УДК 515.14+515.16

Т. Е. Панов

Роды Хирцебруха многообразий с действием тора

Квазиторическое многообразие представляет собой гладкое $2n$-многообразие M^{2n} с действием компактного тора T^n, причем действие локально изоморфно стандартному действию T^n на $\mathbb{C}^n$, а пространство орбит диффеоморфно как многообразие с углами некоторому простому многограннику P^n. Название объясняется тем, что по своим топологическим и комбинаторным свойствам квазиторические многообразия аналогичны неособым алгебраическим торическим многообразиям. В отличие от торических многообразий, квазиторические многообразия могут не быть комплексными, однако они всегда допускают стабильно (или слабо почти) комплексную структуру, и их классы кобордизмов порождают кольцо комплексных кобордизмов. Как было недавно показано В. М. Бухштабером и Н. Рэем, стабильно комплексная структура на квазиторическом многообразии определяется в чисто комбинаторных терминах, а именно ориентацией многогранника и функцией на множестве гиперграней многогранника, принимающей значения в примитивных векторах целочисленной решетки. Вычисляется χ_y-род квазиторического многообразия с фиксированной стабильно комплексной структурой в терминах соответствующих комбинаторных данных. В частности, приводятся явные формулы для классического рода Тодда и сигнатуры. Мы связываем наши результаты с известными фактами из теории торических многообразий.

Библиография: 17 наименований.

Введение

Многообразия с действием тора возникают в различных областях топологии, алгебраической и дифференциальной геометрии и математической физики. Специальные свойства действия тора или дополнительные структуры на многообразиях часто позволяют решать соответствующие задачи геометрическими или комбинаторными методами. Наиболее известными примерами здесь являются гамильтоновы действия тора в симплектической геометрии и торические многообразия в алгебраической геометрии. Оба случая допускают естественное топологическое обобщение, а именно *квазиторические многообразия*, введенные Дэвисом и Янушкиевичем в работе [11] (там был использован термин "торические многообразия" ("toric manifolds"), а термин "квазиторические многообразия" впервые появился в работе [7] ввиду причин, обсуждаемых ниже). Квазиторическое многообразие – многообразие с действием тора, которое удовлетворяет двум естественным условиям. Первое условие заключается в том, что действие локально выглядит как

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00090) и INTAS (грант № 96-0770).

© Т. Е. Панов, 2000

стандартное действие тора на комплексном пространстве диагональными матрицами. Если это условие выполнено, то пространство орбит является *многообразием с углами*. Второе условие заключается в том, что это многообразие с углами диффеоморфно выпуклому простому многограннику. Эти два свойства хорошо известны для неособых алгебраических торических многообразий [10], [13]. Квазиторические многообразия сохраняют большинство топологических и комбинаторных свойств неособых торических многообразий, однако при этом они могут не допускать комплексной структуры.

Как и торические многообразия, квазиторические многообразия можно определять в чисто комбинаторных терминах. А именно, каждое квазиторическое многообразие определяется комбинаторными данными: решеткой граней некоторого простого многогранника и *характеристической функцией*, которая сопоставляет каждой гиперграни некоторый целочисленный примитивный вектор, определенный с точностью до знака. Несмотря на простоту определения, квазиторические многообразия охватывают достаточно широкий класс многообразий (например, как было показано в [8], каждый класс комплексных кобордизмов содержит квазиторическое многообразие). Все это позволяет использовать квазиторические многообразия для решения топологических задач комбинаторными методами и наоборот. Многие из таких взаимосвязей были впервые открыты в теории торических многообразий. Некоторые новые приложения были получены в работах [6], [7], где квазиторические многообразия изучались в общем контексте "многообразий, определяемых простыми многогранниками". Другим красивым примером проявления взаимосвязей между топологией и комбинаторикой, возникающих в теории квазиторических многообразий, является вычисление KO-функтора квазиторического многообразия, проведенное в [4].

Здесь необходимо также заметить, что используемый нами термин "квазиторическое многообразие" не является общеупотребимым. Некоторые авторы, например Дэвис и Янушкиевич, называют объекты нашего изучения просто "торическими многообразиями" ("toric manifolds"). При этом термин "toric manifold" уже используется в алгебраической геометрии для обозначения неособых алгебраических торических многообразий (smooth toric varieties) – см., например, [3]. В силу этих причин мы предпочитаем использовать термин "квазиторические многообразия".

В настоящей работе мы вычисляем известный инвариант класса кобордизмов – χ_y-род – для квазиторических многообразий в терминах определяющих их комбинаторных данных. Наиболее важными частными случаями здесь являются сигнатура и род Тодда, которые соответствуют значениям $y = 1$ и $y = 0$. Сигнатура является инвариантом класса ориентированных кобордизмов и определена для любого ориентированного многообразия (мы полагаем сигнатуру многообразия равной нулю в размерностях, отличных от $4k$), в то время как определение рода Тодда, как и общего χ_y-рода, требует определения классов Чженя многообразия. Как уже отмечалось выше, квазиторическое многообразие может не быть комплексным, однако, как недавно было показано Бухштабером и Рэем [9], оно всегда допускает стабильно (или слабо почти) комплексную структуру. Более того, стабильно комплексные структуры (т.е. комплексные структуры в стабильном касательном расслоении) также определяются комбинаторно: они задаются ориентацией многогранника и выбором знаков векторов, соответствующих гиперграням. Это в свою очередь эквивалентно выбору ориентации самого многообразия и всех подмногообразий, соответствующих гиперграням. Квазиторическое многообразие с такой дополнительной структурой было названо в [9] *полиориентированным*. Таким образом, полиориентированное квазиторическое многообразие задает класс комплексных кобордизмов, и для него определены классы Чженя и комплексные роды Хирцебруха. Мы вычисляем χ_y-род полиориентированного квазиторического многообразия (т.е. с фиксированной стабильно комплексной структурой) в терминах его комбинаторных данных. Для этого мы строим специальное действие окружности, имеющее лишь изолированные неподвижные точки, и применяем обобщенную формулу Лефшеца, доказанную Атьей и Боттом в [1]. Полученная формула позволяет вычислять χ_y-род как сумму по всем вершинам многогранника некоторых величин, определяемых "локальной комбинаторикой" вблизи вершины. В эту формулу входит один внешний параметр (целочисленный примитивный вектор ν), который не влияет на ответ. В случае торических многообразий род Тодда (или арифметический род) всегда равен 1 (см. [13]). Тем не менее, в общем случае это не может быть выполнено, так как род Тодда является инвариантом комплексных кобордизмов, а каждый класс комплексных кобордизмов содержит квазиторическое многообразие [8].

Часть результатов данной работы была анонсирована в [17].

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность профессору В. М. Бухштаберу и профессору Найджелу Рэю за стимулирующие обсуждения, которые вдохновили некоторые идеи этой работы.

§ 1. Квазиторические многообразия и многогранники, векторы, соответствующие гиперграням и ребрам, и стабильно комплексные структуры

Здесь мы кратко обсуждаем определение квазиторических многообразий и вводим на них стабильно комплексные структуры, следуя [11] и [9]. Мы также описываем некоторые соотношения между набором комбинаторных данных, соответствующих квазиторическому многообразию, которые будут использованы в дальнейшем.

Под *выпуклым многогранником* P^n мы понимаем ограниченное подмножество размерности n в $\mathbb{R}^n$, задаваемое как пересечение конечного числа полупространств:

$$P^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle l_i, x\rangle \geqslant -a_i,\ i = 1, \dots, m\} \tag{1.1}$$

для некоторых $l_i \in (\mathbb{R}^n)^*$, $a_i \in \mathbb{R}$. Многогранник P^n называется *простым*, если ограничивающие его гиперплоскости находятся в общем положении в каждой вершине, т.е. в каждой вершине сходится в точности n граней коразмерности 1 (или *гиперграней*). Таким образом, каждая точка простого многогранника содержится в некоторой окрестности, аффинно изоморфной открытому подмножеству положительного конуса

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0\}.$$

Это означает в точности, что простой многогранник P^n является n-мерным *многообразием с углами*. Грани P^n всех размерностей образуют по отношению к включению частично упорядоченное множество – *решетку граней* P^n. Скажем, что два многогранника являются *комбинаторно эквивалентными*, если они имеют одинаковые решетки граней. Два многогранника являются комбинаторно эквивалентными тогда и только тогда, когда они диффеоморфны как многообразия с углами.

Пусть M^{2n} – компактное $2n$-мерное многообразие с действием компактного тора T^n. Тор T^n можно рассматривать как подгруппу комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$ стандартным образом:

$$T^n = \{(e^{2\pi i\varphi_1}, \dots, e^{2\pi i\varphi_n}) \in \mathbb{C}^n\},$$

где $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ пробегает все пространство $\mathbb{R}^n$. Это задает стандартную ориентацию на T^n. Скажем, что действие T^n *локально изоморфно стандартному* диагональному действию T^n на $\mathbb{C}^n$, если каждая точка $x \in M^{2n}$ содержится в некоторой T^n-инвариантной окрестности $U(x)$, для которой существует эквивариантный гомеоморфизм $f\colon U(x) \to W$ на некоторое (T^n-инвариантное) открытое подмножество $W \subset \mathbb{C}^n$. Последнее утверждение означает, что существует автоморфизм $\theta\colon T^n \to T^n$ такой, что $f(t \cdot y) = \theta(t)f(y)$ для всех $t \in T^n$, $y \in U(x)$. Пространство орбит для такого действия T^n является n-мерным многообразием с углами; мы будем называть M^{2n} *квазиторическим многообразием*, если пространство орбит диффеоморфно (как многообразие с углами) некоторому простому многограннику P^n. Таким образом, пространство орбит квазиторического многообразия представляется в виде объединения граней так, что точки из внутренности каждой k-грани соответствуют орбитам с одним и тем же стабилизатором коразмерности k. В частности, действие T^n является свободным над внутренностью P^n, в то время как вершины P^n соответствуют неподвижным точкам действия T^n на M^{2n}.

Пусть теперь M^{2n} – квазиторическое многообразие с пространством орбит P^n и $\mathscr{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ – множество всех граней коразмерности 1 (гиперграней) многогранника P^n, где m – число гиперграней в P^n. Внутренность каждой гиперграни F_i состоит из орбит, имеющих в качестве стабилизатора одну и ту же одномерную подгруппу $G_{F_i} \subset T^n$. Эта однопараметрическая подгруппа определяется целочисленным примитивным вектором $\lambda_i = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni})^T$ соответствующей решетки $L \simeq \mathbb{Z}^n$, а именно

$$G_{F_i} = \{(e^{2\pi i\lambda_{1i}\varphi}, \dots, e^{2\pi i\lambda_{ni}\varphi}) \in T^n\}, \tag{1.2}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$. Естественно, вектор λ_i определен лишь с точностью до знака. Таким образом мы можем ввести *характеристическую функцию* $\lambda\colon \mathscr{F} \to \mathbb{Z}^n$, переводящую гипергрань в соответствующий примитивный вектор. По определению квазиторического многообразия характеристическая функция удовлетворяет следующему условию: если n гиперграней $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ сходятся в одной вершине p, т.е. $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, то целочисленные векторы $\lambda(F_{i_1}), \dots, \lambda(F_{i_n})$ составляют целочисленный базис решетки $L \simeq \mathbb{Z}^n$. Как было показано в [11], характеристическая пара $(P^n, \lambda\colon \mathscr{F} \to \mathbb{Z}^n)$, удовлетворяющая предыдущему условию, определяет квазиторическое многообразие M^{2n} однозначно с точностью до эквивариантного диффеоморфизма. Как только нумерация гиперграней P^n фиксирована, характеристическую функцию можно рассматривать как целочисленную $(n \times$

m)-матрицу Λ, столбцами которой являются векторы $\lambda(F_i)$. Каждую вершину p многогранника P^n можно задать как пересечение n гиперграней: $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$.

Обозначим через $\Lambda_{(p)} = \Lambda_{(i_1,\dots,i_n)}$ максимальный минор матрицы Λ, образованный столбцами $i_1, \dots, i_n$. Тогда имеем

$$\det \Lambda_{(p)} = \det(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) = \pm 1. \tag{1.3}$$

Далее мы будем называть векторы $\lambda_i = \lambda(F_i)$ *векторами гиперграней*. Заметим еще раз, что на данный момент они определены лишь с точностью до знака.

Для того чтобы определить роды квазиторических многообразий нам понадобятся ориентация и стабильно комплексные структуры. Ориентируем многогранник P^n путем выбора ориентации в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$. Эта ориентация вместе со стандартной ориентацией тора T^n определяет ориентацию квазиторического многообразия M^{2n}. Конструкция характеристической функции λ включает в себя произвольный выбор знаков для векторов $\lambda(F_i)$. Прообраз $\pi^{-1}(F_i)$ грани F_i относительно проекции $\pi\colon M^{2n} \to P^n$ на пространство орбит является квазиторическим подмногообразием $M_i \subset M^{2n}$ коразмерности 2. Это подмногообразие остается неподвижным под действием одномерной подгруппы $G_{F_i} \subset T^n$ (см. (1.2)), которая, таким образом, действует в нормальном расслоении $\nu_i := \nu(M_i \subset M^{2n})$. Следовательно, мы можем ввести на ν_i структуру комплексного расслоения (а также ориентацию) путем выбора знака (т.е. одного из двух направлений) примитивного вектора $\lambda(F_i)$. Задав ориентацию M^{2n} (что эквивалентно заданию ориентации P^n) и ориентацию ν_i (т.е. выбрав знак λ_i), мы задаем ориентацию подмногообразия M_i, соответствующего гиперграни F_i. Ориентированное подмногообразие $M_i \subset M^{2n}$ коразмерности 2 задает при помощи стандартной топологической конструкции комплексное одномерное расслоение σ_i над M^{2n}, ограничение которого на M_i есть ν_i.

Следующая теорема доказана Бухштабером и Рэем в [9].

Теорема 1.1. *Для любого квазиторического многообразия M^{2n} имеет место следующий изоморфизм вещественных $2m$-расслоений*:

$$\tau(M^{2n}) \oplus \mathbb{R}^{2(m-n)} \simeq \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m.$$

Здесь $\tau(M^{2n})$ – касательное расслоение, а $\mathbb{R}^{2(m-n)}$ обозначает тривиальное $2(m-n)$-расслоение над M^{2n}.

Ориентированное квазиторическое многообразие M^{2n} с выбранными ориентациями подмногообразий $M_i = \pi^{-1}(F_i)$ было названо в [9] *полиориентированным*. Таким образом, знаки векторов гиперграней $\{\lambda_i\}$ полиориентированного квазиторического многообразия могут быть определены однозначно. Теорема 1.1 позволяет ввести на полиориентированном квазиторическом многообразии каноническую стабильно комплексную структуру. Итак, ориентированный простой многогранник P^n с характеристической матрицей Λ не только определяет (полиориентированное) квазиторическое многообразие, но также выделяет класс в кольце комплексных кобордизмов Ω_U.

Пусть E_j – ребро (одномерная грань) P^n. Точки из внутренности E_j соответствуют орбитам с одним и тем же $(n-1)$-мерным стабилизатором G_{E_j}. Эту подгруппу можно записать в виде

$$G_{E_j} = \bigl\{ \bigl(e^{2\pi i\varphi_1}, \dots, e^{2\pi i\varphi_n}\bigr) \in T^n \colon \mu_{1j}\varphi_1 + \dots + \mu_{nj}\varphi_n = 0 \bigr\}, \qquad (1.4)$$

т.е. G_{E_j} определяется примитивным (ко)вектором $\mu_j = (\mu_{1j}, \dots, \mu_{nj})^T$ в двойственной (или весовой) решетке $W = L^*$. Мы назовем μ_j *вектором ребра* E_j. Он определен лишь с точностью до знака. Векторы ребер удовлетворяют условию, аналогичному условию для векторов гиперграней: если $E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$ – ребра, сходящиеся в одной вершине p, то

$$\det \mathrm{M}_{(p)} = \det(\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}) = \pm 1. \qquad (1.5)$$

Здесь $\mathrm{M}_{(p)}$ обозначает квадратную матрицу со столбцами $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$. Предыдущее равенство означает, что векторы $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$ составляют целочисленный базис решетки $W \simeq \mathbb{Z}^n$.

Заметим, что нет канонического способа выбора знаков векторов ребер для всех ребер одновременно. Однако следующая лемма позволяет однозначно выбрать знаки векторов ребер для полиориентированного квазиторического многообразия "локально" в каждой вершине.

Лемма 1.2. *Для каждой вершины p многогранника P^n знаки векторов ребер $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$, сходящихся в p, можно выбрать таким образом, что*

$$\mathrm{M}_{(p)}^T \cdot \Lambda_{(p)} = \mathrm{E},$$

где E *обозначает единичную матрицу, а матрицы* $\Lambda_{(p)}$, $\mathrm{M}_{(p)}$ *имеют тот же вид, что и в* (1.3), (1.5). *Другими словами, наборы векторов* $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$ *и* $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ *образуют сопряженные базисы.*

Доказательство. Так как нас интересуют лишь векторы гиперграней и ребер, сходящихся в вершине $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, мы можем перенумеровать векторы ребер $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$ в вершине p индексами $\{i_1, \dots, i_n\}$ векторов гиперграней, сходящихся в p. А именно, положим $j_k = i_k$, если $E_{j_k} \not\subset F_{i_k}$ (т.е. вектор гиперграни и вектор ребра будут иметь один и тот же индекс, если соответствующие гипергрань и ребро P^n порождают все $\mathbb{R}^n$). Тогда при $k \ne l$ имеем $E_{i_k} \subset F_{i_l}$. Следовательно, $G_{F_{i_l}} \subset G_{E_{i_k}}$ и

$$\langle \mu_{i_k}, \lambda_{i_l} \rangle = 0, \qquad k \ne l \qquad (1.6)$$

(см. (1.2) и (1.4)). Далее, так как μ_{i_k} – примитивный вектор, из (1.6) вытекает, что $\langle \mu_{i_k}, \lambda_{i_k} \rangle = \pm 1$. Изменяя, если необходимо, знак μ_{i_k}, мы получаем

$$\langle \mu_{i_k}, \lambda_{i_k} \rangle = 1, \qquad (1.7)$$

что вместе с (1.6) дает $\mathrm{M}_{(p)}^T \cdot \Lambda_{(p)} = \mathrm{E}$, как и требуется.

Далее мы будем предполагать, что как только на квазиторическом многообразии фиксирована стабильно комплексная структура (т.е. выбраны знаки столбцов характеристической $(n \times m)$-матрицы Λ), знаки векторов ребер выбираются локально в каждой вершине, как описано в лемме 1.2.

Ориентация многогранника P^n индуцирует положительный порядок ребер в каждой вершине p, т.е. порядок, при котором векторы, направленные вдоль ребер от вершины p, образуют положительно ориентированный базис в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем мы будем предполагать, что как только ориентация M^{2n} (эквивалентно, ориентация P^n) зафиксирована, для каждой вершины p векторы ребер $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}$ в p упорядочены таким образом, что соответствующий порядок ребер положителен. В этой ситуации сами векторы ребер $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}$ могут составлять положительно либо отрицательно ориентированный базис $\mathbb{R}^n$. Таким образом, задав ориентацию многогранника P^n и знаки векторов ребер в соответствии с леммой 1.2, мы приходим к следующему определению.

Определение 1.3. Для данного полиориентированного квазиторического многообразия M^{2n} с пространством орбит P^n определим *знак* вершины $p \in P^n$ как

$$\sigma(p) = \det \mathrm{M}_{(p)} = \det(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}),$$

где $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}$ – канонически упорядоченные векторы ребер, сходящихся в p.

Лемма 1.2 показывает, что

$$\sigma(p) = \det \Lambda_{(p)} = \det(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}),$$

где $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ – векторы гиперграней, сходящихся в p. Заметим, что приведенное выше определение знака вершины также появлялось в [12] при изучении характеристических функций и квазиторических многообразий над заданным простым многогранником.

Как уже отмечалось во введении, квазиторические многообразия могут рассматриваться как топологическое обобщение неособых алгебраических *торических многообразий*. Торическое многообразие [10] – это нормальное алгебраическое многообразие, на котором имеется действие комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$ со всюду плотной орбитой. Любое неособое проективное торическое многообразие является квазиторическим. Каждое такое торическое многообразие получается при помощи стандартной процедуры (см. [13]) из простого многогранника (1.1) в $\mathbb{R}^n$ с вершинами в точках целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (такие многогранники называются *целочисленными*).

Нормальные ковекторы l_i гиперграней целочисленного многогранника P^n могут быть выбраны целочисленными и примитивными. Торическое многообразие M_P, получаемое из целочисленного простого многогранника P^n, является проективным и имеет комплексную размерность n. Компактный тор $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$ действует на M_P с пространством орбит P^n; более того, существует отображение из M_P в $\mathbb{R}^n$, постоянное на T^n-орбитах, образом которого является P^n (*отображение моментов*). Многообразие M_P является неособым, если для любой вершины $p \in P^n$ нормальные ковекторы l_{i_k}, $k = 1, \dots, n$, гиперграней, содержащих p, составляют целочисленный базис двойственной решетки. Это есть в точности условие того, что отображение, ставящее в соответствие гиперграни F_i вектор l_i, является характеристической функцией. Легко видеть, что это есть именно характеристическая функция многообразия M_P, рассматриваемого как квазиторическое многообразие (или обратно, квазиторическое многообразие, соответствующее этой характеристической функции, эквивариантно диффеоморфно M_P).

Таким образом, векторы гиперграней многообразия M_P есть просто нормальные (ко)векторы соответствующего многогранника P^n. Векторами ребер тогда являются примитивные целочисленные векторы вдоль ребер P^n. Кратко это можно сформулировать так: в случае торического M_P "векторы гиперграней" – это "векторы, нормальные к гиперграням", а "векторы ребер" – это "векторы вдоль ребер". Лемма 1.2 в этом случае утверждает, что если ребро содержится в гиперграни, то вектор вдоль ребра ортогонален нормальному вектору гиперграни, а если ребро не содержится в гиперграни, то знаки соответствующих векторов могут быть выбраны таким образом, чтобы их скалярное произведение было равно 1. Так как торическое многообразие M_P является комплексным, в его касательном расслоении имеется каноническая комплексная структура. Можно показать, что эта комплексная структура, рассматриваемая как стабильно комплексная структура на квазиторическом многообразии, соответствует выбору знаков векторов гиперграней l_i, при котором все они "направлены внутрь многогранника P^n". Локальный выбор знаков, определяемый леммой 1.2 для векторов ребер, соответствует тому, что все они "направлены от вершины". Заметим, что глобально лемма 1.2 дает два знака, соответствующих ребру, по одному для каждого из его концов. Эти знаки всегда различны в случае торических многообразий, однако в общем случае это неверно. Заметим также, что так как вектор ребра для торического многообразия есть вектор вдоль ребра, направленный от вершины, для любой вершины p в этом случае имеет место $\sigma(p) = 1$ (см. определение 1.3).

§ 2. Действие окружности с изолированными неподвижными точками на квазиторическом многообразии

В этом параграфе мы показываем, что существует одномерная подгруппа тора T^n, действующая на квазиторическом многообразии с изолированными неподвижными точками, соответствующими вершинам простого многогранника. Это действие будет использовано в дальнейшем для вычисления χ_y-рода как суммы вкладов неподвижных точек (при помощи формул Атьи–Ботта и Атьи–Хирцебруха).

Итак, пусть задано полиориентированное квазиторическое многообразие M^{2n} с пространством орбит P^n и векторами ребер $\{\mu_i\}$. Таким образом, многообразие M^{2n} снабжено стабильно комплексной структурой, как описано в предыдущем параграфе.

Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ – целочисленный примитивный вектор такой, что

$$\langle \mu, \nu \rangle \neq 0 \quad \text{для любого вектора ребра} \quad \mu. \tag{2.1}$$

Вектор ν определяет одномерную ориентированную подгруппу

$$T_\nu := \bigl\{ \bigl(e^{2\pi i \nu_1 \varphi}, \dots, e^{2\pi i \nu_n \varphi}\bigr) \in T^n \colon \varphi \in \mathbb{R} \bigr\}.$$

Теорема 2.1. *Для любого примитивного вектора ν, удовлетворяющего условию* (2.1), *окружность T_ν действует на M^{2n} с лишь изолированными неподвижными точками* (*соответствующими вершинам многогранника P^n*).

В касательном пространстве T_pM^{2n} в неподвижной точке, соответствующей вершине $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, это действие индуцирует представление S^1 с весами $\langle \mu_{i_1}, \nu \rangle, \dots, \langle \mu_{i_n}, \nu \rangle$.

Доказательство. Рассмотрим действие T^n вблизи неподвижной точки $p \in M^{2n}$, соответствующей вершине $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ многогранника P^n. Действие T^n индуцирует унитарное T^n-представление в касательном пространстве T_pM^{2n}. Выберем комплексные координаты $(x_1, \dots, x_n)$ в T_pM^{2n}, в которых касательная прямая к двумерному подмногообразию $\pi^{-1}(E_{i_k}) \subset M^{2n}$ в точке p задается уравнениями $x_1 = \dots = \widehat{x_k} = \dots = x_n = 0$ (x_k пропущено). Соответствующий стабилизатор $G_{E_{i_k}} \subset T^n$ задается уравнением $\langle \mu_{i_k}, \varphi \rangle = 0$ в T^n (см. (1.4)). Следовательно, веса T^n-представления суть $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}$, т.е. элемент $t = \left(e^{2\pi i \varphi_1}, \dots, e^{2\pi i \varphi_n}\right) \in T^n$ действует в T_pM^{2n} как

$$
\begin{aligned}
t \cdot (x_1, \dots, x_n) &= \left(e^{2\pi i(\mu_{1i_1}\varphi_1 + \dots + \mu_{ni_1}\varphi_n)} x_1, \dots, e^{2\pi i(\mu_{1i_n}\varphi_1 + \dots + \mu_{ni_n}\varphi_n)} x_n\right) \\
&= \left(e^{2\pi i \langle \mu_{i_1}, \Phi \rangle} x_1, \dots, e^{2\pi i \langle \mu_{i_n}, \Phi \rangle} x_n\right),
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где $(x_1, \dots, x_n) \in T_pM^{2n}$, $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Как следует из (2.2), окружность T_ν действует на T_pM^{2n} как

$$
s \cdot (x_1, \dots, x_n) = \left(e^{2\pi i \langle \mu_{i_1}, \nu \rangle \varphi} x_1, \dots, e^{2\pi i \langle \mu_{i_n}, \nu \rangle \varphi} x_n\right),
$$

где $s = e^{2\pi i \varphi} \in S^1$. Неподвижная точка p является изолированной, если все веса $\langle \mu_{i_1}, \nu \rangle, \dots, \langle \mu_{i_n}, \nu \rangle$ соответствующего S^1-действия ненулевые. Поэтому если $\langle \mu_i, \nu \rangle \neq 0$ для всех векторов ребер, то действие S^1 на M^{2n}, определяемое вектором ν, имеет лишь изолированные неподвижные точки.

Заметим, что условие $\langle \mu_i, \nu \rangle \neq 0$ для всех μ_i из предыдущей теоремы означает, что примитивный вектор ν является “вектором общего положения”. В случае неособого торического многообразия, определяемого целочисленным простым многогранником P^n, это условие означает, что вектор ν не является ортогональным ни к какому ребру P^n (или, эквивалентно, никакая нормальная к ν гиперплоскость не пересекает P^n по грани размерности > 0).

В следующем параграфе нам также понадобится следующее определение.

Определение 2.2. Пусть примитивный вектор ν удовлетворяет условию (2.1). Определим *индекс* вершины $p \in P^n$ как число отрицательных весов представления S^1 в T_pM^{2n} из теоремы 2.1. Таким образом, если $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, то

$$
\operatorname{ind}_\nu(v) = \{\#k : \langle \mu_k, \nu \rangle < 0\}.
$$

Следующая лемма показывает, что индекс вершины p можно определить непосредственно в терминах векторов гиперграней, сходящихся в p, не прибегая к вычислению векторов ребер.

Лемма 2.3. *Пусть $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ – вершина P^n. Тогда индекс $\operatorname{ind}_\nu(p)$ равен числу отрицательных коэффициентов в представлении вектора ν в виде линейной комбинации базисных векторов $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$.*

Доказательство. Из леммы 1.2 вытекает, что для любой вершины $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ имеет место равенство

$$\nu = \langle \mu_{i_1}, \nu \rangle \lambda_{i_1} + \dots + \langle \mu_{i_n}, \nu \rangle \lambda_{i_n}.$$

Тогда лемма следует из определения $\mathrm{ind}_\nu(p)$.

§ 3. Формулы для χ_y-рода, сигнатуры и рода Тодда

Здесь мы вычисляем χ_y-род полиориентированного квазиторического многообразия в терминах его характеристической пары (P^n, Λ). Для этого мы применяем формулу Атьи–Хирцебруха для построенного в предыдущем параграфе действия окружности. Мы также отдельно рассматриваем важнейшие частные случаи сигнатуры и рода Тодда.

Теорема 3.1. *Пусть M^{2n} – полиориентированное квазиторическое многообразие и $\nu \in \mathbb{Z}^n$ – целочисленный примитивный вектор такой, что $\langle \mu, \nu \rangle \neq 0$ для всех векторов ребер μ. Тогда имеет место следующая формула для χ_y-рода многообразия M^{2n}:*

$$\chi_y(M^{2n}) = \sum_{p \in P^n} (-y)^{\mathrm{ind}_\nu(p)} \sigma(p),$$

где сумма берется по всем вершинам многогранника P^n, а $\sigma(p)$ и $\mathrm{ind}_\nu(p)$ задаются определениями 1.3 и 2.2.

Доказательство. Согласно формуле Атьи–Хирцебруха (см. [2], а также [16], где эта формула получена в рамках теории кобордизмов) χ_y-род стабильно комплексного многообразия X с действием S^1 вычисляется как

$$\chi_y(X) = \sum_i (-y)^{n(F_i)} \chi_y(F_i), \tag{3.1}$$

где сумма берется по всем неподвижным подмногообразиям $F_i \subset X$, а $n(F_i)$ обозначает количество отрицательных весов представления S^1 в нормальном расслоении к $F_i \subset X$. В нашем случае все неподвижные подмногообразия являются изолированными неподвижными точками, соответствующими вершинам $p \in P^n$. Поэтому $\chi_y(F_i) = \chi_y(p) = \pm 1$ в зависимости от того, совпадает ли ориентация $\mathbb{R}^n$, определяемая базисом $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}$, с исходной ориентацией многогранника P^n. Следовательно, для квазиторического многообразия M^{2n} мы можем заменить $\chi_y(F_i)$ на $\sigma(p)$ в формуле (3.1). Теорема 2.1 показывает, что веса индуцированного S^1-представления в T_pM^{2n} равны $\langle \mu_{i_1}, \nu \rangle, \dots, \langle \mu_{i_n}, \nu \rangle$. Поэтому $n(F_i)$ в формуле (3.1) есть в точности $\mathrm{ind}_\nu(p)$ (см. определение 2.2), откуда и вытекает требуемая формула.

Для любого $2n$-мерного стабильно комплексного многообразия M^{2n} значение χ_y-рода $\chi_y(M^{2n})$ при $y = -1$ есть n-е число Чженя $c_n[M^{2n}]$. Из теоремы 3.1 вытекает

$$c_n[M^{2n}] = \sum_{p \in P^n} \sigma(p). \tag{3.2}$$

В случае комплексного M^{2n} (например, если M^{2n} является неособым торическим многообразием) мы имеем $\sigma(p) = 1$ для всех вершин $p \in P^n$, а $c_n[M^{2n}]$ равно эйлеровой характеристике $e(M^{2n})$. Таким образом, для комплексных многообразий M^{2n} эйлерова характеристика равна числу вершин многогранника P^n (что хорошо известно для торических многообразий). Для общего квазиторического многообразия M^{2n} эйлерова характеристика также равна числу вершин P^n (на самом деле эйлерова характеристика произвольного S^1-многообразия равна сумме эйлеровых характеристик неподвижных подмногообразий), однако это число может отличаться от $c_n[M^{2n}]$.

Значение $y = 1$ для χ_y-рода соответствует сигнатуре (или L-роду). Теорема 3.1 в этом случае дает

Следствие 3.2. *Сигнатура полиориентированного квазиторического многообразия M^{2n} вычисляется по формуле*

$$\operatorname{sign}(M^{2n}) = \sum_{p \in P^n} (-1)^{\operatorname{ind}_\nu(p)} \sigma(p),$$

где сумма берется по всем вершинам многогранника P^n.

Будучи инвариантом класса ориентированных кобордизмов сигнатура квазиторического многообразия M^{2n} не зависит от стабильно комплексной структуры (т.е. от выбора знаков векторов гиперграней) и определяется лишь ориентацией M^{2n} (или P^n). Это можно увидеть непосредственно из наших конструкций. Действительно, мы выбирали знаки векторов ребер в каждой вершине, как описано в лемме 1.2. Тогда следствие 3.2 утверждает, что сигнатура может быть вычислена как сумма по всем вершинам величин $(-1)^{\operatorname{ind}_\nu(p)} \sigma(p)$, где $\operatorname{ind}_\nu(p)$ – число отрицательных скалярных произведений $\langle \mu_{i_k}, \nu \rangle$, а $\sigma(p) = \det(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n})$ равно 1, если ориентация T_pM^{2n}, определяемая стандартным представлением T^n, совпадает с ориентацией, определяемой представлением с весами $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}$, а иначе равно -1. Вместо этого мы можем выбрать знаки векторов ребер таким образом, что *все* скалярные произведения с ν положительны. Тогда мы, очевидно, имеем

$$(-1)^{\operatorname{ind}_\nu(p)} \sigma(p) = \det(\tilde{\mu}_{i_1}, \dots, \tilde{\mu}_{i_n}),$$

где $\tilde{\mu}_{i_k} = \pm \mu_{i_k}$ и $\langle \tilde{\mu}_{i_k}, \nu \rangle > 0$, $k = 1, \dots, n$. Заметим, что правая часть предыдущего равенства не зависит от выбора знаков векторов гиперграней (т.е. от стабильно комплексной структуры). Итак, мы приходим к следующему следствию.

Следствие 3.3. *Сигнатура ориентированного квазиторического многообразия M^{2n} может быть вычислена как*

$$\operatorname{sign}(M^{2n}) = \sum_{p \in P^n} \det(\tilde{\mu}_{i_1}, \dots, \tilde{\mu}_{i_n}),$$

где $\{\tilde{\mu}_{i_k}\}$ – векторы ребер, сходящихся в p, знаки которых выбраны так, что $\langle \tilde{\mu}_{i_k}, \nu \rangle > 0$, $k = 1, \dots, n$.

В случае неособого торического многообразия M_P мы имеем $\sigma(p) = 1$ для всех вершин $p \in P^n$, и следствие 3.2 дает нам

$$\operatorname{sign}(M_P) = \sum_{p \in P^n} (-1)^{\operatorname{ind}_\nu(p)}. \tag{3.3}$$

Скалярное произведение с вектором ν можно рассматривать как аналог морсовской функции высоты на многограннике $P^n \subset \mathbb{R}^n$, определяемом формулой (1.1) (см. [5], [15] и [11]). Так как вектор ν не ортогонален никакому ребру P^n, мы можем ориентировать ребра P^n таким образом, что скалярное произведение с ν возрастает вдоль ребра. Тогда индекс вершины p есть просто число входящих ребер (т.е. ребер, направленных к p). Простое комбинаторное рассуждение [5, с. 180] показывает, что число вершин, у которых число входящих ребер есть в точности k, равно h_k, где $(h_0, h_1, \dots, h_n)$ – так называемый *h-вектор* многогранника P^n, определяемый из уравнения

$$h_0 t^n + \dots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \dots + f_{n-1},$$

где f_k – число граней P^n коразмерности $(k+1)$. Как хорошо известно [13], число h_k равно $2k$-му числу Бетти торического многообразия M_P (это также верно для общих квазиторических многообразий [11], но здесь нам этот факт не потребуется). Далее, используя формулу (11), мы получаем, что сигнатура неособого торического многообразия M_P есть

$$\operatorname{sign}(M_P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h_k.$$

Эту формулу можно также получить из структуры Ходжа в когомологиях M_P. Однако наши рассуждения показывают, что этот результат имеет чисто топологическую природу.

Следующий важный частный случай χ_y-рода – это род Тодда, соответствующий значению $y = 0$. В этом случае слагаемые в формуле из теоремы 3.1, соответствующие вершинам, имеющим индекс 0, не определены, поэтому здесь необходим дополнительный анализ.

Теорема 3.4. *Род Тодда полиориентированного квазиторического многообразия вычисляется по формуле*

$$\operatorname{td}(M^{2n}) = \sum_{\substack{p \in P^n \\ \operatorname{ind}_\nu(p)=0}} \sigma(p)$$

(*сумма берется по всем вершинам индекса* 0) *для любого примитивного вектора ν такого, что $\langle \mu, \nu \rangle \neq 0$ для всех векторов ребер μ.*

Доказательство. Для любой вершины $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ многогранника P^n стабильно комплексная структура на M^{2n}, определяемая характеристической парой (P^n, Λ), задает комплексную структуру в касательном пространстве $T_p M^{2n}$ при помощи изоморфизма

$$T_p M^{2n} \simeq \sigma_{i_1} \oplus \dots \oplus \sigma_{i_n} \tag{3.4}$$

(см. теорему 1.1). Действие $T_\nu \cong S^1$ на M^{2n} индуцирует комплексное представление окружности в $T_p M^{2n}$ с весами $w_1(p) = \langle \mu_{i_1}, \nu \rangle, \dots, w_n(p) = \langle \mu_{i_n}, \nu \rangle$ (знаки векторов ребер определяются леммой 1.2). Обобщенная формула Лефшеца, полученная Атьей и Боттом в [1] (см. также [14]), дает следующее выражение для *эквивариантного χ_y-рода* многообразия M^{2n}:

$$\chi_y(q, M^{2n}) = \sum_{p \in P^n} \prod_{i=1}^{k} \frac{1 + y q^{w_k(p)}}{1 - q^{w_k(p)}} \sigma(p), \tag{3.5}$$

где $q = e^{2\pi i \varphi} \in S^1$, а $\sigma(p) = \det(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}) = \pm 1$ в зависимости от того, совпадает или не совпадает ориентация $T_p M^{2n}$, определяемая (3.4), с ориентацией, определяемой исходной ориентацией M^{2n}. Заметим, что знак $\sigma(p)$ равен 1 для всех вершин, если M^{2n} является комплексным многообразием (например, гладким торическим многообразием). Теорема Атьи и Хирцебруха [2] утверждает, что предыдущее выражение для $\chi_y(q, M^{2n})$ не зависит от q и равно $\chi_y(M^{2n})$. Тогда, переходя к пределу в правой части (3.5) при $q \to 0$, мы получаем формулу Атьи и Хирцебруха (3.1) для $y \neq 0$ (так как $\lim_{q\to 0}$ от каждого слагаемого в (3.5) есть в точности $(-y)^{\mathrm{ind}(p)}\sigma(p)$). В случае $y = 0$ (род Тодда) тот же самый предел для слагаемого, соответствующего вершине p, равен нулю, если найдется хотя бы один $w_k(p) < 0$, а иначе равен 1. Это есть в точности то, что утверждается в теореме.

Что же касается рода Тодда для неособых торических многообразий, легко видеть, что в этом случае имеется лишь одна вершина индекса нуль. Действительно, если ориентировать ребра многогранника при помощи скалярного произведения с ν (см. обсуждения после следствия 3.3), то лишь одна “самая нижняя” вершина будет иметь все исходящие ребра, т.е. индекс нуль. Так как мы имеем $\sigma(p) = 1$ для всех вершин $p \in P^n$, теорема 3.4 дает $\mathrm{td}(M_P) = 1$, что хорошо известно (см., например, [13]).

В заключение мы рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих наши результаты. Все наши примеры соответствуют полиориентированным четырехмерным квазиторическим многообразиям. Таким образом, все векторы гиперграней определены однозначно, а знаки векторов ребер определены “локально” вблизи каждой вершины в соответствии с леммой 1.2. На рисунках мы изображаем многогранник (в данном случае многоугольник), векторы гиперграней и ребер, а также ориентацию многогранника (которая в данном случае задается направлением обхода вершин).

Рис. 1 соответствует многообразию $\mathbb{C}P^2$, рассматриваемому как торическое многообразие. Таким образом, стабильно комплексная структура определяется стандартной комплексной структурой на $\mathbb{C}P^2$, т.е. изоморфизмом расслоений $\tau(\mathbb{C}P^2) \oplus \mathbb{C} \simeq \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \bar\eta$, где $\mathbb{C}$ – тривиальное одномерное комплексное расслоение, а η – хопфовское расслоение над $\mathbb{C}P^2$. Ориентация происходит из комплексной структуры. Как уже обсуждалось выше, торическое многообразие $\mathbb{C}P^2$ может быть получено из целочисленного многогранника (двумерного симплекса с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$). Векторы гиперграней в этом случае суть примитивные нормальные векторы к гиперграням, направленные внутрь многогранника, а векторы ребер – примитивные векторы вдоль ребер, исходящие из вершины. Это и изображено на рис. 1. Вычислим род Тодда и сигнатуру при помощи следствия 3.2 и теоремы 3.4. Мы имеем $\sigma(p_1) = \sigma(p_2) = \sigma(p_3) = 1$. Возьмем $\nu = (1,2)$. Тогда $\mathrm{ind}(p_1) = 0$,

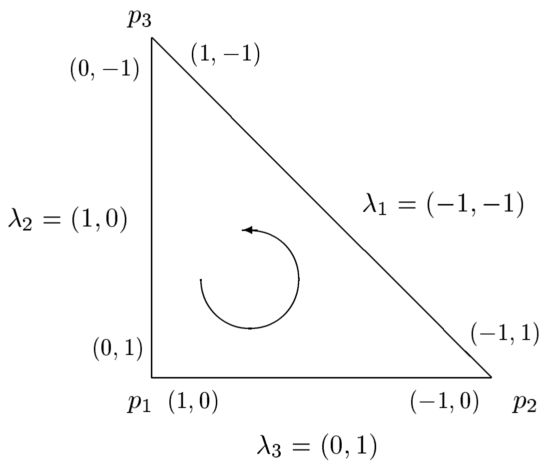

Рис. 1. Комплексная структура $\tau(\mathbb{C}P^2) \oplus \mathbb{C} \simeq \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \bar\eta$

$\operatorname{ind}(p_2) = 1$, $\operatorname{ind}(p_3) = 2$ (индекс есть число отрицательных скалярных произведений векторов ребер с ν). Таким образом,

$$\operatorname{sign}(\mathbb{C}P^2) = \operatorname{sign}(\mathbb{C}P^2, \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \bar\eta) = 1,$$
$$\operatorname{td}(\mathbb{C}P^2) = \operatorname{td}(\mathbb{C}P^2, \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \bar\eta) = 1.$$

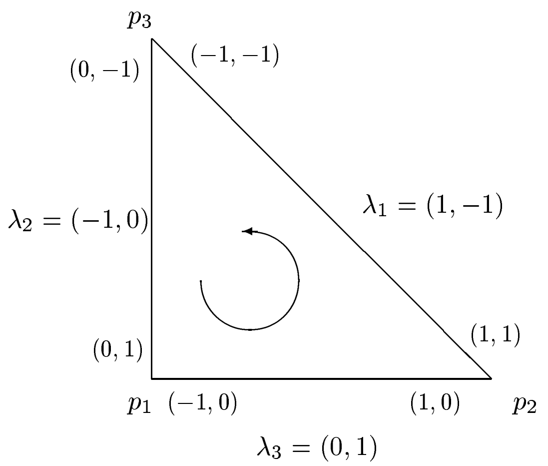

Рис. 2. Комплексная структура $\tau(\overline{\mathbb{C}P}^2) \oplus \mathbb{C} \simeq \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \bar\eta$

Если в конфигурации рис. 1 изменить ориентацию многоугольника, то знаки вершин сменятся на противоположные: $\sigma(p_1) = \sigma(p_2) = \sigma(p_3) = -1$, а индексы вершин не изменятся. Это соответствует изменению канонической ориентации $\mathbb{C}P^2$ на противоположную. Обозначая получаемое многообразие $\overline{\mathbb{C}P}^2$, мы получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\overline{\mathbb{C}P}^2) &= \operatorname{sign}(\overline{\mathbb{C}P}^2, \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \bar\eta) = -1, \\ \operatorname{td}(\overline{\mathbb{C}P}^2) &= \operatorname{td}(\overline{\mathbb{C}P}^2, \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \bar\eta) = -1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ту же самую стабильно комплексную структуру можно получить, оставляя ориентацию многогранника неизменной, но изменяя векторы гиперграней, как показано на рис. 2. Здесь мы имеем

$$\sigma(p_1) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad \sigma(p_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad \sigma(p_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Снова можем положить $\nu = (1,2)$; тогда $\operatorname{ind}(p_1) = 1$, $\operatorname{ind}(p_2) = 0$, $\operatorname{ind}(p_3) = 2$, откуда вытекают формулы (3.6).

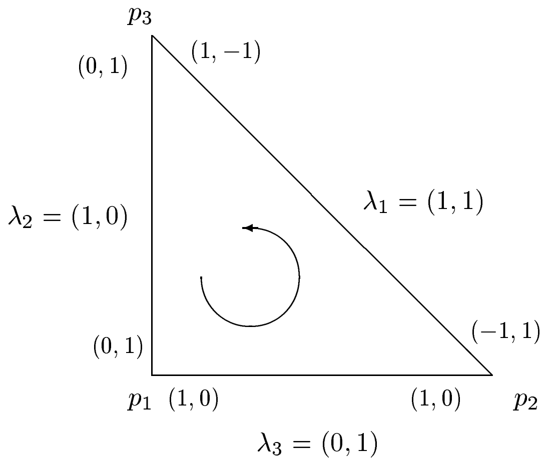

Рис. 3. Комплексная структура $\tau(\mathbb{C}P^2) \oplus \mathbb{C} \simeq \eta \oplus \bar{\eta} \oplus \bar{\eta}$

Наконец, наш третий пример (рис. 3) изображает $\mathbb{C}P^2$ со стандартной ориентацией и стабильно комплексной структурой, определяемой отождествлением $\tau(\mathbb{C}P^2) \oplus \mathbb{C} \simeq \eta \oplus \bar{\eta} \oplus \bar{\eta}$ (это соответствует смене знака первого вектора гиперграни на рис. 1). Здесь мы имеем

$$\sigma(p_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \sigma(p_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad \sigma(p_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Полагая $\nu = (1,2)$, находим $\operatorname{ind}(p_1) = 0$, $\operatorname{ind}(p_2) = 0$, $\operatorname{ind}(p_3) = 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\mathbb{C}P^2, \eta \oplus \bar{\eta} \oplus \bar{\eta}) &= 1, \\ \operatorname{td}(\mathbb{C}P^2, \eta \oplus \bar{\eta} \oplus \bar{\eta}) &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае формула (3.2) дает

$$c_n(\mathbb{C}P^2, \eta \oplus \bar{\eta} \oplus \bar{\eta})[\mathbb{C}P^2] = \sigma(p_1) + \sigma(p_2) + \sigma(p_3) = -1$$

(это можно также проверить непосредственно), что не совпадает с эйлеровой характеристикой $\mathbb{C}P^2$, равной $c_n(\mathbb{C}P^2, \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \bar{\eta})[\mathbb{C}P^2] = 3$.

Список литературы

1. *Atiyah M. F., Bott R.* A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I // Ann. of Math. 1967. V. 86. № 2. P. 374–407.
2. *Atiyah M. F., Hirzebruch F.* Spin-manifolds and group actions. Essays in Topology and Related Topics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1970.
3. *Batyrev V. V.* Quantum Cohomology Rings of Toric Manifolds // Journées de Géometrie Algébrique d'Orsay (Juillet 1992). Astérisque. V. 218. Paris: Sociéte Mathématique de France, 1993. P. 9–34; доступно в Интернет `http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9310004`.
4. *Bahri A., Bendersky M.* The KO-theory of toric manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 3. P. 1191–1202; доступно в Интернет `http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/9904087`.
5. *Бренстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
6. *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками // УМН. 1998. Т. 53. №3. С. 195–196.
7. *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Действия тора и комбинаторика многогранников // Тр. МИРАН. 1999. Т. 225. С. 96–131; доступно в Интернет `http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/9909166`.
8. *Бухштабер В. М., Рэй Н.* Торические многообразия и комплексные кобордизмы // УМН. 1998. Т. 53. №2. С. 139–140.
9. *Buchstaber V. M., Ray N.* Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes. Preprint/UMIST, № 2000/5. Manchester, 2000; // Internat. Math. Res. Notices 2001 (to appear); доступно в Интернет `http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/0010025`.
10. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. №2. С. 85–134.
11. *Davis M., Januszkiewicz T.* Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. V. 62. № 2. P. 417–451.
12. *Добринская Н.* Проблема классификации квазиторических многообразий над заданным простым многогранником // Функцион. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. №2.
13. *Fulton W.* Introduction to Toric Varieties. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1993.
14. *Hirzebruch F., Berger T., Jung R.* Manifolds and Modular Forms. Bonn: A Publication of the Max-Planc-Institut für Mathematik, 1994.
15. *Хованский А. Г.* Гиперплоские сечения многогранников // Функцион. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. №1. С. 50–61.
16. *Кричевер И. М.* Формальные группы и формула Атьи–Хирцебруха // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. №6. С. 1289–1304.
17. *Панов Т. Е.* Комбинаторные формулы для χ_y-рода полиориентированного квазиторического многообразия // УМН. 1999. Т. 54. №5. С. 169–170.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: `tpanov@mech.math.msu.su`

Поступило в редакцию
25.II.2000