УДК 515.14+515.16

Гиперповерхности Калаби–Яу и SU-бордизмы[*]

И. Ю. Лимонченко[а], Жи Лю[а], Т. Е. Панов[б,в,г]

Поступило 15 марта 2018 г.

В.В. Батыревым было построено семейство гиперповерхностей Калаби–Яу, двойственных первому классу Чженя в торических многообразиях Фано. С помощью этой конструкции в работе вводится семейство многообразий Калаби–Яу, классы SU-бордизма которых порождают кольцо специальных унитарных бордизмов $\Omega^{\mathrm{SU}}\bigl[\frac12\bigr] \cong \mathbb{Z}\bigl[\frac12\bigr][y_i\colon i \ge 2]$. Также явно описаны многообразия Калаби–Яу, представляющие мультипликативные образующие кольца SU-бордизмов в малых размерностях.

DOI: 10.1134/S0371968518030135

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ: SU-БОРДИЗМЫ И ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Стабильно комплексная структура (*унитарная структура*, или U-*структура*) на гладком многообразии M задается выбором изоморфизма между стабильным касательным расслоением к M и некоторым комплексным расслоением ξ:

$$c_{\mathcal T}\colon\ \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^N \xrightarrow{\cong} \xi. \tag{1.1}$$

Эквивалентным образом стабильно комплексная структура определяется как класс гомотопии поднятия отображения $M \to \mathrm{BO}$, классифицирующего касательное расслоение $\mathcal{T}M$, до отображения $M \to \mathrm{BU}$. *Стабильно комплексным многообразием* называется пара $(M, c_{\mathcal T})$.

Специальная унитарная структура (SU-*структура*) на M — это стабильно комплексная структура $c_{\mathcal T}$ вместе с выбором SU-структуры на комплексном векторном расслоении ξ. Эквивалентным образом SU-структура определяется как класс гомотопии поднятия отображения $M \to \mathrm{BU}$, классифицирующего расслоение ξ, до отображения $M \to \mathrm{BSU}$. Стабильно комплексное многообразие $(M, c_{\mathcal T})$ допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда первый (целочисленный) класс Чженя расслоения ξ обращается в нуль: $c_1(\xi) = 0$. Более того, такая SU-структура единственна, если $H^1(M;\mathbb{Z}) = 0$.

[*]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Китайского научного фонда для молодых ученых (General Financial Grant from the China Postdoctoral Science Foundation no. 2016M601486). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке NSFC (гранты 11371093, 11661131004 и 11431009). Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01-00671, 18-51-50005) и Фонда Саймонса в НМУ.

[а]School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai, P.R. China.

[б]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

[в]Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”, Москва, Россия.

[г]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

E-mail: ilimonchenko@fudan.edu.cn (И.Ю. Лимонченко), zlu@fudan.edu.cn (Жи Лю), tpanov@mech.math.msu.su (Т.Е. Панов).

Мы называем компактное кэлерово многообразие M с $c_1(M)=0$ *многообразием Калаби–Яу*. (Это представляется нам наиболее стандартным определением, хотя в литературе встречаются и другие определения многообразия Калаби–Яу, иногда не эквивалентные определению выше.) Согласно теореме Яу, высказанной в качестве гипотезы Калаби, многообразие Калаби–Яу допускает кэлерову метрику с нулевой кривизной Риччи (для этого необходимо лишь обращение в нуль первого *вещественного* класса Чженя). По определению многообразие Калаби–Яу является SU-многообразием.

Имеем

$$H^*(\mathrm{BU}(n);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n],\qquad \deg c_i=2i,$$

где c_i — универсальные характеристические классы Чженя. Для каждой последовательности $\omega=(i_1,\dots,i_n)$ неотрицательных целых чисел определим моном $c_\omega=c_1^{i_1}\dots c_n^{i_n}$ степени $2\|\omega\|=2\sum_{k=1}^n k\,i_k$ и соответствующий характеристический класс $c_\omega(\xi)$ комплексного n-мерного расслоения ξ. Соответствующее касательное *характеристическое число Чженя* стабильно комплексного многообразия M определяется как

$$c_\omega(M):=\langle c_\omega(\mathcal{T}M),[M]\rangle.$$

Здесь через $[M]$ обозначен фундаментальный гомологический класс многообразия M, а $\mathcal{T}M$ рассматривается как комплексное расслоение при помощи изоморфизма (1.1). Число $c_\omega[M]$ полагается равным нулю, если $2\|\omega\|\neq\dim M$.

Важным примером является характеристический класс s_n. Он определяется как многочлен от $c_1,\dots,c_n$, получаемый выражением симметрического многочлена $x_1^n+\dots+x_n^n$ через элементарные симметрические функции $\sigma_i(x_1,\dots,x_n)$ с последующей заменой σ_i на c_i. Определим соответствующее характеристическое число

$$s_n(M):=\langle s_n(\mathcal{T}M),[M]\rangle,$$

которое называется *s-числом* или *числом Милнора* многообразия M.

Для каждого целого $i\geq1$ положим

$$m_i:=\begin{cases}1, & \text{если } i+1\neq p^s \text{ ни для какого простого } p,\\ p, & \text{если } i+1=p^s \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } s>0.\end{cases}$$

Далее, для каждого целого $n\geq3$ определим

$$g(n):=\begin{cases}2m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n>3 \text{ нечетно},\\ m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n>3 \text{ четно},\\ 48, & \text{если } n=3.\end{cases}\tag{1.2}$$

Например, $g(4)=6$, $g(5)=20$. При $n>3$ число $g(n)$ принимает следующие значения: 1, 2, 4, p, $2p$, $4p$, где p — нечетное простое число.

Числа m_i и $g(n)$ используются в следующем описании колец Ω^{U} и Ω^{SU} унитарных (комплексных) и специальных унитарных бордизмов соответственно.

Теорема 1.1 (Милнор, Новиков [10])**.** *Кольцо Ω^{U} является алгеброй многочленов от образующих в каждой четной вещественной размерности*:

$$\Omega^{\mathrm{U}}\cong\mathbb{Z}[a_i,\ i\geq1],\qquad \deg a_i=2i.$$

Класс бордизма стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей a_i тогда и только тогда, когда

$$s_i(M^{2i})=\pm m_i.$$

Теорема 1.2 (Новиков [10]). *Кольцо Ω^{SU} с обращенной 2 является алгеброй многочленов от образующих в каждой четной вещественной размерности, большей* 2:

$$\Omega^{\mathrm{SU}}\big[\tfrac{1}{2}\big] \cong \mathbb{Z}\big[\tfrac{1}{2}\big][y_i\colon\ i \ge 2], \qquad \deg y_i = 2i.$$

Существуют неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{\mathrm{SU}}_{2i}$, $i \ge 2$, такие, что

$$s_i(y_i) = g(i+1).$$

Элементы y_i можно взять в качестве полиномиальных образующих алгебры $\Omega^{\mathrm{SU}}\big[\tfrac{1}{2}\big]$.

Кручение в кольце Ω^{SU} было описано П. Коннером и Э. Флойдом в работе [5]. По поводу кольцевой структуры в Ω^{SU} см. [11].

В работе [7] показано, что каждый элемент y_i с $i \ge 5$ может быть представлен квазиторическим многообразием. В следующем разделе будут введены другие геометрические представители для *всех* классов y_i, происходящие из гиперповерхностей Калаби–Яу в торических многообразиях. Для начала рассмотрим следующую общую конструкцию.

Конструкция 1.3. Рассмотрим стабильно комплексное многообразие $M = M^{2n}$ с фундаментальным классом $[M^{2n}]$. Пусть $N = N^{2n-2}$ — стабильно комплексное подмногообразие, двойственное классу когомологий $c_1(\mathcal{T}M)$. Таким образом, мы имеем вложение

$$i\colon\ N^{2n-2} \hookrightarrow M^{2n} \qquad \text{такое, что} \quad i_*([N]) = c_1(M) \cap [M] \quad \text{в}\ \ H_*(M;\mathbb{Z}).$$

Так как $c_1(\mathcal{T}N) = 0$, многообразие N допускает SU-структуру.

Торическое многообразие — это нормальное комплексное алгебраическое многообразие V, содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ в качестве открытого по Зарисскому подмножества таким образом, что естественное действие тора $(\mathbb{C}^\times)^n$ на себе продолжается до действия на V. Мы будем рассматривать лишь неособые полные (компактные в обычной топологии) торические многообразия. *Проективные* торические многообразия V происходят из выпуклых многогранников $P \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами в точках целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Для такого многогранника P мы будем обозначать через $D_1, \dots, D_m$ инвариантные относительно действия тора дивизоры (подмногообразия коразмерности 1), соответствующие гиперграням в P, и будем обозначать через $v_1, \dots, v_m \in H^2(M;\mathbb{Z})$ соответствующие им классы когомологий. Проективное торическое многообразие V является кэлеровым, а его полный класс Чженя равен

$$c(\mathcal{T}V) = (1+v_1)\dots(1+v_m),$$

так что

$$c_1(\mathcal{T}V) = v_1 + \dots + v_m.$$

Стандартная комплексная структура на торическом многообразии V никогда не является специальной унитарной (см. [7, Corollary 4.7]), так что среди торических многообразий нет многообразий Калаби–Яу. Однако следующая конструкция дает гиперповерхности Калаби–Яу в некоторых специальных торических многообразиях.

Конструкция 1.4 (Батырев [1]). Торическое многообразие V называется *многообразием Фано*, если его антиканонический класс $D_1 + \dots + D_m$ (представляющий класс когомологий $c_1(V)$) очень обилен. В геометрических терминах проективное вложение $V \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^s$, задаваемое дивизором $D_1 + \dots + D_m$, происходит из решеточного многогранника P, для которого расстояние в решетке от 0 до любой гиперплоскости, содержащей гипергрань, равно 1. Такой многогранник P называется *рефлексивным*; его полярный многогранник P^* также является решеточным.

Подмногообразие N, двойственное $c_1(V)$ (см. конструкцию 1.3), задается гиперплоским сечением вложения $V \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^s$, определяемого дивизором $D_1 + \dots + D_m$. Поэтому $N \subset V$

является гладкой алгебраической гиперповерхностью в V, а значит, N — многообразие Калаби–Яу комплексной размерности $n-1$.

Таким образом, каждое торическое многообразие Фано V размерности n (или, что то же самое, каждый неособый рефлексивный n-мерный многогранник P) каноническим образом задает $(n-1)$-мерное многообразие Калаби–Яу N_P. В.В. Батырев [1] также обобщил эту конструкцию на особые торические многообразия Фано путем рассмотрения специального разрешения особенностей. Это привело к определению семейства *зеркально двойственных* пар многообразий Калаби–Яу.

Характеристическое s-число многообразия Калаби–Яу N_P вычисляется следующим образом.

Лемма 1.5. *Имеет место формула*

$$s_{n-1}(N) = \big\langle (v_1^{n-1} + \ldots + v_m^{n-1})(v_1 + \ldots + v_m) - (v_1 + \ldots + v_m)^n, [V] \big\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм комплексных расслоений $\mathcal{T}N \oplus \nu \cong i^*\mathcal{T}V$, где ν — нормальное расслоение вложения $i\colon N \hookrightarrow V$. Отсюда получаем $s_{n-1}(\mathcal{T}N) + s_{n-1}(\nu) = i^* s_{n-1}(\mathcal{T}V)$ и далее вычисляем

$$\begin{aligned}\big\langle s_{n-1}(\mathcal{T}N), [N] \big\rangle &= \big\langle -s_{n-1}(\nu) + i^* s_{n-1}(\mathcal{T}V), [N] \big\rangle = \\ &= \big\langle \big(-c_1^{n-1}(\mathcal{T}V) + s_{n-1}(\mathcal{T}V)\big) c_1(\mathcal{T}V), [V] \big\rangle = \\ &= \big\langle \big(s_{n-1}(\mathcal{T}V) c_1(\mathcal{T}V) - c_1^n(\mathcal{T}V)\big), [V] \big\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

2. ОБРАЗУЮЩИЕ КАЛАБИ–ЯУ КОЛЬЦА SU-БОРДИЗМОВ

Пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — неупорядоченное разбиение числа n в сумму k натуральных чисел, т.е. $\sigma_1 + \ldots + \sigma_k = n$. Пусть Δ^{σ_i} — стандартный рефлексивный симплекс размерности σ_i. Тогда $P_\sigma = \Delta^{\sigma_1} \times \ldots \times \Delta^{\sigma_k}$ — рефлексивный многогранник, задающий торическое многообразие Фано $V_\sigma = \mathbb{C}\mathrm{P}^{\sigma_1} \times \ldots \times \mathbb{C}\mathrm{P}^{\sigma_k}$. Обозначим через N_σ каноническую гиперповерхность Калаби–Яу в V_σ.

Обозначим через $\widehat{P}(n)$ множество разбиений σ на части, каждая из которых не больше $n-2$, т.е.

$$\widehat{P}(n) := \big\{ \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)\colon\ \sigma_1 + \ldots + \sigma_k = n,\ \sigma \neq (n), (1, n-1) \big\}.$$

Для каждого σ рассмотрим мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{\sigma} = n!/(\sigma_1! \ldots \sigma_k!)$ и положим

$$\alpha(\sigma) := \binom{n}{\sigma} (\sigma_1 + 1)^{\sigma_1} \ldots (\sigma_k + 1)^{\sigma_k}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$ имеет место формула*

$$s_{n-1}(N_\sigma) = -\alpha(\sigma).$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо когомологий многообразия $V_\sigma = \mathbb{C}\mathrm{P}^{\sigma_1} \times \ldots \times \mathbb{C}\mathrm{P}^{\sigma_k}$:

$$H^*(V_\sigma; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_k] / \big(u_1^{\sigma_1+1}, \ldots, u_k^{\sigma_k+1}\big),$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &:= v_1 = \ldots = v_{\sigma_1+1}, \\ u_2 &:= v_{\sigma_1+2} = \ldots = v_{\sigma_1+\sigma_2+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k &:= v_{\sigma_1+\ldots+\sigma_{k-1}+k} = \ldots = v_{\sigma_1+\ldots+\sigma_k+k} = v_m. \end{aligned}$$

Так как $\sigma \in \widehat{P}(n)$, имеем $v_i^{n-1} = 0$ в $H^*(V_\sigma; \mathbb{Z})$ для любого i. Тогда формула из леммы 1.5 дает

$$s_{n-1}(N_\sigma) = -\langle (v_1 + \ldots + v_m)^n, [V_\sigma] \rangle = -\langle ((\sigma_1 + 1)u_1 + \ldots + (\sigma_k + 1)u_k)^n, [V_\sigma] \rangle.$$

Спаривание с фундаментальным классом $[V_\sigma]$ дает коэффициент при $u_1^{\sigma_1} \ldots u_k^{\sigma_k}$ в многочлене выше, откуда вытекает результат. $\square$

В работе Дж. Мосли [9, Proposition A.2.1] было доказано следующее соотношение:

$$\underset{\sigma \in \widehat{P}(n)}{\text{НОД}} \binom{n}{\sigma} = m_{n-1} m_{n-2},$$

где НОД обозначает наибольший общий делитель. Ниже мы получим аналогичный результат, в котором принимаются во внимание дополнительные сомножители в формуле (2.1), и таким образом получим условие делимости на числа $s_{n-1}(N_\sigma)$.

Для простого $p \le n$ запишем p-адическое разложение числа n:

$$n = a_s p^s + \ldots + a_1 p + a_0.$$

Следуя Мосли, введем три специальных разбиения числа n. Вначале положим

$$\sigma(p) = \{p^s, \ldots, p^s, \ldots, p, \ldots, p, 1, \ldots, 1\},$$

где число элементов p^i равно a_i для $i \ge 0$. Заметим, что $\sigma(p) \in \widehat{P}(n)$, если $n \ne p^s$ и $n \ne q^r + 1$ ни для каких простых p и q. Для $n = p^s$ положим

$$\tau(p) = \{p^{s-1}, \ldots, p^{s-1}\},$$

где число элементов p^{s-1} равно p. Наконец, для $n = q^r + 1$ положим

$$\omega(q) = \{q^{r-1}, \ldots, q^{r-1}, 1\},$$

где число элементов q^{r-1} равно q. Заметим, что $\omega(q) \in \widehat{P}(n)$, а $\tau(p) \in \widehat{P}(n)$ при $n \ge 3$.

Для данного целого a и простого p обозначим через $\operatorname{ord}_p a$ максимальную степень p, на которую делится a.

Предложение 2.2 [8]. *Пусть $n \ge 3$ — целое число.*

(а) *Пусть p — такое простое число, что $n \ne p^s$ и $n \ne p^r + 1$. Тогда мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{\sigma(p)}$ не делится на p.*

(б) *Пусть $n = p^s$ для некоторого простого p. Тогда $\operatorname{ord}_p \binom{n}{\sigma} \ge 1$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, а $\operatorname{ord}_p \binom{n}{\tau(p)} = 1$.*

(в) *Пусть $n = q^r + 1$ для некоторого простого q. Тогда $\operatorname{ord}_q \binom{n}{\sigma} \ge 1$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, а $\operatorname{ord}_q \binom{n}{\omega(q)} = 1$.*

Лемма 2.3. *При $n \ge 3$ имеет место соотношение*

$$\underset{\sigma \in \widehat{P}(n)}{\text{НОД}}\, \alpha(\sigma) = g(n),$$

где числа $g(n)$ и $\alpha(\sigma)$ задаются формулами (1.2) *и* (2.1) *соответственно.*

Доказательство. На протяжении всего доказательства мы будем обозначать величину $\text{НОД}_{\sigma \in \widehat{P}(n)}\, \alpha(\sigma)$ просто через НОД. При $n = 3$ имеем $\widehat{P}(n) = \{(1,1,1)\}$ и $\text{НОД} = 3! \cdot 2^3 = 48 = g(3)$. Далее будем предполагать, что $n > 3$. Рассмотрим следующие семь случаев.

Случай I: *$n \ne p^s, q^r + 1$ ни для каких простых p и q.* Тогда $g(n) = 1$ при четном n и $g(n) = 2$ при нечетном n. Рассмотрим любое простое число t. Вначале предположим, что t нечетно.

Тогда $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = \operatorname{ord}_t \binom{n}{\sigma(t)} = 0$ в силу утверждения (а) предложения 2.2, так что НОД может быть только степенью 2. Пусть теперь $t = 2$. Тогда $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\sigma(2)} + a_0 = a_0$ в силу утверждения (а) предложения 2.2.

Если n четно, то $a_0 = 0$ и НОД $= 1 = g(n)$.

Если n нечетно, то $a_0 = 1$ и $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma(2)) = 1 \le \operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$. Последнее неравенство выполнено, так как для любого разбиения $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ числа $n = \sigma_1 + \ldots + \sigma_k$ хотя бы одно из σ_i нечетно, а значит, $(\sigma_i + 1)^{\sigma_i}$ четно и $\alpha(\sigma)$ делится на 2. Следовательно, имеем НОД $= 2 = g(n)$ в этом случае.

Случай II: $n = p^s = q^r + 1$ *для некоторых простых p и q, а n четно.* Тогда $p = 2$, а q — нечетное простое. В силу утверждений (б), (в) предложения 2.2 число $\alpha(\sigma)$ делится на p и q для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, а

$$\operatorname{ord}_2 \alpha(\tau(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\tau(2)} = 1, \qquad \operatorname{ord}_q \alpha(\omega(q)) = \operatorname{ord}_q \binom{n}{\omega(q)} = 1.$$

Для простого t, отличного от 2 и q, имеем $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = \operatorname{ord}_t \binom{n}{\sigma(t)} = 0$. Следовательно, НОД $= 2q = pq = g(n)$ в этом случае.

Случай III: $n = p^s = q^r + 1$ *для некоторых простых p и q, а n нечетно.* Тогда p — нечетное простое, а $q = 2$. Аналогично в силу утверждений (б), (в) предложения 2.2

$$\operatorname{ord}_p \alpha(\tau(p)) = \operatorname{ord}_p \binom{n}{\tau(p)} = 1, \qquad \operatorname{ord}_2 \alpha(\omega(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\omega(2)} + 1 = 2.$$

С другой стороны, в любом разбиении σ нечетного числа n хотя бы одно σ_i нечетно, а значит, $(\sigma_i + 1)^{\sigma_i}$ делится на 2 и $\alpha(\sigma)$ делится на $2^2 p$. Следовательно, НОД $= 2^2 p = 2pq = g(n)$ в этом случае.

Случай IV: $n = p^s$ *для некоторого простого p, $n \ne q^r + 1$ ни для какого простого q, а n четно.* Тогда $p = 2$. В силу утверждения (а) предложения 2.2 имеем $\operatorname{ord}_q \alpha(\sigma(q)) = 0$ для любого нечетного q, а $\operatorname{ord}_2 \alpha(\tau(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\tau(2)} = 1 \le \operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$. Следовательно, НОД $= 2 = p = g(n)$ в этом случае.

Случай V: $n = p^s$ *для некоторого простого p, $n \ne q^r + 1$ ни для какого простого q, а n нечетно.* Тогда p — нечетное простое. Для любого простого $t \ne 2, p$ утверждение (а) предложения 2.2 дает $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = 0$. Для $t = 2$ имеем $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma(2)) = 1 \le \operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, где равенство имеет место, так как n нечетно. Следовательно, ord_2 НОД $= 1$. Наконец, для нечетного простого p имеем $\operatorname{ord}_p \alpha(\tau(p)) = 1 \le \operatorname{ord}_p \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$. Следовательно, НОД $= 2p = g(n)$ в этом случае.

Случай VI: $n = q^r + 1$ *для некоторого простого q, $n \ne p^s$ ни для какого простого p, а n четно.* Тогда q — нечетное простое. В силу утверждения (в) предложения 2.2 имеем $\operatorname{ord}_q \alpha(\omega(q)) = 1 \le \operatorname{ord}_q \alpha(\sigma)$ для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$, а значит, ord_q НОД $= 1$. Для любого простого $t \ne 2, q$ утверждение (а) предложения 2.2 дает $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = 0$, так что ord_t НОД $= 0$. Наконец, в 2-адическом разложении числа n мы имеем $a_0 = 0$, так что, снова применяя утверждение (а) предложения 2.2, получаем $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma(2)) = 0$. Следовательно, НОД $= q = g(n)$ в этом случае.

Случай VII: $n = q^r + 1$ *для некоторого простого q, $n \ne p^s$ ни для какого простого p, а n нечетно.* Тогда $q = 2$. Утверждение (в) предложения 2.2 дает $\operatorname{ord}_2 \alpha(\omega(2)) = \operatorname{ord}_2 \binom{n}{\omega(2)} + 1 = 2$. С другой стороны, из утверждения (а) предложения 2.2 следует, что $\operatorname{ord}_t \alpha(\sigma(t)) = 0$ для любого простого $t \ne 2$. Также из утверждения (в) предложения 2.2 следует, что $\binom{n}{\sigma}$ делится на 2 для любого $\sigma \in \widehat{P}(n)$. Отсюда получаем $\operatorname{ord}_2 \alpha(\sigma) \ge 2$, так как n нечетно. Следовательно, НОД $= 2^2 = 2q = g(n)$ в этом последнем случае. $\square$

Теперь мы можем сформулировать наш основной результат.

Теорема 2.4. *Классы* SU*-бордизма канонических гиперповерхностей Калаби–Яу* N_σ *в* $\mathbb{C}P^{\sigma_1}\times\ldots\times\mathbb{C}P^{\sigma_k}$, *где* $\sigma\in\widehat{P}(n)$, $n\ge 3$, *мультипликативно порождают кольцо* SU*-бордизмов* $\varOmega^{\mathrm{SU}}\bigl[\frac12\bigr]$.

Доказательство. Для каждого $n\ge 3$ мы находим при помощи лемм 2.3 и 2.1 линейную комбинацию классов бордизма $[N_\sigma]\in\varOmega^{\mathrm{SU}}_{2n-2}$, для которой s-число есть в точности $g(n)$. Эта линейная комбинация представляет полиномиальную образующую y_{n-1} кольца $\varOmega^{\mathrm{SU}}\bigl[\frac12\bigr]$, как описано в теореме 1.2. $\square$

На самом деле мы доказали *целочисленный* результат: каждый элемент $y_i\in\varOmega^{\mathrm{SU}}$ можно представить целочисленной линейной комбинацией классов бордизма многообразий Калаби–Яу N_σ. Этот элемент y_i является частью базиса абелевой группы $\varOmega^{\mathrm{SU}}_{2i}$. Здесь уместно задать следующий

Вопрос 2.5. Какие классы бордизма в $\varOmega^{\mathrm{SU}}$ имеют в качестве представителей многообразия Калаби–Яу?

Этот вопрос является SU-аналогом известной проблемы Хирцебруха: какие классы бордизма в $\varOmega^{\mathrm{U}}$ содержат связные (т.е. неприводимые) неособые алгебраические многообразия? Если убрать условие связности, то в любом классе U-бордизма положительной размерности содержится алгебраический представитель. Так как произведения и целочисленные положительные линейные комбинации алгебраических классов являются алгебраическими классами (возможно, несвязными), необходимо лишь в каждой размерности i найти алгебраические многообразия M и N с $s_i(M)=m_i$ и $s_i(N)=-m_i$ (см. теорему 1.1). Соответствующее рассуждение, изначально принадлежащее Дж. Милнору, приведено в [11, Ch. VII, p. 130 (с. 125 рус. пер.)]. Заметим, что в нем используются гиперповерхности в $\mathbb{C}P^n$ и вычисление, аналогичное лемме 1.5. В случае SU-бордизмов ситуация иная: если класс $a\in\varOmega^{\mathrm{SU}}$ представляется многообразием Калаби–Яу, то $-a$ не обязательно обладает этим свойством. Таким образом, для ответа на сформулированный выше вопрос необходимо установить, можно ли представить многообразиями Калаби–Яу одновременно элементы y_i и $-y_i$. В следующем разделе мы изучим этот вопрос в малых размерностях.

3. ОБРАЗУЮЩИЕ КОЛЬЦА SU-БОРДИЗМОВ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Здесь описываются геометрические представители — многообразия Калаби–Яу для образующих кольца SU-бордизмов в комплексных размерностях ≤ 4. Заметим, что при $i\ge 5$ каждая образующая $y_i\in\varOmega^{\mathrm{SU}}_{2i}$ представляется квазиторическим многообразием согласно результату из [7]. С другой стороны, любое квазиторическое SU-многообразие вещественной размерности ≤ 8 бордантно нулю согласно [4, Theorem 6.13].

Теорема 1.2 дает следующие значения s-числа для элементов $y_i\in\varOmega^{\mathrm{SU}}_{2i}$ при $i=2,3,4$:

$$s_2(y_2)=48,\qquad s_3(y_3)=m_3m_2=6,\qquad s_4(y_4)=2m_4m_3=20.$$

В действительности мы имеем

$$\varOmega^{\mathrm{SU}}_4=\mathbb{Z}\langle y_2\rangle,\qquad \varOmega^{\mathrm{SU}}_6=\mathbb{Z}\langle y_3\rangle,\qquad \varOmega^{\mathrm{SU}}_8=\mathbb{Z}\Bigl\langle \frac14 y_2^2, y_4\Bigr\rangle$$

(см. [11, p. 266 (с. 247 рус. пер.)]). Заметим, что 8 есть первая размерность, где начинает проявляться различие между $\varOmega^{\mathrm{SU}}$ и $\varOmega^{\mathrm{SU}}\bigl[\frac12\bigr]$ (за исключением элементов конечного порядка), так как квадрат четырехмерной образующей y_2 делится на 4. Заметим также, что y_2, y_3 и y_4 являются целочисленными базисными элементами в соответствующих размерностях.

Пример 3.1. Рассмотрим гиперповерхность Калаби–Яу $N_{(3)}\subset\mathbb{C}P^3$, соответствующую разбиению $\sigma=(3)$. Имеем $c_1(\mathcal{T}\mathbb{C}P^3)=4u$, где $u\in H^2(\mathbb{C}P^3;\mathbb{Z})$ есть каноническая образующая, двойственная гиперплоскому сечению. Следовательно, $N_{(3)}$ задается общим уравнением четвертой степени в однородных координатах на $\mathbb{C}P^3$. Стандартным примером является квартика $z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0$, которая представляет собой $K3$-поверхность. Лемма 1.5 дает

$$s_3(N_{(3)}) = \langle 4u^2 \cdot 4u - (4u)^3, [\mathbb{C}P^3] \rangle = -48,$$

так что $N_{(3)}$ представляет образующую $-y_2 \in \Omega_4^{\mathrm{SU}}$.

Заметим, что из теоремы 2.4 получается другой представитель для той же образующей $-y_2$. А именно, единственным разбиением числа $n = 3$, лежащим в классе $\widehat{P}(n)$, является $(1,1,1)$. Соответствующая гиперповерхность Калаби–Яу есть $N_{(1,1,1)} \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Имеем

$$c_1(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1) = 2u_1 + 2u_2 + 2u_3,$$

так что $N_{(1,1,1)}$ есть поверхность мультистепени $(2,2,2)$ в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Из леммы 2.1 получаем $s_3(N_{(1,1,1)}) = -\alpha(1,1,1) = -48$, т.е. многообразие $N_{(1,1,1)}$ также представляет класс $-y_2$.

С другой стороны, аддитивная образующая $y_2 \in \Omega_4^{\mathrm{SU}}$ не может быть представлена компактной комплексной поверхностью. Это доказано в [9, Theorem 3.2.5] на основе анализа классификации комплексных поверхностей. Легко видеть, что комплексная поверхность S с $H^1(S;\mathbb{Z}) = 0$ (что выполнено для канонических гиперповерхностей Калаби–Яу в торических многообразиях Фано) не может представлять класс y_2. Действительно, такая поверхность S имеет эйлерову характеристику $c_2(S) = \chi(S) \geq 2$, в то время как $s_2(y_2) = 48 = -2c_2(y_2)$, так что $c_2(y_2) = -24$ — отрицательное число.

В комплексной размерности 3 ситуация иная. Справедливо

Предложение 3.2. *В комплексной размерности* 3 *обе аддитивные образующие* y_3 *и* $-y_3$ *группы* Ω_6^{SU} *представляются каноническими гиперповерхностями Калаби–Яу в торических многообразиях Фано. А именно, такая гиперповерхность Калаби–Яу* N *представляет элемент* $\pm y_3$ *тогда и только тогда, когда ее числа Ходжа удовлетворяют соотношению*

$$h^{1,1}(N) - h^{2,1}(N) = \pm 1.$$

Для каждого числа $h^{1,1}$ *в пределах*

$$16 \leq h^{1,1} \leq 90$$

существует гиперповерхность Калаби–Яу N *со вторым числом Бетти* $b^2(N) = h^{1,1}$, *представляющая элемент* y_3. *Аналогично для каждого числа* $h^{1,1}$ *в пределах*

$$15 \leq h^{1,1} \leq 89$$

существует гиперповерхность Калаби–Яу N *со вторым числом Бетти* $b^2(N) = h^{1,1}$, *представляющая элемент* $-y_3$. *Более того, гиперповерхности Калаби–Яу, представляющие элементы* y_3 *и* $-y_3$, *можно выбрать зеркально двойственными в смысле* [1].

Доказательство. Для образующей $y_3 \in \Omega_6^{\mathrm{SU}}$ имеем $6 = s_3(y_3) = 3c_3(y_3)$, так что комплексное SU-многообразие N, представляющее класс y_3, должно иметь эйлерову характеристику $\chi(N) = c_3(N) = 2$. С другой стороны, если N является n-мерным кэлеровым многообразием, то $\chi(N) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i b^i = \sum_{p,q=0}^{n}(-1)^{p+q}h^{p,q}$, где $b^i = \sum_{p+q=i} h^{p,q}$ есть i-е число Бетти, а числа Ходжа удовлетворят соотношениям $h^{p,q} = h^{q,p}$ и $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$. Более того, для гиперповерхности Калаби–Яу N в торическом многообразии Фано имеются дополнительные соотношения $h^{0,0} = h^{n,0} = 1$ и $h^{i,0} = 0$ при $0 < i < n$ (см. [1, Theorem 4.1.9]). Поэтому в нашем случае $n = 3$ мы получаем

$$b^1 = 2h^{1,0} = 0, \qquad b^2 = 2h^{2,0} + h^{1,1} = h^{1,1}, \qquad b^3 = 2h^{3,0} + 2h^{2,1} = 2 + 2h^{2,1}$$

и

$$\chi(N) = 2b^0 - 2b^1 + 2b^2 - b^3 = 2(h^{1,1} - h^{2,1}).$$

Отсюда следует, что N представляет класс y_3 тогда и только тогда, когда $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$, и аналогично для $-y_3$.

Тот факт, что такое N существует, следует из анализа базы данных [6] рефлексивных многогранников и соответствующих им гиперповерхностей Калаби–Яу в торических многообразиях Фано. Эта база данных содержит полный список 473 800 776 рефлексивных многогранников в размерности 4, а также список чисел Ходжа соответствующих трехмерных многообразий Калаби–Яу. Отсюда мы извлекаем, что для каждого числа $h^{1,1}$, удовлетворяющего неравенствам $16 \le h^{1,1} \le 90$, существует рефлексивный четырехмерный многогранник, каноническое трехмерное многообразие Калаби–Яу для которого удовлетворяет соотношению $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$. Если же $h^{1,1}$ не попадает в эти пределы, то не существует трехмерного многообразия Калаби–Яу с $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$, происходящего из торического многообразия Фано. В случае соотношения $h^{1,1} - h^{2,1} = -1$ соответствующие пределы имеют вид $15 \le h^{1,1} \le 89$. Утверждение относительно зеркальной двойственности следует из того, что для зеркально двойственных трехмерных многообразий Калаби–Яу имеют место соотношения $h^{1,1}(N) = h^{2,1}(N^*)$ и $h^{2,1}(N) = h^{1,1}(N^*)$ (см. [1, Corollary 4.5.1]). $\square$

Пример 3.3. Из теоремы 2.4 получаются следующие представители для образующих $y_3 \in \Omega_6^{\mathrm{SU}}$ и $y_4 \in \Omega_8^{\mathrm{SU}}$:

$$y_3 = 15N_{(2,2)} - 19N_{(1,1,1,1)}, \qquad y_4 = 56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)}.$$

Как мы видели в предложении 3.2, образующая y_3, как и $-y_3$, представляется одним трехмерным многообразием Калаби–Яу N, соответствующим некоторому рефлексивному многограннику. Случай образующей y_4 будет рассмотрен в последующей работе.

Интересным аспектом геометрических образующих M малых размерностей в кольцах бордизмов Ω^{U} и Ω^{SU} является то, что свойства жесткости для родов Хирцебруха многообразий M с действием тора приводят к замечательным функциональным уравнениям. Подробности этой теории см. в [3, Sect. 9.7] и [2]. Случай торических многообразий Фано, соответствующих двумерным рефлексивным многогранникам, изучен в [2]; было бы интересно рассмотреть соответствующие уравнения в трехмерном и четырехмерном случаях.

Благодарности. Авторы благодарны В.М. Бухштаберу за полезные рекомендации и стимулирующие обсуждения результатов этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batyrev V.V.* Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties // J. Algebr. Geom. 1994. V. 3, N 3. P. 493–535.
2. *Бухштабер В.М.* Кобордизмы, многообразия с действием тора и функциональные уравнения // Наст. изд. С. 57–97.
3. *Buchstaber V.M., Panov T.E.* Toric topology. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2015. (Math. Surv. Monogr.; V. 204).
4. *Buchstaber V., Panov T., Ray N.* Toric genera // Int. Math. Res. Not. 2010. V. 2010, N 16. P. 3207–3262.
5. *Conner P.E., Floyd E.E.* Torsion in SU-bordism. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1966. (Mem. AMS; N 60).
6. *Kreuzer M., Skarke H.* Calabi–Yau data. http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/CY/.
7. *Lü Z., Panov T.* On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings // Algebr. Geom. Topol. 2016. V. 16, N 5. P. 2865–2893.
8. *Mosley J.E.* The greatest common divisor of multinomial coefficients: E-print, 2014. arXiv: 1411.0706 [math.NT].
9. *Mosley J.E.* In search of a class of representatives for SU-cobordism using the Witten genus: PhD Thesis. Lexington: Univ. Kentucky, 2016.
10. *Новиков С.П.* Гомотопические свойства комплексов Тома // Мат. сб. 1962. Т. 57, №4. С. 407–442.
11. *Stong R.E.* Notes on cobordism theory. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1968. (Math. Notes). Рус. пер.: *Стонг Р.* Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.