УДК 513.83

Т. Е. Панов

Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы $\mathbf{Z}/p$, через инварианты действия

Получены общие формулы, выражающие род Хирцебруха многообразия с действием группы $\mathbf{Z}/p$ через инварианты этого действия – наборы весов в неподвижных точках. В качестве иллюстраций рассмотрены многочисленые частные случаи известных родов, в частности эллиптического рода. Описана связь полученных соотношений с так называемыми уравнениями Коннера–Флойда на наборы весов неподвижных точек.

Библиография: 15 наименований.

Введение

В работе получены формулы, выражающие роды Хирцебруха многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек или неподвижными подмногообразиями с тривиальным нормальным расслоением через инварианты такого действия и описана связь полученных соотношений с уравнениями Коннера–Флойда.

Действия группы $\mathbf{Z}/p$ изучались в работах [12], [13], [11], [8], где в рамках теории кобордизмов были получены так называемые уравнения Коннера–Флойда (см. (31), (32)). Эти уравнения представляют собой соотношения между наборами элементов $\mathbf{Z}/p$, необходимые и достаточные для того, чтобы существовало действие группы $\mathbf{Z}/p$ с такими наборами весов (определение см. в § 3). В работе [5] были предложены два подхода для вычисления родов Хирцебруха комплексных многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$.

Первый подход основан на применении формулы Атьи–Ботта–Лефшеца [1], и поэтому для его реализации необходим эллиптический комплекс расслоений на многообразии, ассоциированных с касательным расслоением. Формула Атьи–Ботта–Лефшеца, полученная в работе [1], обобщает классическую формулу Лефшеца для числа неподвижных точек и позволяет вычислять эквивариантный индекс эллиптического комплекса расслоений на многообразии через функции неподвижных подмногообразий (определения см. ниже). В частности, если на многообразии действует оператор с конечным числом неподвижных точек, то соответствующий эквивариантный индекс выражается через наборы весов неподвижных точек. В работе [5] было показано, как выразить род Тодда, являющийся индексом эллиптического комплекса (а именно комплекса Дольбо) расслоений на многообразии с

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-01404).

действием $\mathbf{Z}/p$ через эквивариантный индекс того же комплекса для действия образующей группы $\mathbf{Z}/p$, входящий в формулу Атьи–Ботта–Лефшеца. Таким образом, были выведены формулы, выражающие род Тодда через веса действия группы $\mathbf{Z}/p$ в неподвижных точках. В формулы, получаемые таким образом, входил теоретико-числовой след некоторого алгебраического расширения полей степени $p-1$. Аналогичный подход был использован и в нашей работе для получения формул для других родов многообразий с действием $\mathbf{Z}/p$: сигнатуры (L-рода), эйлеровой характеристики, $\hat{A}$-рода, общей χ_y-характеристики и эллиптического рода, а также для получения некоторых общих соотношений (см. § 5) для произвольных родов Хирцебруха, являющихся индексами эллиптических комплексов расслоений, ассоциированных с касательным расслоением многообразия с действием $\mathbf{Z}/p$.

В нашей работе мы используем обобщенную формулу Лефшеца в несколько иной формулировке, изложенной в работе [3]. Эта формула и особенно получаемый на ее основе "рецепт" для вычисления эквивариантного индекса комплекса через функции неподвижных точек (см. § 5) более удобны в применении, чем формула из [1], используемая в работе [5]. Обобщенная формула Лефшеца из работы [3] была получена на основе доказанной там же теоремы Атьи–Зингера об индексе в когомологической форме. Для сравнения часть результатов нашей работы (см. § 4) были получены на основе "старой" формулы Лефшеца из работы [1], а остальные – с помощью "рецепта" из § 5, основанного на применении формулы из работы [3].

В работе [5] был приведен второй подход для получения соотношений для родов Хирцебруха, основанный на применении теории кобордизмов, как при выводе уравнений Коннера–Флойда в работах [12], [13]. В [5] была приведена формула, выражающая класс кобордизмов $\operatorname{mod} p$ стабильно комплексного многообразия с действием $\mathbf{Z}/p$ через инварианты действия, и было показано, что разность между формулами для рода Тодда, получаемыми первым и вторым методами, есть в точности сумма уравнений Коннера–Флойда для рода Тодда. В нашей работе показывается (см. теорему 7.1), что разность между двумя на первый взгляд различными формулами, полученными двумя методами для произвольного рода, есть взвешенная сумма уравнений Коннера–Флойда для этого рода с целыми коэффициентами.

Особого интереса заслуживает так называемый эллиптический род. В работах Э. Виттена каждому гладкому ориентированному $2n$-мерному многообразию M^{2n} был сопоставлен инвариант – эквивариантный индекс оператора Дирака для канонического действия окружности S^1 на пространстве петель этого многообразия. С. Ошанин в [14] показал, что этот индекс является родом Хирцебруха, соответствующим эллиптическому синусу; отсюда и происходит название "эллиптический род". В работах [2], [9] и др. была доказана теорема жесткости для эллиптического рода многообразий с действием S^1, утверждающая, что эквивариантный эллиптический род $\varphi_{S^1}(M)$ такого многообразия, рассматриваемый как характер группы S^1, является тривиальным характером и равен эллиптическому роду $\varphi(M)$. В то же время эллиптический род принимает значения в кольце $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right][\delta,\varepsilon]$ и его значение на любом многообразии M^{2n} является модулярной формой веса n для подгруппы $\Gamma_0(2)\subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ (см. [7]). В нашей работе мы получаем формулы для эллиптического рода многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$ с конечным числом неподвижных точек. Сводка результатов этой части работы (без доказательств) была опубликована в [15]. В качестве приложения мы выводим соотношения на полиномы Лежандра, которые получаются применением этих формул к одному действию $\mathbf{Z}/p$ на $\mathbf{C}P^n$ (см. § 8).

Оставшаяся часть работы (см. § 9) посвящена обобщению на случай действия $\mathbf{Z}/p$ с неподвижными подмногообразиями с тривиальным нормальным расслоением.

§ 1. Необходимые сведения о родах Хирцебруха

Пусть M^{2n} –многообразие, в касательном расслоении к которому имеется стабильная комплексная структура, т.е. существует такое k, что в расслоении $TM \oplus 2k$ имеется комплексная структура. Запишем полный класс Чженя касательного расслоения TM в виде

$$c(TM) = 1 + c_1(M) + c_2(M) + \cdots + c_n(M) = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n),$$

т.е. полный класс Чженя M записывается в виде произведения классов Чженя “виртуальных” одномерных расслоений, сумма которых дает TM. Таким образом, $c_i(M)$ есть i-я симметрическая функция от $x_1, \ldots, x_n$.

Каждому ряду вида $Q(x) = 1 + \cdots$ с коэффициентами в некотором кольце Λ соответствует род Хирцебруха $\varphi_Q(M^{2n}) = \left(\prod_{i=1}^n Q(x_i)\right)[M^{2n}]$ (см. [6]). Наряду с $Q(x)$ введем $f(x) = x/Q(x)$ и $g(u) = f^{-1}(u)$. С каждым родом Хирцебруха φ связана формальная группа, логарифмом которой является $g_\varphi(u)$ (см. [5]): $F_\varphi(u,v) = g_\varphi^{-1}\big(g_\varphi(u) + g_\varphi(v)\big)$. Этой формальной группе соответствует степенная система (см. [5]) $[u]_n^\varphi = g_\varphi^{-1}\big(n g_\varphi(u)\big)$.

Аналогично можно определить роды Хирцебруха для вещественных ориентируемых многообразий M^{4n}. При этом классы Чженя c_i заменяются на классы Понтрягина p_i, а x_i на x_i^2, т.е.

$$p(TM) = 1 + p_1(M) + p_2(M) + \cdots + p_n(M) = (1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_n^2).$$

Вместо ряда $Q(x)$ мы теперь будем иметь $Q(x^2)$.

Формулы, полученные в данной работе, относятся в основном к следующим родам Хирцебруха.

1. Универсальный род $\underline{\varphi}$ соответствует тождественному гомоморфизму $\mathrm{id}\colon \Omega_U \otimes \mathbf{Q} \to \Omega_U \otimes \mathbf{Q}$. Соответствующая формальная группа “геометрических кобордизмов” $\underline{F}(u,v)$ (см. [12]) является универсальной, т.е. для любой формальной группы $F(x,y)$ над любым кольцом Λ существует единственный кольцевой гомоморфизм $\lambda\colon \Omega_U \to \Lambda$ такой, что $F(x,y) = \lambda\big[\underline{F}(u,v)\big]$ (см. [5]). Ее логарифм есть

$$\underline{g}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underline{\varphi}[\mathbf{C}P^n]}{n+1} u^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{C}P^n}{n+1} u^{n+1}.$$

Таким образом, для любого рода Хирцебруха φ имеем

$$g_\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi[\mathbf{C}P^n]}{n+1} u^{n+1}. \tag{1}$$

2. Род Тодда $\mathrm{td}(M)$ соответствует ряду

$$Q_{\mathrm{td}}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}, \qquad f_{\mathrm{td}}(w) = 1 - e^{-w}, \qquad g_{\mathrm{td}}(u) = -\ln(1-u).$$

То же самое можно получить, исходя из того, что $\mathrm{td}(\mathbf{C}P^n) = 1$. Действительно, тогда из (1) следует

$$g_{\mathrm{td}}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-u).$$

Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^{\mathrm{td}} = g_{\mathrm{td}}^{-1}\big(n g_{\mathrm{td}}(u)\big) = 1 - e^{n\ln(1-u)} = 1 - (1-u)^n.$$

Итак, для рода Тодда мы имеем

$$f_{\mathrm{td}}(w) = 1 - e^{-w}, \qquad g_{\mathrm{td}}(u) = -\ln(1-u), \qquad [u]_n^{\mathrm{td}} = 1 - (1-u)^n. \tag{2_{td}}$$

3. Эйлерова характеристика $e(M)$ (касательного расслоения). Так как $e(\mathbf{C}P^n) = n+1$, то (см. [13])

$$g_e(u) = \frac{u}{1-u}, \qquad f_e(w) = g_e^{-1}(w) = \frac{w}{1+w}.$$

Значит, $Q(x) = 1 + x$ и, как и следовало ожидать,

$$e[M] = \left(\prod_{i=1}^{n} Q(x_i)\right)[M] = (x_1 x_2 \dots x_n)[M^{2n}] = c_n[M^{2n}].$$

Далее,

$$[u]_n^e = g_e^{-1}\big(n g_e(u)\big) = \frac{nu}{1+(n-1)u}.$$

Итак, для эйлеровой характеристики мы имеем

$$f_e(w) = \frac{w}{1+w}, \qquad g_e(u) = \frac{u}{1-u}, \qquad [u]_n^e = \frac{nu}{1+(n-1)u}. \tag{2_e}$$

4. Сигнатура, или L-род, соответствует ряду

$$Q_L(x) = \frac{x}{\mathrm{th}(x)} = \frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}, \qquad f_L(w) = \mathrm{th}(w),$$
$$g_L(u) = \mathrm{arth}(u) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right).$$

Это согласуется с теоремой Хирцебруха (т.е. L-род равен сигнатуре, см. [6]), в силу которой $L(\mathbf{C}P^{2n}) = 1$, $L(\mathbf{C}P^{2n+1}) = 0$. Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^L = g_L^{-1}\big(n g_L(u)\big) = \frac{e^{\frac{n}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}} - e^{-\frac{n}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}}}{e^{\frac{n}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}} + e^{-\frac{n}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}}} = \frac{(1+u)^n - (1-u)^n}{(1+u)^n + (1-u)^n}.$$

Итак, для L-рода мы имеем

$$f_L(w)=\operatorname{th}(w),\qquad g_L(u)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right),\qquad [u]_n^L=\frac{(1+u)^n-(1-u)^n}{(1+u)^n+(1-u)^n}. \tag{2_L}$$

5. Имеется однопараметрический род, обобщающий три предыдущих примера, а именно χ_y-характеристика; χ_y-характеристика – это род Хирцебруха, соответствующий ряду

$$Q_{\chi_y}=\frac{x(1+ye^{-x(1+y)})}{1-e^{-x(1+y)}},$$
$$f_{\chi_y}(w)=\frac{w}{Q_{\chi_y}(w)}=\frac{1-e^{-w(1+y)}}{1+ye^{-w(1+y)}},\qquad g_{\chi_y}(u)=\frac{1}{1+y}\ln\frac{1+yu}{1-u}.$$

Пренебрегая условием нормировки $f_{\chi_y}(w)=w+\cdots$ и заменяя $w(1+y)$ на w, получим

$$\hat f_{\chi_y}(w)=\frac{1-e^{-w}}{1+ye^{-w}},\qquad \hat g_{\chi_y}(u)=\ln\frac{1+yu}{1-u}.$$

В обоих случаях выражение для степенной системы, связанной с χ_y-родом, одно и то же:

$$[u]_n^{\chi_y}=\frac{(1+yu)^n-(1-u)^n}{(1+yu)^n+y(1-u)^n}=\frac{1-\left(\frac{1-u}{1+yu}\right)^n}{1+y\left(\frac{1-u}{1+yu}\right)^n}. \tag{2_{χ_y}}$$

При $y=0,-1,1$ мы получаем соответственно род Тодда, эйлерову характеристику и L-род.

6. $\hat A$-род соответствует ряду

$$Q_A(x)=\frac{x/2}{\operatorname{sh}(x/2)}=\frac{x}{e^{x/2}-e^{-x/2}},$$
$$f_A(w)=2\operatorname{sh}\left(\frac{w}{2}\right),\qquad g_A(u)=2\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)=\ln\left(\frac{u}{2}+\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\right).$$

Соответствующая степенная система имеет вид

$$[u]_n^A=g_A^{-1}\big(ng_A(u)\big)=2\operatorname{sh}\big(n\operatorname{arsh}(u/2)\big)$$
$$=\left(\frac{u}{2}+\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\right)^n-\left(\frac{u}{2}+\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\right)^{-n}.$$

Итак, для $\hat A$-рода мы имеем

$$f_A(w)=2\operatorname{sh}(w/2),\qquad g_A(u)=2\operatorname{arsh}(u/2),\qquad [u]_n^A=2\operatorname{sh}\big(n\operatorname{arsh}(u/2)\big). \tag{2_A}$$

§ 2. Вычисление родов Хирцебруха на основе теоремы Атьи–Зингера об индексе

Мы будем рассматривать следующие эллиптические комплексы: комплекс де Рама

$$\Lambda^*\colon \Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^n)$$

и комплекс Дольбо

$$\Lambda^{p,*}\colon \Gamma(\Lambda^{p,0}) \xrightarrow{d''} \Gamma(\Lambda^{p,1}) \xrightarrow{d''} \cdots \xrightarrow{d''} \Gamma(\Lambda^{p,n}),$$

где $\Lambda^i = \Lambda^i(T^*M)$ – расслоение дифференциальных i-форм на M, а

$$\Lambda^{p,i} = \Lambda^p(T^*M) \wedge \Lambda^i(\overline{T}^*M) \simeq \Lambda^p(T^*M) \wedge \Lambda^i(TM)$$

– расслоение дифференциальных форм типа (p,i) ($\overline{T}^*M \simeq TM$, если на многообразии M введена эрмитова метрика).

Имеет место следующая теорема Атьи–Зингера об индексе в когомологической форме (см. [3]).

Теорема 2.1. *Пусть M – компактное, ориентируемое, дифференцируемое многообразие размерности $2n$ и $E = \{d_i\colon \Gamma E_i \to \Gamma E_{i+1}\}$ – эллиптический комплекс ($i = 0,\dots,m-1$), ассоциированный с касательным расслоением (т.е. все расслоения E_i ассоциированы с TM). Тогда индекс этого комплекса определяется следующей формулой*:

$$\operatorname{ind}(E) = (-1)^n \left(\left(\frac{1}{e(TM)} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \operatorname{ch}(E_i) \right) \operatorname{td}(TM \otimes \mathbf{C}) \right)[M].$$

Замечание. Записав $\operatorname{td}(TM \otimes \mathbf{C}) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{-x_j}{1-e^{x_j}} \right)$, $e(TM) = x_1 \dots x_n$ и формально сократив на $x_1 \dots x_n$, получим следующую формулу:

$$\operatorname{ind}(E) = \left(\left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \operatorname{ch}(E_i) \right) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{1}{1-e^{x_j}} \right) \right)[M]. \tag{3}$$

Рассмотрим эллиптический комплекс $\left\{ \mathrm{X}_i^y = \bigoplus_{p=0}^n y^p \Lambda^{p,i} \right\}$ (заметим, что этот объект является эллиптическим комплексом только при конкретных целых y, однако его индекс, очевидно, определяется при любых y как многочлен от y; в дальнейшем мы будем называть аналогичные объекты *эллиптическими комплексами*). При помощи теоремы Атьи–Зингера легко доказать следующий факт, впервые доказанный Хирцебрухом (см. [6]).

Теорема 2.2. *Индекс эллиптического комплекса $\{\mathrm{X}_i^y\}$ равен χ_y-характеристике многообразия M, определенной выше, т.е.*

$$\operatorname{ind}(\mathrm{X}^y) = \chi_y[M] = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{x_j(1+ye^{-x_j})}{1-e^{-x_j}} \right)[M].$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (3):

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(\mathrm{X}^y) &= \left(\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{ch}(\mathrm{X}_i^y)\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M] \\
&= \left(\operatorname{ch}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Lambda^i TM\right)\operatorname{ch}\left(\sum_{p=0}^{n}y^p\Lambda^p T^*M\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M] \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n}(1-e^{x_j})\prod_{j=1}^{n}(1+ye^{-x_j})\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M] \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j(1+ye^{-x_j})}{1-e^{-x_j}}\right)[M] = \chi_y[M].
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следующим фактом (см., например, [7]).

Лемма 2.3. *Пусть E – комплексное n-мерное расслоение над дифференцируемым многообразием X, $c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E) = (1 + x_1)\dots$ $\dots(1 + x_n)$ – формальное разложение полного класса Чженя. Пусть*

$$\Lambda_t E := \sum_{k=0}^{\infty}(\Lambda^k E)t^k, \qquad S_t E := \sum_{k=0}^{\infty}(S^k E)t^k.$$

Тогда

$$\operatorname{ch}(\Lambda_t E^*) = \prod_{i=1}^{n}(1+te^{x_i}), \qquad \operatorname{ch}(S_t E^*) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-te^{x_i}}. \tag{4}$$

В частности, если мы рассмотрим комплексы $\{\Lambda^{0,i}\}$, $\left\{\mathscr{E}_i = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\Lambda^{p,i}\right\}$, $\left\{L_i = \sum_{p=0}^{n}\Lambda^{p,i}\right\}$, то их индексы будут равны соответственно $\operatorname{td}[M] = \operatorname{ind}(\Lambda^{0,*})$, $e[M] = \operatorname{ind}(\mathscr{E})$, $L[M] = \operatorname{ind}(L)$.

Далее мы построим эллиптический комплекс, индекс которого будет равен $\hat{A}$-роду многообразия M при некоторых дополнительных условиях. Пусть $c_1(M) \equiv 0 \bmod 2$ (это эквивалентно условию $w_2(M) = 0$, т.е. существованию на M спинорной структуры). Тогда существует $\mathscr{L}$, линейное расслоение над M, такое, что $\mathscr{L}\otimes\mathscr{L} = \Lambda^n T^*M$, т.е. если $c(M) = (1+x_1)\dots(1+x_n)$, то $c(\mathscr{L}) = 1 - \frac{x_1+\dots+x_n}{2}$ и $\operatorname{ch}(\mathscr{L}) = \exp\left(-\frac{x_1+\dots+x_n}{2}\right)$. Введем комплекс $\{A_i = \Lambda^{0,i}\otimes\mathscr{L}\}$.

Теорема 2.4. *Индекс эллиптического комплекса A, определенного выше, равен $\hat{A}$-роду многообразия M, т.е.*

$$\operatorname{ind}(A) = \hat{A}[M] = \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j}{2\operatorname{sh}(x_j/2)}\right)[M].$$

Доказательство. Здесь мы снова воспользуемся формулами (3) и (4):

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(A) &= \left(\operatorname{ch}(\mathscr{L})\operatorname{ch}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Lambda^{0,i}\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M]\\
&= \left(\exp\left(-\frac{x_1+\dots+x_n}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Lambda^{i}TM\right)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M]\\
&= \left(\prod_{j=1}^{n}e^{-x_j/2}\prod_{j=1}^{n}(1-e^{x_j})\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M]\\
&= \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{x_je^{-x_j/2}}{1-e^{-x_j}}\right)[M] = \left(\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j}{2\operatorname{sh}(x_j/2)}\right)[M] = \hat{A}(M).
\end{aligned}$$

Таким образом мы построили эллиптические комплексы, ассоциированные с касательным расслоением к M, вычисляющие все основные рода Хирцебруха из § 1.

§ 3. Задача о вычислении родов Хирцебруха многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$ в терминах инвариантов действия

Пусть на многообразии M^{2n} действует преобразование g – трансверсальный (т.е. имеющий лишь изолированные неподвижные точки) эндоморфизм такой, что $g^p = 1$, p простое (т.е. задано действие группы $\mathbf{Z}/p$). Пусть $\mathscr{P}_1,\dots,\mathscr{P}_q$ – неподвижные точки и матрица Якоби $\mathscr{J}_{\mathscr{P}_j}(g)$ отображения g в точке $\mathscr{P}_j$ имеет собственные числа

$$\lambda_k^{(j)} = \exp\left(\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p}\right),\qquad x_k^{(j)}\ne 0 \mod p,\qquad k=1,\dots,n,\qquad j=1,\dots,q.$$

Пусть имеется эллиптический комплекс E на многообразии M. Введем, следуя Атье и Ботту (см. [1]), следующее определение.

Определение 3.1. *Поднятием g на компоненты комплекса E* называется набор линейных дифференциальных операторов $\varphi_i\colon\Gamma(g^*E_i)\to\Gamma(E_i)$. Здесь g^*E_i – прообраз расслоения E_i при отображении g.

При помощи φ_i можно определить эндоморфизмы $T_i(g,\varphi)\colon\Gamma(E_i)\to\Gamma(E_i)$ как композицию φ и Γ_g, $T_i(g,\varphi)=\varphi_i\circ\Gamma_g$, где $\Gamma_g\colon\Gamma(E_i)\to\Gamma(g^*E_i)$ – естественное отображение сечений расслоения E_i в сечения индуцированного расслоения g^*E_i. Тогда имеет место следующая общая теорема Атьи–Ботта–Лефшеца (см. [1]).

Теорема 3.2. *Пусть $g\colon M\to M$ – трансверсальный эндоморфизм компактного многообразия M. Пусть E – эллиптический комплекс на M и $\varphi_i\colon\Gamma(g^*E_i)\to\Gamma(E_i)$ – поднятия g на компоненты комплекса E такие, что индуцированные эндоморфизмы $T_i(g,\varphi)\colon\Gamma(E_i)\to\Gamma(E_i)$ определяют эндоморфизм $T(g,\varphi)$ комплекса E (т.е. T_i коммутируют с дифференциалами d_i). Тогда “эквивариантный индекс” $\operatorname{ind}(g,E):=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\operatorname{tr}T_i^*$, где*

$T_i^*\colon H^i(E)\to H^i(E)$, *вычисляется по формуле*

$$\operatorname{ind}(g,E)=\sum_{j=1}^{q}\sigma(\mathscr{P}_j),\tag{5}$$

где $\sigma(\mathscr{P}_j)\in\mathbf{C}$ *зависит только от локальных свойств* T *и* φ_i *в точке* $\mathscr{P}_j$.

В частности, если в каждой неподвижной точке $\mathscr{P}_j$ *оператор* φ_i *индуцирует эндоморфизм* $\varphi_i(\mathscr{P}_j)\colon E_{i,\mathscr{P}_j}\to E_{i,\mathscr{P}_j}$, *то* $\sigma(\mathscr{P}_j)$ *равно*

$$\sigma(\mathscr{P}_j)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\operatorname{tr}\varphi_i(\mathscr{P}_j)}{\left|\det\left(1-\mathscr{J}_{\mathscr{P}_j}(g)\right)\right|}.\tag{6}$$

Пример 3.1. Если $E_i=\Lambda^i(M)$ – комплекс де Рама, то $\varphi_i(\mathscr{P}_j)=\Lambda^i\mathscr{J}_{\mathscr{P}_j}(g)$.

Пример 3.2. Если $E_i=\Lambda^{p,i}(M)$ – комплекс Дольбо, то

$$\varphi_i(\mathscr{P}_j)=\Lambda^p\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\wedge\Lambda^i\bar{\mathscr{J}}'_{\mathscr{P}_j}(g),$$

где $\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)$ – голоморфная часть отображения $\mathscr{J}_{\mathscr{P}_j}(g)$.

Найдем $\sigma(\mathscr{P}_j)$ для комплекса Дольбо $\Lambda^{p,*}$. Так как $\left|\det\left(1-\mathscr{J}_{\mathscr{P}_j}(g)\right)\right| = \det\left(1-\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)\det\left(1-\bar{\mathscr{J}}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)$, то из (6) имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\mathscr{P}_j)&=\frac{\operatorname{tr}\left(\Lambda^p\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\wedge\sum_i(-1)^i\Lambda^i\bar{\mathscr{J}}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)}{\det\left(1-\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)\det\left(1-\bar{\mathscr{J}}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)}\\&=\frac{\operatorname{tr}\left(\Lambda^p\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)\det\left(1-\bar{\mathscr{J}}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)}{\det\left(1-\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)\det\left(1-\bar{\mathscr{J}}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)}=\frac{\operatorname{tr}\Lambda^p\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)}{\det\left(1-\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным равенством из линейной алгебры

$$\det(1-A)=\sum_i(-1)^i\operatorname{tr}\Lambda^iA\tag{7}$$

для любого линейного оператора A. Итак,

$$\sigma_p(\mathscr{P}_j)=\frac{\operatorname{tr}\Lambda^p\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)}{\det\left(1-\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\right)}.\tag{8}$$

Теорема 3.2 и формула (8) позволяют находить функции неподвижных точек $\sigma(\mathscr{P}_j)$ для комплексов $\Lambda^{0,*}$, $\mathscr{E}$, L, X^y, вычисляющих соответственно род Тодда, эйлерову характеристику, L-род и χ_y-характеристику многообразия M.

§ 4. Вычисления для рода Тодда, эйлеровой характеристики и L-рода

4.1. Вычисления для эйлеровой характеристики. Рассмотрим комплекс $\mathscr{E}_i = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\Lambda^{p,i}$, $\operatorname{ind}(\mathscr{E}) = e(M)$. В этом случае

$$\varphi_i(\mathscr{P}_j) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\Lambda^p\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\wedge\Lambda^i\bar{\mathscr{J}}'_{\mathscr{P}_j}(g),$$

а функции неподвижных точек есть (см. формулу (8))

$$\sigma_e(\mathscr{P}_j) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\sigma_p(\mathscr{P}_j) = \frac{\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\operatorname{tr}\Lambda^p\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)}{\det\bigl(1-\mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\bigr)} = 1. \tag{9}$$

Здесь мы снова воспользовались формулой (7). Отсюда по теореме 3.2 имеем

$$\operatorname{ind}(g,\mathscr{E}) = \sum_{j=1}^{q}\sigma_e(\mathscr{P}_j) = q.$$

Так как $\frac{1}{p}\sum_{l\in\mathbf{Z}/p}\operatorname{ind}(g^l,\mathscr{E}) = s$ есть альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса $\mathscr{E}$ и $\operatorname{ind}(1,\mathscr{E}) = \operatorname{ind}(\mathscr{E}) = e(M)$, то мы имеем

$$\operatorname{ind}(1,\mathscr{E}) = e(M) = -\sum_{l=1}^{p-1}\operatorname{ind}(g^l,\mathscr{E}) + ps = ps - q(p-1) = q + p(s-q).$$

Таким образом мы получили следующую формулу для эйлеровой характеристики:

$$e(M) \equiv q \pmod p. \tag{10}$$

4.2. Вычисления для рода Тодда. Вычисления рода Тодда комплексного многообразия в терминах действия группы $\mathbf{Z}/p$ на нем были проведены В. М. Бухштабером и С. П. Новиковым в работе [5]. Для полноты изложения мы здесь приведем их результаты.

Определение 4.1. *Функция Атьи–Ботта $AB_{\mathrm{td}}(x_1,\dots,x_n)$ неподвижной точки* – это функция, сопоставляющая набору весов $x_1,\dots,x_n$, $x_i\in\mathbf{Z}/p$, число

$$AB_{\mathrm{td}}(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}\right), \tag{11}$$

где $\operatorname{Tr}\colon\mathbf{Q}(\zeta)\to\mathbf{Q}$ – теоретико-числовой след, $\zeta := e^{2\pi i/p}$.

В [5] было показано, что

$$\sum_{j=1}^{q} AB_{\mathrm{td}}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \equiv \mathrm{td}(M) \mod p, \tag{12}$$

и был вычислен след в определении функций Атьи–Ботта для рода Тодда:

$$\begin{aligned} AB_{\mathrm{td}}(x_1, \dots, x_n) &\equiv -\left\langle \frac{p[u]_{p-1}^{\mathrm{td}}}{[u]_p^{\mathrm{td}}} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k}^{\mathrm{td}}} \right\rangle_n \mod p, \\ AB_{\mathrm{td}}(x_1, \dots, x_n) &\equiv \sum_{m=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]_p^{\mathrm{td}}} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k}^{\mathrm{td}}} \right\rangle_m \mod p, \end{aligned} \tag{13}$$

где $[u]_q^{\mathrm{td}}$ – q-я степень в формальной группе, связанной с родом Тодда (см. формулу (2_T)), а $\langle h(u)\rangle_k$ – коэффициент при u^k в степенном ряду $h(u)$.

4.3. Вычисления для L-рода. Теперь рассмотрим комплекс $L = \sum_{p=0}^{n} \Lambda^{p,*}$. Его индекс есть L-род: $\mathrm{ind}(L) = L(M)$. В этом случае поднятиями g на компоненты комплекса L будут

$$\varphi_i(\mathscr{P}_j) = \sum_{p=0}^{n} \Lambda^p \mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g) \wedge \Lambda^i \bar{\mathscr{J}}'_{\mathscr{P}_j}(g),$$

а функции неподвижных точек есть (см. формулу (8))

$$\begin{aligned} \sigma_L(\mathscr{P}_j) = \sum_{p=0}^{n} \sigma_p(\mathscr{P}_j) &= \frac{\sum_{p=0}^{n} \mathrm{tr}\, \Lambda^p \mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)}{\det\bigl(1 - \mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\bigr)} \\ &= \frac{\det\bigl(1 + \mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\bigr)}{\det\bigl(1 - \mathscr{J}'_{\mathscr{P}_j}(g)\bigr)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь мы снова воспользовались формулой (7). Значит, как следует из теоремы 3.2, эквивариантный индекс есть

$$\mathrm{ind}(g, L) = \sum_{j=1}^{q} \sigma_L(\mathscr{P}_j) = \sum_{j=1}^{q} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)}/p}}.$$

Как и раньше, $\frac{1}{p} \sum_{l \in \mathbf{Z}/p} \mathrm{ind}(g^l, L) = s$ – альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса L и $\mathrm{ind}(1, L) = \mathrm{ind}(L) = L(M)$, т.е.

$$L(M) = \mathrm{ind}(1, L) = -\sum_{l=1}^{p-1} \mathrm{ind}(g^l, L) + ps = -\sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{p-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k^{(j)} l/p}}{1 - e^{2\pi i x_k^{(j)} l/p}} + ps.$$

Снова рассматриваем след $\mathrm{Tr}\colon \mathbf{Q}(\zeta) \to \mathbf{Q}$ и вводим функции Атьи–Ботта $AB_L(x_1,\dots,x_n)$ как

$$AB_L(x_1,\dots,x_n) = -\,\mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+e^{2\pi i x_k/p}}{1-e^{2\pi i x_k/p}}\right). \tag{15}$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{q} AB_L\bigl(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\bigr) \equiv L(M) \mod p. \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) аналогичны соотношениям (11) и (12) для рода Тодда. Остается вычислить след в определении функций Атьи–Ботта $AB_L(x_1,\dots,x_n)$.

Обозначим $\theta = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$; тогда $\zeta = e^{2\pi i/p} = \frac{1-\theta}{1+\theta}$. Нам надо вычислить $\mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\right)$. Вычисления будем проводить в p-адическом пополнении $\mathbf{Q}_p(\zeta)$ поля $\mathbf{Q}(\zeta)$. Символом $\simeq$ будем обозначать равенство по модулю группы $p\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}_p$. Вначале докажем следующее утверждение.

Лемма 4.2. $\mathrm{Tr}(\theta^k) \simeq 0$ *для любого* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Так как $2 = \zeta^p+1 = (\zeta+1)(\zeta^{p-1}-\zeta^{p-2}+\zeta^{p-3}-\dots-\zeta+1)$, то

$$\theta = \frac{(1-\zeta)(\zeta^{p-1}-\zeta^{p-2}+\zeta^{p-3}-\dots-\zeta+1)}{2} = \zeta^{p-1}-\zeta^{p-2}+\zeta^{p-3}-\dots-\zeta.$$

Поэтому

$$\mathrm{Tr}\,\theta^k = \sum_{m=1}^{p-1}\bigl((\zeta^m)^{p-1}-(\zeta^m)^{p-2}+(\zeta^m)^{p-3}-\dots-\zeta^m\bigr)^k \simeq 0,$$

так как

$$\sum_{m=1}^{p-1}\bigl((\zeta^m)^{p-1}-(\zeta^m)^{p-2}+\dots-\zeta^m\bigr)^k = \sum_{m=0}^{p-1}\bigl((\zeta^m)^{p-1}-(\zeta^m)^{p-2}+\dots-\zeta^m\bigr)^k,$$

и для любого r верно $\sum_{m=0}^{p-1}(\zeta^m)^r \simeq 0$. Лемма доказана.

Далее имеем

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1+\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}}{1-\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}} = \frac{1}{\theta^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta\left(1+\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right)}{1-\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}} =: \frac{1}{\theta^n}\sum_{k=0}^{\infty}A_k\theta^k,$$

где $A_k \in \mathbf{Z}_p$ – целые p-адические числа (так как $1/x_k \in \mathbf{Z}_p$). Поэтому можно написать

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n}\sum_{k=0}^{\infty}A_k\theta^k\right) \simeq \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n}\sum_{k=0}^{n}A_k\theta^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\bigl(A_k\,\mathrm{Tr}(\theta^{k-n})\bigr).$$

Положим $\operatorname{Tr}\theta^{-s} = B_s$ и введем два формальных ряда $A(u) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k u^k$, $B(u) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k u^k$. Заметим, что, как следует из (2_L), $A(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^L_{x_k}}$. Таким образом, нам надо вычислить коэффициент при u^n в ряде $A(u)B(u)$. Имеем

$$\begin{aligned}B(u) &= \operatorname{Tr}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \theta^{-s} u^s\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{1-\theta^{-1}u}\right)\\ &= \operatorname{Tr}\left(\frac{\theta}{\theta-u}\right) = \operatorname{Tr}\left(1 + \frac{u}{\theta-u}\right) = (p-1) + u\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right).\end{aligned}$$

Заметим теперь, что если $\varphi_\alpha(u)$ – минимальный многочлен элемента α относительно расширения $\mathbf{Q}_p(\zeta) \mid \mathbf{Q}_p$, то $\operatorname{Tr}\frac{1}{\alpha-u} = -\frac{\varphi'_\alpha(u)}{\varphi_\alpha(u)}$. Так как

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\zeta^p - 1}{\zeta - 1} = \frac{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^p - 1}{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right) - 1}\\ &= \frac{\big((1-\theta)^p - (1+\theta)^p\big)(1+\theta)}{(1+\theta)^p(-2\theta)} = \frac{1}{(1+\theta)^{p-1}}\frac{(1+\theta)^p - (1-\theta)^p}{2\theta},\end{aligned}$$

то $\varphi_\theta(u) = \frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{2u}$ – минимальный многочлен элемента $\theta = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$. Тогда имеем

$$-\operatorname{Tr}\frac{1}{\theta-u} = \frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} = p\frac{(1+u)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} - \frac{1}{u}.$$

Таким образом,

$$B(u) = (p-1) + u\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right) = \frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p},$$

$$\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\right) \simeq \big\langle A(u)B(u)\big\rangle_n = \left\langle p\frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_n,$$

т.е.

$$AB_L(x_1,\dots,x_n) \equiv -\left\langle p\frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_n \mod p.$$

Эта формула аналогична первой из формул (13). Далее,

$$\begin{aligned}p\frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p} &= p\frac{(1-u)(1+u)^p - (1+u)(1-u)^p}{(1-u)(1+u)\big((1+u)^p - (1-u)^p\big)}\\ &= p\frac{(1+u)^p - (1-u)^p - u\big((1+u)^p + (1-u)^p\big)}{(1-u^2)\big((1+u)^p - (1-u)^p\big)}\\ &= \frac{p}{1-u^2} - \frac{pu}{(1-u^2)\frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{(1+u)^p + (1-u)^p}} = \frac{p}{1-u^2} - \frac{pu}{(1-u^2)[u]^L_p}\\ &\simeq -\frac{pu}{[u]^L_p}(1 + u^2 + u^4 + \cdots).\end{aligned}$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
AB_L(x_1,\dots,x_n) &\equiv -\left\langle p\frac{(1+u)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+u)^p-(1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_n \\
&\equiv \left\langle \frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}(1+u^2+u^4+\cdots)\right\rangle_n \mod p.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
AB_L(x_1,\dots,x_n) \equiv \sum_{i=0}^{[n/2]}\left\langle \frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_{n-2i}.
$$

Но так как $[u]^L_k = \frac{(1+u)^k-(1-u)^k}{(1+u)^k+(1-u)^k} = \operatorname{th}(k \operatorname{arth} u)$, а ряд $\operatorname{arth} u$ (как и $\operatorname{th} u$) содержит только нечетные степени u, то ряд $\frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}$ содержит только четные степени u, и мы можем теперь записать формулы для функций Атьи–Ботта для L-рода, аналогичные формулам (13) для рода Тодда:

$$
\begin{aligned}
AB_L(x_1,\dots,x_n) &\equiv -\left\langle p\frac{(1+u)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+u)^p-(1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_n \mod p, \\
AB_L(x_1,\dots,x_n) &\equiv \sum_{m=0}^{n}\left\langle \frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_m \mod p.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Тогда по формуле (16)

$$
L(M) \equiv \sum_{j=1}^{q}\sum_{m=0}^{n}\left\langle \frac{pu}{[u]^L_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^L_{x_k}}\right\rangle_m \mod p. \tag{18}
$$

Здесь $[u]^L_p = \frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{(1+u)^p+(1-u)^p}$.

Заметим, что соотношения типа (12), (16) можно получить и для эйлеровой характеристики. Функциями Атьи–Ботта будут

$$
AB_e(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\zeta}{1-\zeta}\right) = -\operatorname{Tr}(1) = -(p-1) \equiv 1 \mod p.
$$

Тогда

$$
q = \sum_{j=1}^{q} AB_e(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}) \equiv e(M) \mod p. \tag{19}
$$

Это соотношение аналогично соотношениям (12) и (16) для рода Тодда и L-рода.

§ 5. Общие результаты о вычислении родов Хирцебруха через инварианты действия $\mathbf{Z}/p$

Далее мы рассмотрим другой подход к вычислению эквивариантного индекса $\operatorname{ind}(g,E) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \operatorname{tr}(g,H^i)$ эллиптического комплекса E, изложенный в [3]; см. также [7].

Вначале мы несколько ослабим условия на действие оператора g, $g^p = 1$, на комплексном многообразии M^{2n}. Именно, мы уберем условие трансверсальности. Пусть теперь $M^g = \{x \in M \mid gx = x\}$ – множество неподвижных точек. Представим его в виде объединения связных компонент: $M^g = \cup M^g_\nu$. Тогда эквивариантный индекс представляется в виде суммы функций неподвижных подмногообразий $\sigma(M^g_\nu)$, которые вычисляются следующим образом.

Пусть $Y = M^g_\nu$ – одна из компонент связности множества неподвижных точек. Для любой точки $p \in Y$ оператор g линейно действует на касательном пространстве T_pM, которое разлагается в прямую сумму собственных подпространств $N_{p,\lambda}$ с собственным значением λ, $|\lambda| = 1$. Таким образом, мы получаем расслоение N_λ над Y, соответствующее собственному значению λ. N_1 – это в точности касательное расслоение TY к Y. Пусть $d_\lambda = \operatorname{rk} N_\lambda$. Тогда мы имеем

$$TM|_Y = \bigoplus_\lambda N_\lambda, \qquad c(N_\lambda) = \prod_{i=1}^{d_\lambda}(1 + x_i^\lambda), \tag{20}$$

т.е.

$$c(TM_Y) = \prod_\lambda \prod_{i=1}^{d_\lambda}(1 + x_i^\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i).$$

Функция $\sigma(Y)$ находится следующим образом. Рассмотрим формулу (3) для индекса из теоремы 2.1:

$$\operatorname{ind}(E) = \left(\left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \operatorname{ch}(E_i)\right) c_n(X) \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{1-e^{-x_j}}\frac{1}{1-e^{x_j}}\right)\right)[M], \tag{21}$$

и заменим в ней M на Y и e^{x_i} на $\lambda^{-1}e^{x_i}$. То же самое проделаем и с $\operatorname{ch}(E_i)$. Это всегда можно сделать, если все расслоения E_i ассоциированы с касательным расслоением к M. Этот "рецепт" взят из [7].

В случае конечного числа неподвижных точек имеем $Y = \mathbf{pt}$, $c_n(Y) = 1$, т.е. мы должны заменить $x_1 x_2 \dots x_n$ на 1, $e^{x_j^\lambda}$ на λ_j^{-1}, т.е. если, как и выше, ввести "веса" x_i по формуле $\lambda_j = \exp\left(\frac{2\pi i x_j}{p}\right)$, то мы должны заменить x_j^λ на $-\frac{2\pi i}{p}x_j$ (здесь в первом случае x_j означает первый класс Чженя "виртуального" одномерного подрасслоения в TM, соответствующего собственному значению λ_j, а во втором – "вес" неподвижной точки, определенный лишь по модулю p).

Пример 5.1. Рассмотрим χ_y-характеристику многообразия M. Применив к формуле из теоремы 2.2 наш "рецепт", мы получим следующую формулу для функции неподвижной точки $\mathscr{P}$:

$$\sigma(\mathscr{P}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1 + ye^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}. \tag{22}$$

Подставив сюда значения $y = -1, 0, 1$, мы получим формулы для функций неподвижных точек для эйлеровой характеристики, рода Тодда и L-рода:

$$\sigma_e(\mathscr{P}) = 1, \qquad \sigma_{\mathrm{td}}(\mathscr{P}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{2\pi i x_k/p}}, \qquad \sigma_L(\mathscr{P}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + e^{2\pi i x_k/p}}{1 - e^{2\pi i x_k/p}},$$

которые совпадают с формулами (9), (14) и формулой из работы [5], полученными из теоремы 3.2 Атьи–Ботта.

Пример 5.2. Рассмотрим теперь общий случай произвольного рода Хирцебруха φ:

$$\varphi(M) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f_\varphi(x_i)} \right)[M],$$

где $g_\varphi(u) = f_\varphi^{-1}(u)$ – логарифм соответствующей формальной группы. Пусть существует E_φ – эллиптический комплекс расслоений, ассоциированных с TM, индекс которого равен $\varphi(M)$. Применив наш "рецепт", мы получим, что функции неподвижных точек действия g на M будут вычислятся по формуле

$$\sigma(\mathscr{P}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi(-2\pi i x_k/p)}, \tag{23}$$

где x_k – "веса" неподвижной точки $\mathscr{P}$, определяемые из условия $\lambda_k = \exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p}\right)$, $x_k \neq 0 \mod p$, λ_k – собственные числа матрицы Якоби $\mathscr{J}_{\mathscr{P}}(g)$ отображения g в точке $\mathscr{P}$. Эквивариантный индекс комплекса E_φ определяется тогда по формуле

$$\mathrm{ind}(g, E_\varphi) = \sum_{j=1}^{q} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\left(-2\pi i x_k^{(j)}/p\right)}.$$

Далее, $\frac{1}{p}\sum_{l\in\mathbf{Z}/p} \mathrm{ind}(g^l, E_\varphi) = s$ – альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g на когомологиях комплекса E_φ и $\mathrm{ind}(1, E_\varphi) = \mathrm{ind}(E_\varphi) = \varphi(M)$. Поэтому имеем

$$\varphi(M) = \mathrm{ind}(1, E_\varphi) = -\sum_{l=1}^{p-1} \mathrm{ind}(g^l, E_\varphi) + ps = -\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{p-1}\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\left(-2\pi i x_k^{(j)} l/p\right)} + ps.$$

Рассмотрим $\mathrm{Tr}\colon \mathbf{Q}_p(\zeta) \to \mathbf{Q}_p$ – теоретико-числовой след $\left(\zeta := \exp\frac{2\pi i}{p}\right)$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{p-1}\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\left(-2\pi i x_k^{(j)} l/p\right)} = \mathrm{Tr} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\left(-2\pi i x_k^{(j)}/p\right)}.$$

Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть имеется эллиптический комплекс расслоений, ассоциированных с TM, индекс которого равен некоторому роду Хирцебруха $\varphi(M)$ многообразия M. Тогда если на M действует голоморфный трансверсальный эндоморфизм g такой, что $g^p = 1$, то имеется следующая формула для $\varphi(M)$:*

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Tr} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\bigl(-2\pi i x_k^{(j)}/p\bigr)} \mod p.$$

Здесь уместно ввести следующее

Определение 5.2. *Функция Атьи–Ботта $AB_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ неподвижной точки, соответствующая роду φ,* – это функция, сопоставляющуя набору весов $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in \mathbf{Z}/p$, число

$$AB_\varphi(x_1, \ldots, x_n) = -\operatorname{Tr} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f_\varphi\bigl(-2\pi i x_k^{(j)}/p\bigr)}.$$

Тогда получаем

$$\sum_{j=1}^{q} AB_\varphi\bigl(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\bigr) \equiv \varphi(M) \mod p. \tag{24}$$

Обозначим теперь $\theta = f_\varphi(-2\pi i/p)$. Тогда $-2\pi i/p = g_\varphi(\theta)$ и $f_\varphi(-2\pi i/p x_k) = f_\varphi\bigl(x_k g_\varphi(\theta)\bigr) = [\theta]_{x_k}^{\varphi}$. Поэтому имеет место следующее

Предложение 5.3. *Функцию Атьи–Ботта $AB_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ неподвижной точки, соответствующую роду φ, можно представить в виде*

$$AB_\varphi(x_1, \ldots, x_n) = -\operatorname{Tr}\Biggl(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\varphi}}\Biggr), \qquad \theta = f_\varphi\left(\frac{-2\pi i}{p}\right).$$

Лемма 5.4. *Для любого $k > 0$ $\operatorname{Tr}\theta^k \simeq 0$ (т.е. $\operatorname{Tr}\theta^k \in p\mathbf{Z}_p$).*

Доказательство. Пусть $\theta = f_\varphi\left(-\frac{2\pi i}{p}\right) = C_0 + C_1\zeta + \cdots + C_{p-1}\zeta^{p-1} \in \mathbf{Q}_p(\zeta)$, $C_i \in \mathbf{Z}_p$. Тогда $C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \cdots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m} = f_\varphi\left(-\frac{2\pi i}{p} m\right)$, в частности, $C_0 + C_1 + \cdots + C_{p-1} = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\theta^k &= \sum_{m=1}^{p-1} f_\varphi\left(-\frac{2\pi i}{p} m\right) = \sum_{m=1}^{p-1}\bigl(C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \cdots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m}\bigr)\\ &= \sum_{m=0}^{p-1}\bigl(C_0 + C_1\zeta^m + C_2\zeta^{2m} + \cdots + C_{p-1}\zeta^{(p-1)m}\bigr) \simeq 0,\end{aligned}$$

так как для любого r верно $\sum_{m=0}^{p-1}\zeta^{rm} \simeq 0$. Лемма доказана.

Пример 5.3. Для рода Тодда $\theta = f_{\mathrm{td}}\left(-\frac{2\pi i}{p}\right) = 1 - e^{2\pi i/p} = 1 - \zeta$ (см. формулу (2_{td})), т.е. $C_0 = 1$, $C_1 = -1, C_i = 0$ при $i > 1$.

Пример 5.4. Для L-рода $\theta = \hat{f}_L\left(-\frac{2\pi i}{p}\right) = \frac{1-e^{2\pi i/p}}{1+e^{2\pi i/p}} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} + \zeta^{p-3} - \cdots - \zeta$ (см. лемму 4.2), т.е. $C_0 = 0$, $C_{2i+1} = -1$, $C_{2i} = 1$ при $i > 1$.

§ 6. Вычисления для $\hat{A}$-рода и χ_y-характеристики

6.1. Вычисления для $\hat{A}$-рода. Рассмотрим $\hat{A}$-род

$$\hat{A}(M)=\biggl(\prod_{j=1}^{n}\frac{x_je^{-x_j/2}}{1-e^{-x_j}}\biggr)[M]$$

для стабильно комплексных многообразий M, у которых $c_1(M)\equiv 0 \mod 2$. Эллиптический комплекс, индекс которого равен $\hat{A}(M)$, дается теоремой 2.4. Функции Атьи–Ботта для $\hat{A}$-рода имеют следующий вид (см. определение 5.2):

$$AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n)=-\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\exp\left(\frac{2\pi ix_k}{2p}\right)}{1-\exp\left(\frac{2\pi ix_k}{p}\right)}\right)=-\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}}\biggr), \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{q}AB_{\hat{A}}(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)})\equiv\hat{A}(M) \mod p. \tag{26}$$

Теперь надо вычислить след в определении функций Атьи–Ботта $AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n)$. Имеем в силу предложения 5.3 $\frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}}=\frac{1}{[\theta]^{A}_{x_k}}$, где $[u]^A_m=2\operatorname{sh}\left(m\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)$ – степенная система, связанная с $\hat{A}$-родом (см. формулу (2_A)), а $\theta=2\operatorname{sh}\left(-\frac{2\pi i}{2p}\right)=-2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{p}\right)=e^{-\pi i/p}-e^{\pi i/p}=\zeta^{-1/2}-\zeta^{1/2}=\zeta^{(p+1)/2}-\zeta^{(p-1)/2}$.

Найдем минимальный многочлен элемента $\theta=-2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{p}\right)$. Очевидно, это будет

$$\varphi_\theta(u)=\frac{2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{u},$$

так как

$$\varphi_\theta(\theta)=\frac{2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\left(-2\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{p}\right)\right)\big/2\right)\right)}{\theta}=\frac{-2\operatorname{sh}\left(p\cdot\frac{\pi i}{p}\right)}{\theta}=0$$

и $\varphi_\theta(u)$ – многочлен степени $p-1$ со старшим членом u^{p-1}; например, при $p=3$ $\varphi_\theta(u)=u^2+3$, при $p=5$ $\varphi_\theta(u)=u^4+5u^2+5$ и т.д.

Далее, имеем

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{\hat{A}}(x_kg_{\hat{A}}(\theta))}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\hat{A}}_{x_k}}$$
$$=\frac{1}{\theta^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta}{[\theta]^{\hat{A}}_{x_k}}=:\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{\infty}A_i\theta^i=\frac{1}{\theta^n}A(\theta),$$

где $A(u) := \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]^{\hat{A}}_{x_k}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i u^i$, $A_i \in \mathbf{Z}_p$ – целые p-адические числа. Из леммы 5.4 следует, что для любого $k > 0$ $\operatorname{Tr}(\theta^k) \simeq 0$ $(\theta = \zeta^{(p+1)/2} - \zeta^{(p-1)/2})$. Поэтому интересующий нас след есть

$$\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}}\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{\infty} A_i\theta^i\right) \simeq \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{n} A_i\theta^i\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\bigl(A_i \operatorname{Tr}(\theta^{i-n})\bigr) = \bigl\langle A(u)B(u)\bigr\rangle_n,$$

где $B_s := \operatorname{Tr}\theta^{-s}$, $B(u) := \sum_{i=0}^{\infty} B_i u^i$. Как и раньше, имеем $B(u) = (p-1) + u\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right)$, $\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right) = -\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)}$. Здесь

$$\varphi_\theta(u) = \frac{2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{u}, \qquad \varphi'_\theta(u) = \frac{p\operatorname{ch}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{u\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}} - \frac{2\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{u^2},$$

$$\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} = \frac{p}{2\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}}\frac{\operatorname{ch}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} - \frac{1}{u},$$

$$B(u) = p-1-u\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi_\theta(u)} = p - \frac{p\frac{u}{2}}{\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}}\frac{\operatorname{ch}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}$$
$$= \frac{p\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} = \frac{p\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}.$$

Здесь мы воспользовались формулами $\operatorname{ch}\bigl(\operatorname{arsh}(u/2)\bigr) = \sqrt{1+u^2/4}$ и $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y - \operatorname{sh}y\operatorname{ch}x$. Далее имеем

$$B(u) = \frac{p\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}$$
$$= \frac{2p\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)+\operatorname{sh}\left((p+1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}$$
$$= p\frac{2[u]^A_{p-1}}{[u]^A_{p-1}+[u]^A_{p+1}} \simeq p\frac{[u]^A_{p-1}-[u]^A_{p+1}}{[u]^A_{p-1}+[u]^A_{p+1}}.$$

Здесь $[u]^A_m = 2\operatorname{sh}\bigl(m\operatorname{arsh}(u/2)\bigr)$, и мы воспользовались формулой $2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y = \operatorname{sh}(y+x) + \operatorname{sh}(y-x)$. Итак, для функций Атьи–Ботта $AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta^{x_k/2}}{1-\zeta^{x_k}}\right)$ для $\hat{A}$-рода мы имеем следующие формулы:

$$AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) = -\left\langle p\frac{\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\sqrt{1+\frac{u^2}{4}}\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\hat{A}}_{x_k}}\right\rangle_n,$$
$$AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) = -\left\langle p\frac{2[u]^A_{p-1}}{[u]^A_{p-1}+[u]^A_{p+1}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\hat{A}}_{x_k}}\right\rangle_n, \tag{27}$$
$$AB_{\hat{A}}(x_1,\dots,x_n) \simeq \left\langle p\frac{[u]^A_{p+1}-[u]^A_{p-1}}{[u]^A_{p-1}+[u]^A_{p+1}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\hat{A}}_{x_k}}\right\rangle_n.$$

Тогда для $\hat{A}$-рода имеем $\hat{A}(M)\equiv\sum_{j=1}^{q}AB_{\hat{A}}\big(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\big)$.

6.2. Вычисления для χ_y-характеристики. Рассмотрим χ_y-характеристику

$$\chi_y(M)=\bigg(\prod_{j=1}^{n}\frac{x_j(1+ye^{-x_j})}{1-e^{-x_j}}\bigg)[M]$$

для многообразия M. Эллиптический комплекс, индекс которого равен $\chi_y(M)$, дается теоремой 2.2. Функции Атьи–Ботта для $\chi_y(M)$-характеристики имеют следующий вид (см. определение 5.2):

$$\begin{aligned}AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n)&=-\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+y\exp\left(\frac{2\pi ix_k}{p}\right)}{1-\exp\left(\frac{2\pi ix_k}{p}\right)}\right)\\&=-\operatorname{Tr}\bigg(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\bigg),\end{aligned}\tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{q}AB_{\chi_y}\big(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\big)\equiv\chi_y(M)\mod p.\tag{29}$$

Те же формулы можно получить и из теоремы 3.2 Атьи–Ботта, как это делалось в п. 4.3 для L-рода.

Теперь вычислим след в определении функций Атьи–Ботта $AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n)$. Имеем в силу предложения 5.3 $\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}=\frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}}$, где $[u]_m^{\chi_y}=\frac{(1+yu)^m-(1-u)^m}{(1+yu)^m+y(1-u)^m}$ (при $y\neq-1$) – степенная система, связанная с χ_y-характеристикой (см. формулу (2_{χ_y})), а

$$\theta=\hat{f}_{\chi_y}\left(-\frac{2\pi i}{p}\right)=\frac{1-e^{2\pi i/p}}{1+ye^{2\pi i/p}}=\frac{1-\zeta}{1+y\zeta}.$$

Тогда $\zeta=\frac{1-\theta}{1+y\theta}$. Далее мы будем предполагать $y\in\mathbf{Z}_p$, $y\neq-1\mod p$. Случай $y=-1\mod p$ сводится к эйлеровой характеристике, рассмотренной выше. Заметим, что при $y=0,1$ получается $\theta=1-\zeta$ и $\theta=\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, что соответствует полученным выше значениям для рода Тодда и L-рода.

Найдем минимальный многочлен элемента $\theta=\frac{1-\zeta}{1+y\zeta}$. Очевидно, это будет

$$\varphi_\theta(u)=\frac{(1+yu)^p-(1-u)^p}{(1+y)u},$$

так как

$$0=\frac{\zeta^p-1}{\zeta-1}=\frac{\left(\frac{1-\theta}{1+y\theta}\right)^p-1}{\frac{1-\theta}{1+y\theta}-1}=\frac{1}{(1+y\theta)^{p-1}}\varphi_\theta(\theta),$$

т.е. $\varphi_\theta(\theta)=0$ и $\varphi_\theta(u)$ – многочлен степени $p-1$ со старшим членом u^{p-1}.

Далее имеем

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\hat f_{\chi_y}\big(x_k \hat g_{\chi_y}(\theta)\big)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}}$$
$$= \frac{1}{\theta^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta}{[\theta]_{x_k}^{\chi_y}} =: \frac{1}{\theta^n} \sum_{i=0}^{\infty} A_i\theta^i = \frac{1}{\theta^n} A(\theta),$$

где $A(u) := \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k}^{\chi_y}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i u^i$, $A_i \in \mathbf{Z}_p$ – целые p-адические числа. Из леммы 5.4 следует, что для любого $k > 0$ $\operatorname{Tr}(\theta^k) \simeq 0$.

Замечание. Представление θ в виде $\theta = C_0 + C_1\zeta + \dots + C_{p-1}\zeta^{p-1}$, $C_i \in \mathbf{Z}_p$, используемое при доказательстве леммы 5.4, получается следующим образом. Так как

$$1+y^p = 1+(y\zeta)^p = (1+y\zeta)\big((y\zeta)^{p-1} - (y\zeta)^{p-2} + (y\zeta)^{p-3} - \dots - y\zeta + 1\big),$$

то

$$\theta = \frac{1-\zeta}{1+y\zeta} = \frac{(1-\zeta)\big((y\zeta)^{p-1} - (y\zeta)^{p-2} + (y\zeta)^{p-3} - \dots - y\zeta + 1\big)}{1+y^p} = \frac{1}{1+y^p}$$
$$\times \Big(\big(y^{p-1}+y^{p-2}\big)\zeta^{p-1} - \big(y^{p-2}+y^{p-3}\big)\zeta^{p-2} + \dots - (y+1)\zeta + 1 - y^{p-1}\Big).$$

По малой теореме Ферма $y^p + 1 \equiv y + 1 \neq 0 \mod p$, поэтому $C_i = (-1)^i \frac{y^i + y^{i-1}}{1+y^p} \in \mathbf{Z}_p$, $(i>0)$, $C_0 = \frac{1-y^{p-1}}{1+y^p} \in \mathbf{Z}_p$.

Интересующий нас след есть

$$\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n} \frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\biggr) \simeq \operatorname{Tr}\biggl(\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{n} A_i\theta^i\biggr) = \sum_{i=0}^{n}\big(A_i \operatorname{Tr}(\theta^{i-n})\big) = \big\langle A(u)B(u)\big\rangle_n,$$

где $B_s := \operatorname{Tr}\theta^{-s}$, $B(u) := \sum_{i=0}^{\infty} B_i u^i$. Как и раньше, имеем $B(u) = (p-1) + u\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right)$, $\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta-u}\right) = -\frac{\varphi_\theta'(u)}{\varphi_\theta(u)}$. Здесь

$$\varphi_\theta(u) = \frac{(1+yu)^p - (1-u)^p}{(1+y)u},$$
$$\varphi_\theta'(u) = \frac{py(1+yu)^{p-1} + p(1-u)^{p-1}}{(1+y)u} - \frac{(1+yu)^p - (1-u)^p}{(1+y)u^2},$$
$$\frac{\varphi_\theta'(u)}{\varphi_\theta(u)} = p\frac{y(1+yu)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p} - \frac{1}{u},$$
$$B(u) = (p-1) - u\frac{\varphi_\theta'(u)}{\varphi_\theta(u)}$$
$$= p - up\frac{y(1+yu)^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p} = p\frac{(1+yu)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p - (1-u)^p}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) &= -\operatorname{Tr}\Bigl(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\Bigr)\\ &= -\Bigl\langle p\frac{(1+yu)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p-(1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\Bigr\rangle_n. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} B(u) &= p\frac{(1+yu)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p-(1-u)^p} = p\frac{(1-u)(1+yu)^p-(1+yu)(1-u)^p}{(1-u)(1+yu)\bigl((1+yu)^p-(1-u)^p\bigr)}\\ &= \frac{p}{(1-u)(1+yu)} - \frac{pu}{(1-u)(1+yu)\frac{(1+yu)^p-(1-u)^p}{(1+yu)^p+y(1-u)^p}}\\ &\simeq -\frac{pu}{[u]^{\chi_y}_p}\frac{1}{(1-u)(1+yu)},\\ &\qquad \frac{1}{(1-u)(1+yu)} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^m y^{m+1}}{1+y}u^m,\\ AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) &\simeq \Bigl\langle \frac{pu}{[u]^{\chi_y}_p}\frac{1}{(1-u)(1+yu)}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\Bigr\rangle_n\\ &= \Bigl\langle \frac{pu}{[u]^{\chi_y}_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^m y^{m+1}}{1+y}u^m\Bigr\rangle_n. \end{aligned}$$

Окончательно имеем следующие формулы для функций Атьи–Ботта для χ_y-характеристики $AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) = -\operatorname{Tr}\Bigl(\prod_{k=1}^{n}\frac{1+y\zeta^{x_k}}{1-\zeta^{x_k}}\Bigr)$ (при $y\neq -1 \mod p$):

$$\begin{aligned} AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) &= -\Bigl\langle p\frac{(1+yu)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+yu)^p-(1-u)^p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\Bigr\rangle_n,\\ AB_{\chi_y}(x_1,\dots,x_n) &\simeq \sum_{m=0}^{n}\frac{1+(-1)^m y^{m+1}}{1+y}\Bigl\langle \frac{pu}{[u]^{\chi_y}_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k}}\Bigr\rangle_{n-m}. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $[u]^{\chi_y}_m = \frac{(1+yu)^m-(1-u)^m}{(1+yu)^m+y(1-u)^m}$ – степенная система, связанная с χ_y-характеристикой. Тогда для χ_y-характеристики имеем

$$\begin{aligned} \chi_y(M) &\equiv \sum_{j=1}^{q} AB_{\chi_y}\bigl(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}\bigr)\\ &\equiv \sum_{j=1}^{q}\sum_{m=0}^{n}\frac{1+(-1)^m y^{m+1}}{1+y}\Bigl\langle \frac{pu}{[u]^{\chi_y}_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\chi_y}_{x_k^{(j)}}}\Bigr\rangle_{n-m} \mod p. \end{aligned}$$

Эти формулы обобщают формулы (13), (17) для рода Тодда и L-рода, которые получаются подстановкой $y=0$ и $y=1$ соответственно.

§ 7. Роль уравнений Коннера–Флойда в задаче о вычислении родов Хирцебруха в терминах инвариантов действия

Здесь мы рассматриваем связь результатов § 5 с так называемыми уравнениями Коннера–Флойда, введенными С. П. Новиковым в работах [12], [13] (аналогичные соотношения были также получены в работах [8], [11]). А именно, в этих работах было доказано, что наборы весов $x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)}$, $x_k^{(j)}\in\mathbf{Z}/p$, являются наборами весов действия группы $\mathbf{Z}/p$ на многообразии M^{2n} тогда и только тогда, когда они связаны уравнениями Коннера–Флойда

$$\sum_{j=1}^{q}\biggl\langle\frac{pu}{[u]_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}}\biggr\rangle_m\simeq 0,\qquad m=0,\dots,n-1. \tag{31}$$

Здесь $[u]_m$ – степенная система, соответствующая формальной группе геометрических кобордизмов (см. [4], [12]). Рассмотрев род Хирцебруха $\varphi\colon\Omega_U\to\Lambda$, мы получаем уравнения Коннера–Флойда, соответствующие роду φ:

$$\sum_{j=1}^{q}\biggl\langle\frac{pu}{[u]_p^{\varphi}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k^{(j)}}}\biggr\rangle_m\simeq 0,\qquad m=0,\dots,n-1, \tag{32}$$

где $[u]_m^{\varphi}$ – степенная система, соответствующая роду φ.

Кроме того, в работе [5] из теории кобордизмов была выведена следующая формула для рода Тодда:

$$\operatorname{td}(M)\simeq\sum_{j=1}^{q}\biggl\langle\frac{pu}{[u]_p^{\mathrm{td}}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\mathrm{td}}_{x_k^{(j)}}}\biggr\rangle_n, \tag{33}$$

и показано, что разность между формулой

$$\operatorname{td}(M)\simeq-\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}}\biggr)\simeq\sum_{j=1}^{q}\sum_{m=0}^{n}\biggl\langle\frac{pu}{[u]_p^{\mathrm{td}}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\mathrm{td}}_{x_k^{(j)}}}\biggr\rangle_m,$$

выведенной из теоремы Атьи–Ботта (см. п. 4.2), и суммой уравнений Коннера–Флойда (32) для рода Тодда есть в точности формула (33) (здесь $\zeta=e^{2\pi i/p}$, $[u]_m^{\mathrm{td}}=1-(1-u)^m$).

Далее мы обобщим этот результат на случай произвольного рода φ, удовлетворяющего условиям теоремы 5.1.

Теорема 7.1. *Разность между формулой из теоремы* 5.1

$$\varphi(M)\simeq-\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Tr}\biggl(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k^{(j)}}}\biggr),\qquad\theta=f_{\varphi}\left(-\frac{2\pi i}{p}\right),$$

и суммой уравнений Коннера–Флойда (32) *для рода φ с некоторыми целыми p-адическими коэффициентами дает следующую формулу для рода φ:*

$$\varphi(M)\simeq\sum_{j=1}^{q}\biggl\langle\frac{pu}{[u]_p^{\varphi}}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k^{(j)}}}\biggr\rangle_n.$$

Доказательство. Имеем

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k}}=\frac{1}{\theta^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta}{[\theta]^{\varphi}_{x_k}}=:\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{\infty}A_i\theta^i=\frac{1}{\theta^n}A(\theta),$$

где $A(u):=\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}}=\sum_{i=0}^{\infty}A_iu^i$, $A_i\in\mathbf{Z}_p$ – целые p-адические числа. Поэтому

$$\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k}}\right)=\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{\infty}A_i\theta^i\right)\simeq\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\theta^n}\sum_{i=0}^{n}A_i\theta^i\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}A_i\operatorname{Tr}\theta^{i-n}=\left\langle\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}}B(u)\right\rangle_n,$$

где $B_s:=\operatorname{Tr}\theta^{-s}$, $B(u):=\sum_{i=0}^{\infty}B_iu^i$.

Введем теперь ряд $h(u)$:

$$h(u)=p\frac{[u]^{\varphi}_p-u}{B(u)[u]^{\varphi}_p}. \tag{34}$$

Тогда $h(u)$ – ряд с целыми p-адическими коэффициентами и свободным членом 1. Действительно,

$$h(0)=p\frac{[u]^{\varphi}_p-u}{B(u)[u]^{\varphi}_p}\bigg|_{u=0}=p\frac{1-\frac{u}{[u]^{\varphi}_p}}{B(u)}\bigg|_{u=0}=\frac{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}{p-1}=1,$$

так как $B(0)=B_0=\operatorname{Tr}\theta^0=p-1$, $[u]^{\varphi}_p=pu+\cdots$. Из формулы (34) следует, что

$$B(u)=\frac{p}{h(u)}-\frac{pu}{[u]^{\varphi}_p}\frac{1}{h(u)},$$

т.е.

$$B(u)\simeq-\frac{pu}{[u]^{\varphi}_p}\frac{1}{h(u)}=-\frac{pu}{[u]^{\varphi}_p}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}H_iu^i\right),$$

где H_i – коэффициенты ряда $\frac{1}{h(u)}$. Поэтому

$$\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x_k}}\right)\simeq-\left\langle\frac{pu}{[u]^{\varphi}_p}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}H_iu^i\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}}\right\rangle_n$$
$$=-\left\langle\frac{pu}{[u]^{\varphi}_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}}\right\rangle_n-\sum_{m=0}^{n-1}H_{n-m}\left\langle\frac{pu}{[u]^{\varphi}_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x_k}}\right\rangle_m,$$

$$\varphi(M)\simeq-\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]^{\varphi}_{x^{(j)}_k}}\right)$$
$$\simeq\sum_{j=1}^{q}\left\langle\frac{pu}{[u]^{\varphi}_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x^{(j)}_k}}\right\rangle_n+\sum_{m=0}^{n-1}H_{n-m}\left(\sum_{j=1}^{q}\left\langle\frac{pu}{[u]^{\varphi}_p}\prod_{k=1}^{n}\frac{u}{[u]^{\varphi}_{x^{(j)}_k}}\right\rangle_m\right).$$

Теорема доказана.

Пример 7.1. Рассмотрим род Тодда $\mathrm{td}(M)$. Тогда $[u]_p^{\mathrm{td}} = 1-(1-u)^p$, $B(u) = p\frac{1-(1-u)^{p-1}}{1-(1-u)^p}$ (см. п. 4.2). Таким образом,

$$h(u) = \frac{1-(1-u)^p - u}{1-(1-u)^{p-1}} = 1-u$$

(см. формулу (34)).

Пример 7.2. Рассмотрим L-род $L(M)$. Тогда

$$[u]_p^L = \frac{(1+u)^p - (1-u)^p}{(1+u)^p + (1-u)^p}, \qquad B(u) = p\frac{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}}{(1+u)^p - (1-u)^p}$$

(см. п. 4.3). Поэтому

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{\frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{(1+u)^p+(1-u)^p} - u}{\frac{(1+u)^{p-1}-(1-u)^{p-1}}{(1+u)^p+(1-u)^p}} \\ &= \frac{(1+u)^p - (1-u)^p - u(1+u)^p - u(1-u)^p}{(1+u)^{p-1} - (1-u)^{p-1}} = (1+u)(1-u). \end{aligned}$$

Это вполне согласуется с вычислениями из пп. 4.2, 4.3.

Пример 7.3. Рассмотрим $\hat{A}$-род $\hat{A}(M)$. Тогда

$$[u]_p^{\hat{A}} = 2\operatorname{sh}\left(p \operatorname{arsh}\frac{u}{2}\right), \qquad B(u) = p\frac{\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sh}\left(p\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}$$

(см. п. 6.1). Таким образом,

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{\left(2\operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right) - u\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{2\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{\left(\operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right) - \operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{sh}\left((p-1)\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{2\operatorname{sh}\left(\frac{p-1}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p+1}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{p-1}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-1}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{p+1}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{p-1}{2}\operatorname{arsh}\left(\frac{u}{2}\right)\right)}. \end{aligned}$$

§ 8. Эллиптический род для многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$

Пусть M^{2n} – $2n$-мерное вещественное гладкое многообразие с комплексной структурой в стабильном касательном расслоении.

Определение 8.1 (см. [7]). *Эллиптическим родом* называется род Хирцебруха $\varphi(M^{2n}) = \Big(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x_i)}[M^{2n}]\Big)$, для которого функция f удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

1) ${f'}^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4,\ f(0) = 0$;
2) $f(u+v) = \dfrac{f(u)f'(v) + f'(u)f(v)}{1 - \varepsilon f(u)^2 f(v)^2}$.

Пусть $L = 2\pi i(e\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z})$ – решетка в $\mathbf{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$, $L' = L\backslash\{0\}$, $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L'}\Big(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big)$ – $\wp$-функция Вейерштрасса, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 4\big(\wp(z) - e_1\big)\big(\wp(z) - e_2\big)\big(\wp(z) - e_3\big),$$

где $e_1 = \wp(\pi i)$, $e_2 = \wp(\pi i\tau)$, $e_3 = \wp\big(\pi i(\tau+1)\big)$ – нули производной $\wp$-функции. Функция $f(z) = 1\big/\sqrt{\wp(z) - e_1}$ (т.е. $f(z) = \operatorname{sn}(z)$ – эллиптический синус) удовлетворяет условиям из определения 8.1 для $\delta = -\frac{3}{2}e_1$, $\varepsilon = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$ (см. [7]); поэтому соответствующий род будет эллиптическим. Однако так как все числа e_1, e_2, e_3 различны, то $\varepsilon = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \neq 0$ и $\delta^2 - \varepsilon = \frac{1}{4}(e_2 - e_3)^2 \neq 0$. Вырожденные случаи соответствуют $\hat{A}$-роду ($e_1 = e_2$ или $e_1 = e_3$, тогда $\varepsilon = 0$, и если взять $\delta = -1/8$, получим ${f'}^2 = 1 + \frac{1}{4}f^2$, т.е. $f(x) = 2\operatorname{sh}(x/2)$) и L-роду ($e_2 = e_3$, т.е. $\delta^2 - \varepsilon = 0$, и если взять $\delta = \varepsilon = 1$, получим ${f'}^2 = (1 - f^2)^2$, т.е. $f(x) = \operatorname{th} x$).

Из рассмотрения дифференциального уравнения, которому удовлетворяет $f(x)$ для эллиптического рода, ясно, что коэффициент при x^{2k} степенного ряда $f(x)$ является взвешенным однородным полиномом степени $2k$ от δ и ε с коэффициентами из кольца $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, если считать, что $\deg\varepsilon = 4$, $\deg\delta = 2$. Таким образом, эллиптический род $\varphi(M^{2n}) = \Big(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{f(x_i)}\Big)[M^{2n}]$ является однородным полиномом степени $2n$ от δ и ε, т.е. φ можно рассматривать как гомоморфизм кольца комплексных кобордизмов Ω_U в кольцо $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right][\delta,\varepsilon]$ или в кольцо $\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon]$, $p > 2$.

Функция $f(\tau, x)$ является эллиптической по отношению к подрешетке $\tilde{L}$ решетки L с дивизором $(0) + (\pi i 2\tau) - (\pi i) - \big(\pi i(1+2\tau)\big)$. Имеется следующее разложение $f(\tau, x)$ в бесконечное произведение (см. [7]):

$$f(\tau, x) = 2\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1 - q^k e^x)(1 - q^k e^{-x})(1 + q^k)^2}{(1 + q^k e^x)(1 + q^k e^{-x})(1 - q^k)^2}, \qquad q = e^{2\pi i\tau}. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь

$$\left\{L_i^{(q)} = \sum_{p=0}^{n}\Lambda^{p,i}\otimes\Big(\bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\Big)\right\},$$

где $T_{\mathbf{C}}M$ – комплексификация касательного расслоения к M, $\Lambda_t E := \sum_{k=0}^{\infty}(\Lambda^k E)t^k$, $S_t E := \sum_{k=0}^{\infty}(S^k E)t^k$. $L^{(q)}$ – это степенной ряд от q, коэффициентами которого являются эллиптические комплексы расслоений над M, ассоциированных с TM. Его индекс $\operatorname{ind}(L^{(q)}) = \operatorname{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\right)$ – "скрученная" сигнатура (см. [7]), – как следует из теоремы Атьи–Зингера 2.1 и леммы 2.3, есть

$$\operatorname{ind}(L^{(q)}) = \left(\prod_{j=1}^{n}\left(x_j\frac{1+e^{-x_j}}{1-e^{-x_j}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+q^k e^{x_j})(1+q^k e^{-x_j})}{(1-q^k e^{x_j})(1-q^k e^{-x_j})}\right)\right)[M^{2n}]. \tag{36}$$

Это степенной ряд от q с целочисленными коэффициентами и свободным членом (коэффициентом при q^0) $L(M) = \operatorname{sign} M$ (см. [7]). Сравнивая это выражение с (35) и учитывая, что

$$\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q^k)^2}{(1+q^k)^2} = \varepsilon^{1/4} \tag{37}$$

(см. [7]), получаем

$$\varphi(M) = \operatorname{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\right)\varepsilon^{n/4}. \tag{38}$$

Пусть теперь, как и раньше, на многообразии M^{2n} действует оператор g, $g^p = 1$, с конечным числом неподвижных точек $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_r$. В соответствии с изложенным в § 5 эквивариантный индекс комплекса $L^{(q)}$, $\operatorname{ind}(g, L^{(q)})$, равен сумме функций неподвижных точек $\sigma_{L^{(q)}}(\mathscr{P}_j)$, которые получаются из формулы (36) заменой M^{2n} на $\mathscr{P}_j$, $x_1x_2\ldots x_n$ на 1 и x_k на $-\frac{2\pi i}{p}x_k^{(j)}$:

$$\sigma_{L^{(q)}}(\mathscr{P}_j) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}\right), \qquad \zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Далее, $\frac{1}{p}\sum_{l\in\mathbf{Z}/p}\operatorname{ind}(g^l, L^{(q)}) = s(q)$ – степенной ряд от q, коэффициентом которого при q^k является альтернированная сумма размерностей инвариантных подпространств действия g в когомологиях комплекса, который является коэффициентом при q^k в разложении $L^{(q)}$:

$$L^{(q)} = L + 2L\otimes T_{\mathbf{C}}Mq + L\otimes(2T_{\mathbf{C}}M + T_{\mathbf{C}}M\otimes T_{\mathbf{C}}M + S^2T_{\mathbf{C}}M + \Lambda^2T_{\mathbf{C}}M)q^2 + \cdots,$$

где $L = \sum_{p=0}^{n}\Lambda^{p,i}$. Таким образом, $s(q)$ – ряд с целыми коэффициентами. Кроме того, $\operatorname{ind}(1, L^{(q)}) = \operatorname{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\right)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}\left(M, \bigotimes_{k=1}^{\infty} S_{q^k}T_{\mathbf{C}}M \otimes \bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\right)\\
&\quad = \operatorname{ind}(1, L^{(q)}) = -\sum_{l=1}^{p-1}\operatorname{ind}(g^l, L^{(q)}) + ps(q)\\
&\quad = -\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{lx_k^{(j)}}}{1-\zeta^{lx_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{lx_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{lx_k^{(j)}}\right)}\right) + ps(q).
\end{aligned}$$

Левая часть этого соотношения лежит в кольце $\mathbf{Z}[[q]]$ степенных рядов с целыми коэффициентами, а правая в его расширении – кольце $\mathbf{Z}[[q]](\zeta)$, $\zeta^p=1$. Погрузим обе части в p-адические пополнения соответствующих полей и рассмотрим теоретико-числовой след $\mathrm{Tr}\colon \mathbf{Q}_p\{q\}(\zeta)\to\mathbf{Q}_p\{q\}$, где $\mathbf{Q}_p\{q\}$ – поле лорановских рядов от q с рациональными p-адическими коэффициентами, а $\mathbf{Q}_p\{q\}(\zeta)$ – его алгебраическое расширение элементом ζ, $\zeta^p=1$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{p-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{lx_k^{(j)}}}{1-\zeta^{lx_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{lx_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-lx_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{lx_k^{(j)}}\right)}\right)$$
$$=\mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}\right)\right),$$

и мы доказали

Предложение 8.2. *Имеет место следующая формула для "скрученной" сигнатуры – индекса комплекса* $\left\{L_i^{(q)}=\sum_{p=0}^{n}\Lambda^{p,i}\otimes\left(\bigotimes_{k=1}^{\infty}S_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\otimes\bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\right)\right\}$:

$$\mathrm{sign}\left(M,\bigotimes_{k=1}^{\infty}S_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\otimes\bigotimes_{k=1}^{\infty}\Lambda_{q^k}T_{\mathbf{C}}M\right)$$
$$\equiv-\sum_{j=1}^{r}\mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}{\left(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)}\right)\right)\mod p\mathbf{Z}[[q]]. \tag{39}$$

С учетом соотношений (37) и (38) получаем отсюда соотношение для эллиптического рода $\varphi(M)$:

$$\varphi(M)\equiv-\sum_{j=1}^{r}\mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\zeta^{x_k^{(j)}}}{1-\zeta^{x_k^{(j)}}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1+q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)(1-q^i)^2}{\left(1-q^i\zeta^{-x_k^{(j)}}\right)\left(1-q^i\zeta^{x_k^{(j)}}\right)(1+q^i)^2}\right)\right)\mod p\mathbf{Z}_p[[q]].$$

С учетом разложения (35) функции $f(\tau,x)=\mathrm{sn}\,x$ в бесконечное произведение мы можем переписать последнее соотношение в виде

$$\varphi(M)\equiv-\sum_{j=1}^{r}\mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{f\left(\tau,-\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p}\right)}\right)\mod p\mathbf{Z}_p[[q]],\qquad q=e^{2\pi i\tau}.$$

Однако $\varphi(M)$ – взвешенный однородный многочлен от δ, ε с коэффициентами из кольца $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \subset \mathbf{Z}_p$, и поэтому нам бы хотелось получить соотношение для $\varphi(M)$ в кольце $\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon]$, а не в кольце $\mathbf{Z}_p\big[[q]\big]$ ($\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon]$ является подкольцом $\mathbf{Z}_p\big[[q]\big]$). Введем, как и раньше, $\theta = f\left(\tau, -\frac{2\pi i}{p}\right)$. Тогда $f\left(\tau, -\frac{2\pi i x_k}{p}\right) = [\theta]_{x_k}$, где $[\theta]_m = f\big(mf^{-1}(\theta)\big)$ – степенная система, связанная с эллиптическим родом. Заметим, что θ – алгебраический элемент над полем $\mathbf{Q}(\delta,\varepsilon)$. Действительно,

$$[\theta]_p = f\left(\tau, -\frac{2\pi i p}{p}\right) = f(\tau, -2\pi i) = 0,$$

а $[u]_p$ при нечетных p является рациональной функцией от u с коэффициентами δ, ε (например, $[u]_3 = u\frac{3-8\delta u^2+6\varepsilon u^4-\varepsilon^2u^8}{1-6\varepsilon u^4+8\delta\varepsilon u^6-3\varepsilon^2u^8}$; это следует из рассмотрения дифференциального уравнения и теоремы сложения для $f(\tau,x)=\operatorname{sn} x$). Числитель $[u]_p$ будет многочленом от u с коэффициентами δ, ε, корнем которого является θ (очевидно, это будет многочлен степени p^2 от u, корнями которого являются значения f в точках кратности p решетки $2\pi i(\mathbf{Z}2\tau+\mathbf{Z})$, т.е. $f\left(\tau, 2\pi i\frac{2k\tau+l}{p}\right)$, $k,l\in\mathbf{Z}$, в частности $\theta, [\theta]_2, \dots, [\theta]_{p-1}, [\theta]_p = 0$).

Окончательно имеем

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{r}\operatorname{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{[\theta]_{x_k}}\right) \mod p\mathbf{Z}_p\big[[q]\big], \qquad \theta = f\left(\tau, -\frac{2\pi i}{p}\right), \tag{40}$$

причем левая и правая части являются многочленами от δ, ε.

Лемма 8.3. *Пусть $P(\delta,\varepsilon)$ – некоторый многочлен от δ, ε такой, что $P(\delta,\varepsilon)\equiv 0 \mod p\mathbf{Z}_p\big[[q]\big]$. Тогда $P(\delta,\varepsilon)\equiv 0 \mod p\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon]$, т.е. все коэффициенты $P(\delta,\varepsilon)$ лежат в $p\mathbf{Z}_p$.*

Доказательство. Функции δ, ε являются модулярными формами веса 2 и 4 соответственно для подгруппы $\Gamma_0(2)\subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, $\Gamma_0(2) := \left\{A\in\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \;\middle|\; A\equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod 2\right\}$, и имеют следующие разложения Фурье вблизи бесконечности (т.е. при малых $q=e^{2\pi i\tau}$):

$$\begin{aligned}
\delta &= -\frac{3}{2}e_1 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d|n\\ d\equiv 1 \mod 2}} dq^n \\
&= \frac{1}{4} + 6(q+q^2+4q^3+q^4+6q^5+4q^6+\cdots), \\
\varepsilon &= (e_1-e_2)(e_1-e_3) \\
&= \frac{1}{16} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}(-1)^d d^3q^n = \frac{1}{16} - q + 7q^2 - 28q^3 + 71q^4 - \cdots
\end{aligned}$$

Кроме того, $\delta(0) = -\frac{1}{8}$, $\varepsilon(0)=0$, $\delta\left(\frac{1+i}{2}\right)=0$, $\varepsilon\left(\frac{1+i}{2}\right)\neq 0$ (см., например, [7]).

Доказательство леммы будем проводить по индукции по степени $\deg P = 2n$ многочлена P. Если $\deg P(\delta,\varepsilon) = 2$, то $P(\delta,\varepsilon) = b\delta$, поэтому $b \in p\mathbf{Z}_p$, так как $\delta \notin p\mathbf{Z}_p$. Пусть теперь мы доказали лемму для всех многочленов степени $< 2k$ и $\deg P(\delta,\varepsilon) = 2k$. Представим $P(\delta,\varepsilon)$ в виде $P(\delta,\varepsilon) = a\varepsilon^{k/2} + Q(\delta,\varepsilon)\varepsilon\delta + b\delta^k$. Тогда $\deg Q(\delta,\varepsilon) < 2k$, значит, $Q(\delta,\varepsilon) \equiv 0 \mod p\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon]$. Подставим $\tau = \frac{1+i}{2}$ в $P(\delta,\varepsilon)$ и получим, что $a\varepsilon\left(\frac{1+i}{2}\right)^{k/2}$ делится на p, т.е. a делится на p. Подставим теперь $\tau = 0$ и получим, что $\left(-\frac{1}{8}\right)^k b$ делится на p, т.е. b делится на p, и все коэффициенты $P(\delta,\varepsilon)$ лежат в $p\mathbf{Z}_p$. Лемма доказана.

Из этой леммы и соотношения (40) получаем следующую теорему.

Теорема 8.4. *Если на M^{2n} действует трансверсальный эндоморфизм g такой, что $g^p = 1$, то имеется следующая формула для эллиптического рода $\varphi(M^{2n})$:*

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{f\left(\tau, -\frac{2\pi i x_k^{(j)}}{p}\right)}\right) \mod p\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon], \qquad (41)$$

где в правой части стоит теоретико-числовой след $\mathbf{Q}_p(\delta,\varepsilon)(\zeta) \to \mathbf{Q}_p(\delta,\varepsilon)$.

Все дальнейшие построения §5 и §7, в частности лемма 5.4 и теорема 7.1, без труда переносятся на случай эллиптического рода (надо лишь заменить в формулировках кольцо $\mathbf{Z}_p$ на $\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon]$). Таким образом, разность между формулой (41) и суммой с коэффициентами уравнений Коннера–Флойда для эллиптического рода:

$$\sum_{j=1}^{r}\left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}}\right\rangle_m \equiv 0 \mod p\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon], \qquad m = 0,\dots,n-1,$$

дает следующую формулу для эллиптического рода:

$$\varphi(M^{2n}) \equiv \sum_{j=1}^{r}\left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{k=1}^{n} \frac{u}{[u]_{x_k^{(j)}}}\right\rangle_n \mod p\mathbf{Z}_p[\delta,\varepsilon]. \qquad (42)$$

В последних двух формулах $[u]_m$ означает степенную систему, соответствующую эллиптическому роду.

В качестве примера применения формул для эллиптического рода рассмотрим действие группы $\mathbf{Z}/p$ на $\mathbf{C}P^n$, при котором образующая g действует так (в однородных координатах): $(z_0 : z_1 : \dots : z_n) \to (\lambda_0 z_0 : \lambda_1 z_1 : \dots : \lambda_n z_n)$, $\lambda_i = e^{\frac{2\pi i}{p} y_i}$. Если $y_0,\dots,y_n$ – все различные вычеты $\mathrm{mod}\, p$ (в частности, отсюда следует, что $n < p$), то на $\mathbf{C}P^n$ будет конечное число неподвижных точек относительно такого действия, а именно неподвижными будут точки $\mathscr{P}_j = \left(0,\dots,\overset{j}{1},\dots,0\right)$, $j = \overline{0,n}$.

В локальных координатах $\left(\frac{z_0}{z_j}, \frac{z_1}{z_j}, \dots, \widehat{\frac{z_j}{z_j}}, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right)$ вблизи $\mathscr{P}_j$ действие g будет линейным: $\frac{z_i}{z_j} \to \frac{\lambda_i z_i}{\lambda_j z_j} = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}(y_i - y_j)\right)\frac{z_i}{z_j}$. Поэтому собственными числами матрицы Якоби отображения g в точке $\mathscr{P}_j$ будут $\exp\left(\frac{2\pi i}{p}(y_i - y_j)\right)$, $i \neq j$, а соответсвующими весами будут $x_i^{(j)} = y_i - y_j$.

Рассмотрим эллиптический род φ. Как известно,

$$\varphi(\mathbf{C}P^n) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_n . \tag{43}$$

Действительно, из формулы (1) следует, что $\varphi(\mathbf{C}P^n) = \left\langle g'_\varphi(u)\right\rangle_n$, где $g_\varphi(u) = f_\varphi^{-1}(u)$ – логарифм соответствующей формальной группы. Но так как $(f')^2 = 1 - 2\delta f^2 + \varepsilon f^4$, то $g'_\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2\delta u^2+\varepsilon u^4}}$. С другой стороны, из формулы (42) следует, что

$$\varphi(\mathbf{C}P^n) \equiv \sum_{j=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i\neq j} \frac{u}{[u]_{y_i - y_j}} \right\rangle_n \mod p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon].$$

Таким образом, для любого набора различных вычетов $y_0, y_1, \dots, y_n \mod p$, где $n < p$, имеем

$$\sum_{j=0}^{n} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i\neq j} \frac{u}{[u]_{y_i - y_j}} \right\rangle_n \equiv \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_n \mod p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon].$$

Функция $(1 - 2\delta u + u^2)^{-1/2}$ является производящей для полиномов Лежандра $P_n(\delta)$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{1-2\delta u+u^2}} = 1 + \sum_{n>0} P_n(\delta)u^n$; поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} = 1 + \sum_{n>0} P_n\left(\frac{\delta}{k}\right)(ku^2)^n,$$

где $k^2 = \varepsilon$. Отсюда

$$\begin{gathered} \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_{2m} = k^m P_m\left(\frac{\delta}{k}\right), \\ \sum_{j=0}^{2m} \left\langle \frac{pu}{[u]_p} \prod_{i\neq j} \frac{u}{[u]_{y_i - y_j}} \right\rangle_{2m} \equiv k^m P_m\left(\frac{\delta}{k}\right) \mod p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]. \end{gathered} \tag{44}$$

В простейшем случае $2m = n = p-1$ набор $y_0-y_j, y_1-y_j, \dots, \widehat{y_j - y_j}, \dots, y_{p-1}-y_j$ представляет собой полный набор ненулевых вычетов $1, 2, \dots, p-1$ (так как все y_i различны); поэтому все слагаемые в левой части последней формулы равны и мы имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{p^2 u^p}{u[u]_2[u]_3 \cdots [u]_{p-1}[u]_p} \right\rangle_{p-1} &\equiv \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}} \right\rangle_{p-1} \\ &= k^{\frac{p-1}{2}} P_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\delta}{k}\right) \mod p\mathbf{Z}_p[\delta, \varepsilon]. \end{aligned} \tag{45}$$

Это соотношение можно вывести также из известного сравнения

$$[u]_p \equiv P_{(p-1)/2}(\delta)u^p + \cdots \mod p\mathbf{Z}_p[\delta]$$

(см. [10]), где мы положили для простоты $k=1$, а многоточие обозначает члены более высокого порядка. Действительно, запишем последнее сравнение в виде

$$[u]_p = pu(1+b_1u+\cdots+b_{p-1}u^{p-1}) + P_{(p-1)/2}(\delta)u^p + \cdots,$$

где $b_1,\ldots,b_{p-1}\in\mathbf{Z}[\delta]$. Отсюда

$$\begin{aligned}
&\left\langle\frac{p^2u^p}{u[u]_2\cdots[u]_{p-1}[u]_p}\right\rangle_{p-1}\\
&\quad=\left\langle\frac{p^2}{u(2u+\cdots)\ldots((p-1)u+\cdots)}\right.\\
&\qquad\times\left.\frac{u^p}{(pu(1+b_1u+\cdots+b_{p-1}u^{p-1})+P_{(p-1)/2}(\delta)u^p+\cdots)}\right\rangle_{p-1}\\
&\quad=\left\langle\frac{1}{(p-1)!}\frac{p^2}{p(1+c_1u+\cdots+c_{p-1}u^{p-1})+P_{(p-1)/2}(\delta)u^{p-1}+\cdots}\right\rangle_{p-1}\\
&\quad=\frac{1}{(p-1)!}\left\langle\frac{p}{1+c_1u+\cdots+c_{p-2}u^{p-2}+\bigl(c_{p-1}+P_{(p-1)/2}(\delta)/p\bigr)u^{p-1}}\right\rangle_{p-1},
\end{aligned}$$

где $c_1,\ldots,c_{p-1}$ снова лежат в $\mathbf{Z}[\delta]$. При вычислении последнего выражения $\bmod p$ получим

$$\left\langle\frac{p^2u^p}{u[u]_2[u]_3\cdots[u]_{p-1}[u]_p}\right\rangle_{p-1} \equiv -\frac{1}{(p-1)!}P_{(p-1)/2}(\delta) \equiv P_{(p-1)/2}(\delta) \mod p\mathbf{Z}_p[\delta],$$

так как $(p-1)!\equiv -1 \mod p$, что и требовалось доказать.

§ 9. Обобщение на случай действия группы $\mathbf{Z}/p$ с неподвижными подмногообразиями, имеющими тривиальное нормальное расслоение

Пусть оператор g, $g^p=1$, действует на квазикомплексном многообразии M^{2n} с множеством неподвижных точек M^g, представленным в виде объединения связных неподвижных подмногообразий: $M^g=\bigcup_\nu M^g_\nu$, причем все подмногообразия M^g_ν имеют тривиальные нормальные расслоения в M.

Рассмотрим некоторый род Хирцебруха φ, вычисляемый как индекс эллиптического комплекса E_φ расслоений, ассоциированных с касательным расслоением TM. Во избежание дальнейшей путаницы обозначим первые классы Чженя "виртуальных" одномерных подрасслоений TM через z_i; тогда $c(TM)=(1+z_1)\ldots(1+z_n)$.

Пусть $Y = M_k^g$ – одно из неподвижных подмногообразий действия g. Согласно формулам (20) из § 5 имеем

$$TM|_Y = \bigoplus_j N_{\lambda_j}, \qquad c(N_{\lambda_j}) = \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \left(1 + z_i^{(\lambda_j)}\right),$$
$$c(TM_Y) = \prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \left(1 + z_i^{(\lambda_j)}\right) = \prod_{i=1}^{n} (1 + z_i),$$

где N_{λ_j} – подрасслоение $TM|_Y$, соответствующее собственному значению λ_j дифференциала g; $\lambda_j^p = 1$, т.е. $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p}$, $N_1 = TY$ – касательное расслоение к Y, $d_{\lambda_j} = \dim N_{\lambda_j}$. В соответствии с результатами Атьи–Зингера [3], изложенными в § 5, эквивариантный индекс $\mathrm{ind}(g, E_\varphi)$ комплекса E_φ вычисляется по формуле $\mathrm{ind}(g, E_\varphi) = \sum_\nu \sigma(M_\nu^g)$, и имеется следующий "рецепт" для вычисления функций неподвижных многообразий $\sigma(M_\nu^g)$, входящих в сумму: для вычисления функции $\sigma(Y)$ надо в формуле (21) для индекса E_φ заменить M на Y и $e^{z_i^{(\lambda_j)}}$ на $\lambda_j^{-1} e^{z_i^{(\lambda_j)}}$, или, с учетом $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p}$, мы должны заменить $z_i^{(\lambda_j)}$ на $z_i^{(\lambda_j)} - 2\pi i x_j/p$.

Так как $\mathrm{ind}(E_\varphi) = \varphi(M)$, то мы имеем

$$\mathrm{ind}(E_\varphi) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{z_i}{f(z_i)}\right)[M] = \left(\prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \frac{z_i^{(\lambda_j)}}{f\left(z_i^{(\lambda_j)}\right)}\right)[M].$$

Поэтому наш "рецепт" дает в этом случае

$$\sigma(Y) = \left(\prod_{\lambda_j \neq 1} \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} \frac{1}{f\left(z_i^{(\lambda_j)} - 2\pi i x_j/p\right)} \prod_{i=1}^{d_1} \frac{z_i^{(1)}}{f\left(z_i^{(1)}\right)}\right)[Y],$$

так как от $c_n(X) = \prod_j \prod_{i=1}^{d_{\lambda_j}} z_i^{(\lambda_j)}$ останется только $c_n(Y) = \prod_{i=1}^{d_1} z_i^{(1)}$, и все веса x_k, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$, равны нулю. Далее, так как Y имеет тривиальное нормальное расслоение в M, то $z_i^{(\lambda_j)} = 0$ при $\lambda_j \neq 1$, и мы имеем $\sigma(Y) = \prod_j \frac{1}{f(-2\pi i x_j/p)} \varphi(Y)$, где x_j – веса, соответствующие всем неединичным собственным значениям $\lambda_j = e^{2\pi i x_j/p} \neq 1$; x_j – ненулевые вычеты $\mathrm{mod}\, p$. Окончательно для эквивариантного индекса имеем соотношение

$$\mathrm{ind}(g, E_\varphi) = \sum_\nu \left(\prod_j \frac{1}{f\left(-2\pi i x_j^{(\nu)}\right)} \varphi(M_\nu^g)\right).$$

Теорема 5.1 и предложение 5.3 естественным образом обобщаются на случай действий с неподвижными подмногообразиями с тривиальным нормальным расслоением, и мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 9.1. *Пусть имеется эллиптический комплекс расслоений, ассоциированных с TM, индекс которого равен некоторому роду Хирцебруха $\varphi(M)$ многообразия M. Тогда имеется следующая формула для $\varphi(M)$:*

$$\varphi(M) \equiv -\sum_{\nu} \mathrm{Tr}\left(\prod_j \frac{1}{f\left(-2\pi i x_j^{(\nu)}/p\right)}\right)\varphi(M_\nu^g)$$
$$= -\sum_{\nu} \mathrm{Tr}\left(\prod_j \frac{1}{[\theta]_{x_j^\nu}^{\varphi}}\right)\varphi(M_\nu^g) \mod p,$$

где $M^g = \bigcup_\nu M_\nu^g$ – множество неподвижных точек, $\theta = f_\varphi(-2\pi i/p)$, $[\theta]_k$ – степенная система, $\mathrm{Tr}\colon \mathbf{Q}(e^{2\pi i/p}) \to \mathbf{Q}$ – теоретико-числовой след (если род φ принимает значения не в кольце $\mathbf{Z}$, а в другом кольце Λ, то $\mathbf{Q}$ заменяется на соответствующее поле частных).

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.физ.-матем. наук В. М. Бухштаберу и акад. С. П. Новикову за постановку задачи и В. М. Бухштаберу за полезные рекомендации и стимулирующие обсуждения.

Список литературы

1. *Атья М., Ботт Р.* Заметки о теореме Лефшеца о неподвижной точке // Математика. 1966. Т. 10. №4. С. 101–139.
2. *Bott R., Taubes C.* On the rigidity theorems of Witten // J. of Amer. Math. Soc. 1989. V. 2. P. 137–186.
3. *Атья М., Зингер И.* Индекс эллиптических операторов. III // УМН. 1969. Т. 24. Вып. 1(145). С. 127–182.
4. *Бухштабер В. М.* Характер Чженя–Дольда в теории кобордизмов. I // Матем. сб. 1970. Т. 83. №4. С. 575–595.
5. *Бухштабер В. М., Новиков С. П.* Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса // Матем. сб. 1971. Т. 84. №1. С. 81–118.
6. *Хирцебрух Ф.* Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.
7. *Hirzebruch F., Berger T., Jung R.* Manifolds and Modular Forms. Second Edition. Bonn: Max-Planc-Institut für Mathematik, 1994.
8. *Каспаров Г. Г.* Инварианты классических линзовых многообразий в теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. №4. С. 735–747.
9. *Кричевер И. М.* Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера // Матем. заметки. 1990. Т. 47. №2. С. 34–45.
10. Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology. Ed. P. S. Landweber // Lecture Notes in Mathematics; 1326. Berlin–Heidelberg: Springer, 1988.
11. *Мищенко А. С.* Многообразия с действием группы $\mathbf{Z}_p$ и неподвижные точки // Матем. заметки. 1968. Т. 4. №4. С. 381–386.
12. *Новиков С. П.* Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. №4. С. 855–951.
13. *Новиков С. П.* Операторы Адамса и неподвижные точки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. №6. С. 1245–1263.
14. *Ochanine S.* Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques // Topology. 1987. V. 26. P. 143–151.
15. *Панов Т. Е.* Эллиптический род для многообразий с действием группы $\mathbf{Z}/p$ // УМН. 1997. Т. 52. №2.

Поступило в редакцию
7.V.1997