заметим, что $\sigma(p) \in \widehat{P}(n)$, если $n \neq p^s$ и $n \neq q^r + 1$ ни для каких простых p и q. Для $n = p^s$ положим

$$\tau(p) = \{p^{s-1}, \dots, p^{s-1}\},$$

где число элементов p^{s-1} равно p. Наконец, для $n = q^r + 1$ положим

$$\omega(q) = \{q^{r-1}, \dots, q^{r-1}, 1\},$$

где число элементов q^{r-1} равно q. Заметим, что $\omega(q) \in \widehat{P}(n)$, а $\tau(p) \in \widehat{P}(n)$ при $n \geqslant 3$.

Для данного целого a и простого p обозначим через $\operatorname{ord}_p a$ максимальную степень p, на которую делится a.

Предложение 2.2 ([8]). *Пусть $n \geqslant 3$ — целое число.*

а) *Пусть p — такое простое число, что $n \neq p^s$ и $n \neq p^r + 1$. Тогда мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{\sigma(p)}$ не делится на p.*

б) *Пусть $n = p^s$ для некоторого простого p. Тогда $\operatorname{ord}_p \binom{n}{\sigma} \geqslant 1$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, а $\operatorname{ord}_p \binom{n}{\tau(p)} = 1$;*

в) *Пусть $n = q^r + 1$ для некоторого простого q. Тогда $\operatorname{ord}_q \binom{n}{\sigma} \geqslant 1$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, а $\operatorname{ord}_q \binom{n}{\omega(q)} = 1$.*

Лемма 2.3. *При $n \geqslant 3$ имеет место соотношение*

$$\underset{\sigma \in \widehat{P}(n)}{\text{нод}} \alpha(\sigma) = g(n),$$

где числа $g(n)$ и $\alpha(\sigma)$ задаются формулами (1.2) и (2.1) соответственно.

Доказательство. На протяжении всего доказательства мы будем обозначать $\text{нод}_{\sigma \in \widehat{P}(n)} \alpha(\sigma)$ просто через нод. При $n = 3$ имеем $\widehat{P}(n) = \{(1,1,1)\}$ и нод $= 3! \cdot 2^3 = 48 = g(3)$. Далее будем предполагать, что $n > 3$. Рассмотрим следующие 7 случаев.

I. $n \neq p^s$, $q^r + 1$ ни для каких простых p и q.

Тогда $g(n) = 1$ при чётном n и $g(n) = 2$ при нечётном n. Рассмотрим любое простое число t. Вначале предположим, что t нечётно. Тогда $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = \operatorname{ord}_t \binom{n}{\sigma(t)} = 0$ в силу предложения 2.2 а), так что нод может быть только степенью 2. Пусть теперь $t = 2$. Тогда $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\sigma(2)} + a_0 = a_0$ в силу предложения 2.2 а).

Если n чётно, то $a_0 = 0$ и нод $= 1 = g(n)$.

Если n нечётно, то $a_0 = 1$ и $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma(2)) = 1 \leqslant \operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$. Последнее неравенство выполнено, так как для любого разбиения $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ числа $n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_k$ хотя бы одно из σ_i нечётно, а значит $(\sigma_i + 1)^{\sigma_i}$ чётно и $\alpha(\sigma)$ делится на 2. Следовательно, мы имеем нод $= 2 = g(n)$ в этом случае.

II. $n = p^s = q^r + 1$ для некоторых простых p и q, а n чётно.

Тогда $p = 2$, а q — нечётное простое. В силу предложения 2.2 б) и в), $\alpha(\sigma)$ делится на p и на q для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, а

$$\operatorname{ord}_2 \alpha(\tau(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\tau(2)} = 1, \quad \operatorname{ord}_q \alpha(\omega(q)) = \operatorname{ord}_q \binom{n}{\omega(q)} = 1.$$

Для простого t, отличного от 2 и q, мы имеем $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = \operatorname{ord}_t \binom{n}{\sigma(t)} = 0$. Следовательно, нод $= 2q = pq = g(n)$ в этом случае.

III. $n = p^s = q^r + 1$ для некоторых простых p и q, а n нечётно.

Тогда p — нечётное простое, а $q = 2$. Аналогично, в силу предложения 2.2 б) и в),

$$\operatorname{ord}_p \alpha(\tau(p)) = \operatorname{ord}_p \binom{n}{\tau(p)} = 1, \quad \operatorname{ord}_2 \alpha(\omega(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\omega(2)} + 1 = 2.$$

С другой стороны, в любом разбиении σ нечётного числа n хотя бы одно σ_i нечётно, а значит $(\sigma_i + 1)^{\sigma_i}$ делится на 2 и $\alpha(\sigma)$ делится на $2^2 p$. Следовательно, нод $= 2^2 p = 2pq = g(n)$ в этом случае.

IV. $n = p^s$ для некоторого простого p, $n \neq q^r + 1$ ни для какого простого q, а n чётно.

Тогда $p = 2$. В силу предложения 2.2 а), $\operatorname{ord}_q \alpha(\sigma(q)) = 0$ для любого нечётного q, а $\operatorname{ord}_2 \alpha(\tau(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\tau(2)} = 1 \leqslant \operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$. Следовательно, нод $= 2 = p = g(n)$ в этом случае.

V. $n = p^s$ для некоторого простого p, $n \neq q^r + 1$ ни для какого простого q, а n нечётно.

Тогда p — нечётное простое. Для любого простого $t \neq 2, p$, предложение 2.2 а) даёт $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = 0$. Для 2 мы имеем $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma(2)) = 1 \leqslant \operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, где равенство имеет место, так как n нечётно. Следовательно, ord_2 нод $= 1$. Наконец, для нечётного простого p имеем $\operatorname{ord}_p \alpha(\tau(p)) = 1 \leqslant \operatorname{ord}_p \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$. Следовательно, нод $= 2p = g(n)$ в этом случае.

VI. $n = q^r + 1$ для некоторого простого q, $n \neq p^s$ ни для какого простого p, а n чётно.

Тогда q — нечётное простое. В силу предложения 2.2 в), $\operatorname{ord}_q \alpha(\omega(q)) = 1 \leqslant \operatorname{ord}_q \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, а значит ord_q нод $= 1$. Для любого простого $t \neq 2, q$ предложение 2.2 а) даёт $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = 0$, так что ord_t нод $= 0$. Наконец, в 2-адическом разложении числа n мы имеем $a_0 = 0$, так что снова применяя предложение 2.2 а) получаем $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma(2)) = 0$. Следовательно, нод $= q = g(n)$ в этом случае.

VII. $n = q^r + 1$ для некоторого простого q, $n \neq p^s$ ни для какого простого p, а n нечётно.

Тогда $q = 2$. Предложение 2.2 в) даёт $\operatorname{ord}_2 \alpha(\omega(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\omega(2)} + 1 = 2$. С другой стороны, из предложения 2.2 а) следует, что $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = 0$ для любого простого $t \neq 2$. Также, из предложения 2.2 в) следует, что $\binom{n}{\sigma}$ делится на 2 для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$. Отсюда получаем $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma) \geqslant 2$, так как n нечётно. Следовательно, нод $= 2^2 = 2q = g(n)$ в этом последнем случае. $\square$

Теперь мы можем сформулировать наш основной результат.

Теорема 2.4. *Классы SU-бордизма канонических гиперповерхностей Калаби–Яу N_σ в $\mathbb{C}P^{\sigma_1} \times \ldots \times \mathbb{C}P^{\sigma_k}$, где $\sigma \in \widehat{P}(n)$, $n \geqslant 3$, мультипликативно порождают кольцо SU-бордизмов $\Omega^{SU}[\frac{1}{2}]$.*

Доказательство. Для каждого $n \geqslant 3$ мы находим при помощи леммы 2.3 и леммы 2.1 линейную комбинацию классов бордизма $[N_\sigma] \in \Omega^{SU}_{2n-2}$, для которой s-число есть в точности $g(n)$. Эта линейная комбинация представляет полиномиальную образующую y_{n-1} кольца $\Omega^{SU}[\frac{1}{2}]$, как описано в теореме 1.2. $\square$

На самом деле мы доказали *целочисленный* результат: каждый элемент $y_i \in \Omega^{SU}$ можно представить целочисленной линейной комбинацией классов бордизма многообразий Калаби–Яу N_σ. Этот элемент y_i является частью базиса абелевой группы Ω^{SU}_{2i}. Здесь уместно задать следующий вопрос.

Вопрос 2.5. *Какие классы бордизма в Ω^{SU} имеют в качестве представителей многообразия Калаби–Яу?*

Этот вопрос является SU-аналогом известной проблемы Хирцебруха: какие классы бордизмов в Ω^U содержат связные (т. е. неприводимые) неособые алгебраические многообразия? Если убрать условие связности, то любой класс U-бордизмов положительной размерности содержит алгебраический представитель. Так как произведения и целочисленные положительные линейные комбинации алгебраических классов являются алгебраическими классами (возможно, несвязнымы), необходимо лишь в каждой размерности i найти алгебраические многообразия M и N с $s_i(M) = m_i$ и $s_i(N) = -m_i$, см. теорему 1.1. Соответствующее рассуждение, изначально принадлежащее Дж. Милнору, приведено в [10, с. 125]. Заметим, что в нём используются гиперповерхности в $\mathbb{C}P^n$ и вычисление, аналогичное лемме 1.5. В случае SU-бордизомв ситуация иная: если класс $a \in \Omega^{SU}$ представляется многообразием Калаби–Яу, то $-a$ не обязательно обладает этим свойством. Таким образом, для ответа на вопрос выше необходимо установить, можно ли представить многообразиями Калаби–Яу одновременно элементы y_i и $-y_i$. В следующем разделе мы изучим этот вопрос в малых размерностях.

3. Образующие кольца SU-бордизмов в малых размерностях

Здесь мы описываем геометрические представители — многообразия Калаби-Яу для образующих кольца SU-бордизмов в комплексных размерностях $\leqslant 4$. Заметим, что при $i \geqslant 5$ каждая образующая $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$ представляется квазиторическим многообразием, согласно результату из [7]. С другой стороны, любое квазиторическое SU-многообразие вещественной размерности $\leqslant 8$ бордантно нулю согласно [4, Theorem 6.13].

Теорема 1.2 даёт следующие значения s-числа для элементов $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$ при $i = 2, 3, 4$:

$$s_2(y_2) = 48, \quad s_3(y_3) = m_3 m_2 = 6, \quad s_4(y_4) = 2m_4 m_3 = 20.$$

В действительности мы имеем

$$\Omega^{SU}_4 = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle, \quad \Omega^{SU}_6 = \mathbb{Z}\langle y_3\rangle, \quad \Omega^{SU}_8 = \mathbb{Z}\langle \tfrac{1}{4}y_2^2, y_4\rangle,$$

(см. [10, стр. 247]). Заметим, что 8 есть первая размерность, где начинает проявляться различие между Ω^{SU} и $\Omega^{SU}[\frac{1}{2}]$ (за исключением элементов конечного порядка), так как квадрат 4-мерной образующей y_2 делится на 4. Заметим также, что y_2, y_3 и y_4 являются целочисленными базисными элементами в соответствующих размерностях.

Пример 3.1. Рассмотрим гиперповерхность Калаби–Яу $N_{(3)} \subset \mathbb{C}P^3$, соответствующую разбиению $\sigma = (3)$. Мы имеем $c_1(\mathcal{T}\mathbb{C}P^3) = 4u$, где $u \in H^2(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z})$ есть каноническая образующая, двойственная к гиперплоскому сечению. Следовательно, $N_{(3)}$ задаётся общим уравнением четвёртой степени в однородных координатах на $\mathbb{C}P^3$. Стандартным примером является квартика $z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0$, которая представляет собой $K3$-поверхность. Лемма 1.5 даёт

$$s_3(N_{(3)}) = \langle 4u^2 \cdot 4u - (4u)^3, [\mathbb{C}P^3]\rangle = -48,$$

так что $N_{(3)}$ представляет образующую $-y_2 \in \Omega^{SU}_4$.

Заметим, что теорема 2.4 даёт другой представитель для той же образующей $-y_2$. А именно, единственным разбиением числа $n = 3$, лежащим в классе $\widehat{P}(n)$, является $(1,1,1)$. Соответствующая гиперповерхность Калаби–Яу есть $N_{(1,1,1)} \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Мы имеем

$$c_1(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1) = 2u_1 + 2u_2 + 2u_3,$$

так что $N_{(1,1,1)}$ есть поверхность мультистепени $(2,2,2)$ в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Из леммы 2.1 получаем $s_3(N_{(1,1,1)}) = -\alpha(1,1,1) = -48$, т. е. многообразие $N_{(1,1,1)}$ также представляет класс $-y_2$.

С другой стороны, аддитивная образующая $y_2 \in \varOmega_4^{SU}$ не может быть представлена компактной комплексной поверхностью. Это доказано в [8, Theorem 3.2.5] на основе анализа классификации комплексных поверхностей. Легко видеть, что комплексная поверхность S с $H^1(S;\mathbb{Z}) = 0$ (что выполнено для канонических гиперповерхностей Калаби–Яу в торических многообразиях Фано) не может представлять класс y_2. Действительно, такая поверхность S имеет эйлерову характеристику $c_2(S) = \chi(S) \geqslant 2$, в то время как $s_2(y_2) = 48 = -2c_2(y_2)$, так что $c_2(y_2) = -24$ — отрицательное число.

В комплексной размерности 3 ситуация иная. Мы имеем

Предложение 3.2. *В комплексной размерности* 3 *обе аддитивные образующие y_3 и $-y_3$ группы $\varOmega_6^{SU}$ представляются каноническими гиперповерхностями Калаби–Яу в торических многообразиях Фано. А именно, такая гиперповерхность Калаби–Яу N представляет элемент $\pm y_3$ тогда и только тогда, когда её числа Ходжа удовлетворяют соотношению*

$$h^{1,1}(N) - h^{2,1}(N) = \pm 1.$$

Для каждого числа $h^{1,1}$ в пределах

$$16 \leqslant h^{1,1} \leqslant 90$$

существует гиперповерхность Калаби–Яу N со вторым числом Бетти $b^2(N) = h^{1,1}$, представляющая элемент y_3. Аналогично, для каждого числа $h^{1,1}$ в пределах

$$15 \leqslant h^{1,1} \leqslant 89,$$

существует гиперповерхность Калаби–Яу N со вторым числом Бетти $b^2(N) = h^{1,1}$, представляющая элемент $-y_3$. Более того, гиперповерхности Калаби–Яу, представляющие элементы y_3 и $-y_3$, можно выбрать зеркально двойственными в смысле [1].

Доказательство. Для образующей $y_3 \in \varOmega_6^{SU}$ мы имеем $6 = s_3(y_3) = 3c_3(y_3)$, так что комплексное SU-многообразие N, представляющее класс y_3, должно иметь эйлерову характеристику $\chi(N) = c_3(N) = 2$. С другой стороны, если N является n-мерным кэлеровым многообразием, то мы имеем $\chi(N) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i b^i = \sum_{p,q=0}^{n}(-1)^{p+q}h^{p,q}$, где $b^i = \sum_{p+q=i} h^{p,q}$ есть i-е число Бетти, а числа Ходжа удовлетворят соотношениям $h^{p,q} = h^{q,p}$ и $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$. Более того, для гиперповерхности Калаби–Яу N в торическом мнообразии Фано имеются дополнительные соотношения

$h^{0,0} = h^{n,0} = 1$ и $h^{i,0} = 0$ при $0 < i < n$, см. [1, Theorem 4.1.9]. Поэтому в нашем случае $n = 3$ мы получаем

$$b^1 = 2h^{1,0} = 0, \quad b^2 = 2h^{2,0} + h^{1,1} = h^{1,1}, \quad b^3 = 2h^{3,0} + 2h^{2,1} = 2 + 2h^{2,1}$$

и

$$\chi(N) = 2b^0 - 2b^1 + 2b^2 - b^3 = 2(h^{1,1} - h^{2,1}).$$

Отсюда следует, что N представляет класс y_3 тогда и только тогда, когда $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$ и аналогично для $-y_3$.

Тот факт, что такое N существует, следует из анализа базы данных [6] рефлексивных многогранников и соответствующих им гиперповерхностей Калаби–Яу в торических многообразиях Фано. Эта база данных содержит полный список 473,800,776 рефлексивных многогранников в размерности 4, а также список чисел Ходжа соответствующих 3-мерных многообразий Калаби–Яу. Отсюда мы извлекаем, что для каждого числа $h^{1,1}$, удовлетворяющего неравенствам $16 \leqslant h^{1,1} \leqslant 90$, существует рефлексивный 4-мерный многогранник, каноническое 3-мерное многообразие Калаби-Яу для которого удовлетворяет соотношению $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$. Если же $h^{1,1}$ не попадает в эти пределы, то не существует 3-мерного многообразия Калаби–Яу с $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$, происходящего из торического многообразия Фано. В случае соотношения $h^{1,1} - h^{2,1} = -1$ соответствующие пределы имеют вид $15 \leqslant h^{1,1} \leqslant 89$. Утверждение относительно зеркальной двойственности следует из того, что для зеркально двойственных 3-мерных многообразий Калаби–Яу имеют место соотношения $h^{1,1}(N) = h^{2,1}(N^*)$ и $h^{2,1}(N) = h^{1,1}(N^*)$, см. [1, Corollary 4.5.1]. □

Пример 3.3. Теорема 2.4 даёт следующие представители для образующих $y_3 \in \Omega_6^{SU}$ и $y_4 \in \Omega_8^{SU}$:

$$y_3 = 15N_{(2,2)} - 19N_{(1,1,1,1)}, \quad y_4 = 56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)}.$$

Как мы видели в предложении 3.2, образующая y_3, как и $-y_3$, представляется одним 3-мерным многообразием Калаби–Яу N, соответствующим некоторому рефлексивному многограннику. Случай y_4 будет рассмотрен в последующей работе.

Интересным аспектом геометрических образующих M малых размерностей в кольцах бордизмов Ω^U и Ω^{SU} является то, что свойства жёсткости для родов Хирцебруха многообразий M с действием тора приводят к замечательным функциональным уравнениям. Детали этой теории см. в [3, §9.7] и [2]. Случай торических многообразий Фано, соответствующих 2-мерным рефлексивным многогранникам, изучен в [2]; было бы интересно рассмотреть соответствующие уравнения в 3-мерном и 4-мерном случае.

Авторы благодарны В. М. Бухштаберу за полезные рекоммендации и стимулирующие обсуждения результатов этой работы.

Список литературы

[1] Batyrev, Victor V. *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties.* J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 3, 493–535.

[2] Бухштабер В. М. *Кобордизмы, многообразия с действием тора и функциональные уравнение.* Труды Матем. Института им. В. А. Стеклова РАН, 2018, в печати.

[3] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[4] Buchstaber, Victor; Panov, Taras; Ray, Nigel. *Toric genera.* Internat. Math. Res. Notices 2010, no. 16, 3207–3262.

[5] Conner, Pierre; Floyd, Edwin. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60, 1966.

[6] Kreuzer, Maximilian; Skarke, Harald. *Calabi–Yau data,* `http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/CY/`

[7] Lü, Zhi; Panov, Taras. *On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings.* Algebraic & Geometric Topology 16 (2016), no. 5, 2865–2893.

[8] Mosley, John E. *In search of a class of representatives for SU-bordism using the Witten genus.* Thesis (Ph.D.)–University of Kentucky, 2016; arXiv:1411.0706.

[9] Новиков С. П. *Гомотопические свойства комплексов Тома.* Матем. сборник 57 (1962), вып. 4, с. 407–442.

[10] Stong, Robert. *Notes on Cobordism Theory.* Math. Notes, 7. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1968. [Русский перевод: Стонг Р., *Заметки по теории кобордизмов,* М.: Мир, 1973.]

Факультет математических наук, Фуданьский университет, Шанхай, Китай

E-mail address: `ilimonchenko@fudan.edu.cn`

Факультет математических наук, Фуданьский университет, Шанхай, Китай

E-mail address: `zlu@fudan.edu.cn`

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет,

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, Москва

Институт Проблем Передачи Информации РАН, Москва

E-mail address: `tpanov@mech.math.msu.su`

URL: `http://higeom.math.msu.su/people/taras/`