SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители

И. Ю. Лимонченко, Т. Е. Панов, and Г. С. Черных

Посвящается 80-летию Сергея Петровича Новикова

Аннотация. В первой части обзора дано современное изложение структуры кольца специальных унитарных бордизмов, включающее как классические геометрические методы Коннера–Флойда, Уолла и Стонга, так и технику спектральной последовательности Адамса–Новикова и формальных групп, в том числе результаты, возникшие после фундаментальной работы Новикова 1967 г. Во второй части мы используем методы торической топологии для построения и описания геометрических представителей в классах SU-бордизма, включая торические и квазиторические многообразия, а также многообразия Калаби–Яу.

Содержание

Key words and phrases. Специальные унитарные бордизмы, SU-многообразия, классы Чженя, торические многообразия, квазиторические многообразия, многообразия Калаби–Яу.

Работа первого автора финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100». Работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 17-01-00671, 18-51-50005). Работа второго автора также поддержана Фондом Саймонса в НМУ.

Введение

SU-бордизмы — это теория бордизмов гладких многообразий со специальной унитарной структурой в стабильном касательном расслоении. Геометрически, SU-структура на многообразии M определяется редукцией структурной группы стабильного касательного расслоения многообразия M к группе $SU(N)$. Гомотопически, SU-структура — это гомотопический класс поднятия отображения $M \to BO(2N)$, классифицирующего стабильное касательное расслоение, до отображения $M \to BSU(N)$. Многообразие M допускает SU-структуру, если оно допускает стабильно комплексную структуру с $c_1(\mathcal{T}M) = 0$.

Теория бордизмов и кобордизмов находилась в состоянии бурного роста и развития в начале 1960-х годов. Большинство ведущих топологов того времени внесли свой вклад в это развитие. Идея бордизма была впервые сформулирована в явном виде Понтрягиным [**43**], который связал теорию оснащенных многообразий с изучением стабильных гомотопических групп сфер, используя понятие трансверсальности. В ранних работах, как например у Рохлина [**47**], теория бордизмов называлась «внутренними гомологиями», имея в виду идею гомологических циклов, восходящую к Пуанкаре. Первая изученная теория бордизмов — неориентированные бордизмы — стала предметом фундаментальной работы Тома [**51**], который полностью вычислил кольцо неориентированных бордизмов $\varOmega^O$. Описание кольца ориентированных бордизмов $\varOmega^{SO}$ было закончено к концу 1950-х годов работами Новикова [**38, 39**] (мультипликативная структура по модулю кручения) и Уолла [**53**] (произведения элементов конечного порядка); важные более ранние результаты были получены Томом [**51**] (описание кольца $\varOmega^{SO} \otimes \mathbb{Q}$), Авербухом [**4**] (отсутствие нечётного кручения), Милнором [**33**] (аддитивная структура по модулю кручения), а также Рохлиным [**47**].

Кульминацией в развитии этой теории стало вычисление кольца комплексных (унитарных) бордизмов $\varOmega^U$, выполненное в работах Милнора [**33**] и Новикова [**38, 39**]. Было показано, что кольцо $\varOmega^U$ изоморфно градуированному кольцу многочленов $\mathbb{Z}[a_i \colon i \geqslant 1]$ от бесконечного числа переменных, с одной образующей в каждой четной размерности, $\deg a_i = 2i$. Этот результат нашел многочисленные приложения в алгебраической топологии и смежных разделах науки. Мы даём обзор теории унитарных бордизмов в § 1, так как в дальнейшем она понадобится нам для описания структуры кольца SU-бордизмов.

Изучение SU-бордизмов в 1960-х годах обозначило границы применимости методов алгебраической топологии. Кольцо коэффициентов $\varOmega^{SU}$ считается известным. Оно не является кольцом многочленов, хотя и становится таковым при обращении двойки. Наибольший вклад здесь внесли Новиков [**39**] (описание кольца $\varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$), Коннер и Флойд [**22**] (произведения элементов конечного порядка), Уолл [**54**] и Стонг [**50**] (мультипликативная стуктура кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$). Тем не менее, как было замечено Стонгом [**50**, с. 247], «исчерпывающее описание мультипликативной структуры кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$ чрезвычайно сложно». Наилучшее из имеющихся на данный момент описание кольца $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$ заключается в весьма нетривиальном вложении его как подкольца в кольцо многочленов $\mathcal{W}$, являющееся в свою очередь кольцом коэффициентов теории Коннера–Флойда c_1-сферических многообразий (см. детали в § 6).

Спектральная последовательность Адамса–Новикова и техника формальных групп, привнесённая в топологию фундаментальной работой Новикова [**40**], позволили развить новый систематический подход к более ранним геометрическим вычислениям в кольце SU-бордизмов. Так, точная последовательность Коннера–Флойда (0.1), связывающая градуированные компоненты колец $\varOmega^{SU}$ и $\mathcal{W}$, допускает внутреннее описание в терминах нетривиальных дифференциалов в спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU (см. § 5). Этот подход далее развивался в контексте бордизмов многообразий с особенностями в работах Миронова [**34**], Ботвинника [**9**] и Вершинина [**52**]. Главной целью здесь было описание кольца коэффициентов Ω^{Sp} еще одной классической теории бордизмов — симплектических бордизмов (в настоящее время называемых также кватернионными бордизмами), которое по-прежнему остаётся неизвестным. Обзор результатов о Ω^{Sp}, известных к 1975 г., дан в [**12**, §3]. Спектральная последовательность Адамса–Новикова также стала основным инструментом для вычисления стабильных гомотопических групп сфер [**45**].

Хорошо известна также классическая проблема нахождения геометрических представителей классов бордизма в различных теориях бордизмов, в частности, в кольцах унитарных и специальных унитарных бордизмов. Важность данной проблемы была подчёркнута в основополагающих работах, таких как монография Коннера и Флойда [**22**].

Над полем рациональных чисел, кольца бордизмов порождены проективными пространствами, но целочисленные образующие устроены значительно сложнее, поскольку здесь уже возникают нетривиальные соотношения делимости на их характеристические числа. Один из немногих общих результатов о геометрических представителях классов бордизма, полученный еще в начале 1960-х годов, заключается в том, что кольцо комплексых бордизмов Ω^U, которое является кольцом полиномов над целыми числами, порождается так называемыми гиперповерхностями Милнора $H(n_1, n_2)$. Последние суть гиперплоские сечения вложений Сегре произведений $\mathbb{C}P^{n_1} \times \mathbb{C}P^{n_2}$ комплексных проективных пространств. Аналогичные образующие можно построить и для колец неориентированных и ориентированных бордизмов.

Раннему прогрессу в решении этой проблемы препятствовал недостаток примеров (стабильно) комплексных многообразий высоких размерностей, для которых можно было явно вычислить характеристические числа. С появлением в конце 1970-х годов торических многообразий, а также последовавшим в начале века развитием торической топологии [**15**], было дано множество явных конструкций, доставляющих конкретные примеры стабильно комплексных и SU-многообразий с богатыми торическими симметриями. Характеристические числа этих многообразий могут быть эффективно вычислены на основе комбинаторно-геометрической техники. Эти достижения обогатили теорию бордизмов и кобордизмов новыми геометрическим методами.

В работе [**18**], Бухштабер и Рэй построили семейство образующих для кольца Ω^U, состоящее исключительно из комплексных проективных торических многообразий $B(n_1, n_2)$, являющихся проективизациями сумм линейных расслоений над многообразиями ограниченных флагов. Другое торическое семейство $\{L(n_1, n_2)\}$ с тем же свойством мы приводим в § 8. В малых размерностях, классы комплексных бордизмов, содержащие проективные торические многообразия, были описаны Вильфонгом [**55**] (получено полное описание в размерностях вплоть до 6 и частичные результаты в размерности 8). Кроме того, согласно результату Соломадина и Устиновского [**49**], полиномиальные образующие кольца Ω^U могут быть выбраны среди проективных торических многообразий (частичный результат в этом направлении был ранее получен в [**56**]). Квазиторические многообразия обладают большей гибкостью: согласно результату Бухштабера, Панова и Рэя [**16**] в *каждом* классе комплексных бордизмов найдется геометрический представитель — квазиторическое многообразие. Последнее также несёт действие большого тора, но является лишь стабильно комплексными, а не комплексным многообразием. В части II этого обзора мы обсуждаем аналогичные результаты в контексте SU-бордизмов.

Недавний интерес к SU-многообразиям был связан с изучением зеркальной симметрии и других геометрических конструкций, мотивированных теоретической физикой; ключевую роль здесь играет понятие многообразия Калаби–Яу. Под многообразием Калаби–Яу обычно понимают кэлерово SU-многообразие; оно обладает Риччи-плоской метрикой в силу теоремы Яу. Связь между многообразиями Калаби–Яу и SU-бордизмами обсуждается в §§ 11–13 этого обзора.

Часть I содержит структурные результаты о кольце SU-бордизмов Ω^{SU}. В этом описании геометрические методы Коннера–Флойда, Уолла и Стонга соединяются с техникой спектральной последовательности Адамса–Новикова и формальных групп.

§ 1 содержит краткий обзор теории комплексных бордизмов. Согласно теореме Милнора и Новикова,

$$\Omega^U \cong \mathbb{Z}[a_i\colon i \geqslant 1], \quad \deg a_i = 2i,$$

и два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда у них совпадают все характеристические числа Чженя. Полиномиальные образующие задаются условием на специальное характеристическое число s_i (иногда называемое числом Милнора). Для всякого целого числа $i \geqslant 1$, положим

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p; \\ p, & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } k > 0. \end{cases}$$

Класс бордизма стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть принят за $2i$-мерную образующую a_i тогда и только тогда, когда $s_i[M^{2i}] = \pm m_i$.

SU-многообразия и SU-бордизмы вводятся в § 2. По теореме Новикова, $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ есть алгебра многочленов с одной образующей в каждой четной размерности $\geqslant 4$:

$$\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][y_i\colon i \geqslant 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизма SU-многообразия M^{2i} может быть принят за $2i$-мерную образующую y_i тогда и только тогда, когда $s_i[M^{2i}] = \pm m_i m_{i-1}$, с точностью до умножения на степень 2. Дополнительное соотношение делимости в размерностях вида $2p^k$ получается из простого наблюдения, что s_i-число SU-многообразия M^{2i} размерности $2i = 2p^k$ делится на p (предложение 2.2).

Алгебра операций A^U в комплексных кобордизмах и спектральная последовательность Адамса–Новикова рассмотрены в § 3.

Структура A^U-модуля на $U^*(MSU)$, необходимая для вычислений со спектральной последовательностью Адамса–Новикова, определяется в § 4. Здесь вводятся две геометрические операции. Граничный гомоморфизм $\partial\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-2}$ отображает класс бордизма $[M^{2n}]$ в класс бордизма $[N^{2n-2}]$, двойственный к $c_1(M) = c_1(\det \mathcal{T}M)$. Ограничение $\det \mathcal{T}M$ на N есть нормальное расслоение вложения $\nu(N \subset M)$. Стабильно комплексная структура на N определяется с помощью изоморфизма $\mathcal{T}M|_N \cong \mathcal{T}N \oplus \nu(N \subset M)$. Тогда $c_1(N) = 0$, и потому N является SU-многообразием. Отсюда следует, что $\partial^2 = 0$.

Аналогично, гомоморфизм $\Delta\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-4}$ отображает класс бордизма $[M^{2n}]$ в класс бордизма подмногообразия L^{2n-4}, двойственного к классу когомологий $-c_1^2(M) = c_1(\det \mathcal{T}M) c_1(\overline{\det \mathcal{T}M})$, с комплексной структурой в нормальном расслоении, задаваемой ограничением расслоения $\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}$.

Тогда A^U-модуль $U^*(MSU)$ отождествляется с фактормодулем $A^U/(A^U\Delta + A^U\partial)$ (теорема 4.5).

Спектральная последовательность Адамса–Новикова для спектра MSU вычисляется в § 5, где также получены следствия о структуре кольца SU-бордизмов Ω^{SU}. В теореме 5.8 доказано, что ядро забывающего гомоморфизма $\Omega^{SU} \to \Omega^U$ состоит из элементов конечного порядка, и каждый элемент кручения из Ω^{SU} имеет порядок 2.

Для описания кручения в кольце Ω^{SU} Коннер и Флойд **[22]** ввели группу

$$\mathcal{W}_{2n} = \operatorname{Ker}(\Delta\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-4})$$

и отождествили ее с подгруппой в Ω^U_{2n}, состоящей из тех классов бордизмов $[M^{2n}]$, у которых равны нулю все характеристические числа, соответствующие классам Чженя, содержащим множитель c_1^2 (см. теорему 6.3). Забывающий гомоморфизм раскладывается в композицию $\Omega^{SU}_{2n} \to \mathcal{W}_{2n} \to \Omega^U_{2n}$, и определено ограничение граничного гомоморфизма $\partial\colon \mathcal{W}_{2n} \to \mathcal{W}_{2n-2}$. (Аналогичный подход был ранее использован Уоллом [**53**] для нахождения кручения в кольце ориентированных бордизмов Ω^{SO}.)

Связь между группами Ω^{SU}_* и $\mathcal{W}_*$ описывается следующей точной последовательностью Коннера и Флойда:

$$0 \longrightarrow \Omega^{SU}_{2n-1} \xrightarrow{\theta} \Omega^{SU}_{2n} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{W}_{2n} \xrightarrow{\beta} \Omega^{SU}_{2n-2} \xrightarrow{\theta} \Omega^{SU}_{2n-1} \longrightarrow 0, \tag{0.1}$$

где θ обозначает умножение на образующую $\theta \in \Omega^{SU}_1 \cong \mathbb{Z}_2$, α — забывающий гомоморфизм, а $\alpha\beta = -\partial\colon \mathcal{W}_{2n} \to \mathcal{W}_{2n-2}$. Эта точная последовательность имеет форму точной пары, для которой производная пара может быть отождествлена с членом E_2 спектральной последовательности Адамса–Новикова для спектра MSU (см. лемму 5.9).

Гомологии комплекса $(\mathcal{W}_*, \partial)$ были описаны Коннером и Флойдом [**22**, теорема 11.8] как алгебра многочленов над полем $\mathbb{Z}_2$ со следующими образующими:

$$H(\mathcal{W}_*, \partial) \cong \mathbb{Z}_2[\omega_2, \omega_{4k}\colon k \geqslant 2], \quad \deg \omega_2 = 4,\ \deg \omega_{4k} = 8k.$$

Это приводит нас к следующему описанию свободной части и кручения в кольце Ω^{SU} (теорема 5.11):

а) $\operatorname{Tors} \Omega^{SU}_n = 0$, кроме $n = 8k+1$ и $8k+2$, когда $\operatorname{Tors} \Omega^{SU}_n$ является $\mathbb{Z}_2$-векторным пространством ранга, равного числу разбиений числа k.

б) Группа $\Omega^{SU}_{2i} / \operatorname{Tors}$ изоморфна $\operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W})$ при $2i \not\equiv 4 \mod 8$ и изоморфна $\operatorname{Im}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W})$ при $2i \equiv 4 \mod 8$.

в) Существуют классы SU-бордизма $w_{4k} \in \Omega^{SU}_{8k}$, $k \geqslant 1$, такие, что всякий элемент конечного порядка в Ω^{SU} единственным образом представляется в виде $P \cdot \theta$ или $P \cdot \theta^2$, где P — многочлен от переменных w_{4k} с коэффицентами 0 и 1. Элемент $w_{4k} \in \Omega^{SU}_{8k}$ определяется тем условием, что он представляет полиномиальную образующую ω_{4k} в $H_{8k}(\mathcal{W}_*, \partial)$ при $k \geqslant 2$, а $w_4 \in \Omega^{SU}_8$ — представляет ω_2^2.

Прямая сумма $\mathcal{W} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathcal{W}_{2i}$ *не* является подкольцом в Ω^U: мы имеем $[\mathbb{C}P^1] \in \mathcal{W}_2$, однако $c_1^2[\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1] = 8 \neq 0$, и потому $[\mathbb{C}P^1] \times [\mathbb{C}P^1] \notin \mathcal{W}_4$. Тем не менее, $\mathcal{W}$ становится коммутативным кольцом с единицей относительно *подкрученного произведения*

$$a * b = a \cdot b + 2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b,$$

где $\cdot$ обозначает произведение в кольце Ω^U, а $V^4 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^2$. Это приводит к комплексно-ориентированной мультипликативной теории когомологий, введённой и изученной Бухштабером в работе [**11**].

Структура кольца на $\mathcal{W}$ даётся теоремой 6.10: $\mathcal{W}$ является кольцом многочленов над целыми числами, с одной образующей в каждой чётной размерности, кроме 4:

$$\mathcal{W} \cong \mathbb{Z}[x_1, x_i\colon i \geqslant 3], \quad x_1 = [\mathbb{C}P^1], \quad \deg x_i = 2i,$$

где $s_i(x_i) = m_i m_{i-1}$ при $i \geqslant 3$. Граничный оператор $\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, $\partial^2 = 0$, удовлетворяет равенству

$$\partial(a * b) = a * \partial b + \partial a * b - x_1 * \partial a * \partial b,$$

а полиномиальные образующие кольца $\mathcal{W}$ могут быть выбраны так, что удовлетворяются соотношения

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1}.$$

Мультипликативная структура кольца Ω^{SU} описывается в § 7. Забывающее отображение $\alpha\colon \Omega^{SU} \to \mathcal{W}$ является кольцевым гомоморфизмом. Таким образом, кольцо $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}$ может быть описано как подкольцо в $\mathcal{W}$.

Мы имеем

$$\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][x_1, x_{2k-1}, 2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}\colon k \geqslant 2],$$

где $x_1^2 = x_1 * x_1$ есть ∂-цикл, и каждый из элементов x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$ при $k \geqslant 2$ также есть ∂-цикл.

Из описания кольца $\mathcal{W}$ следует существование неразложимых элементов $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$, $i \geqslant 2$ таких, что $s_i(y_i) = m_im_{i-1}$, если i нечетно, $s_2(y_2) = -48$, и $s_i(y_i) = 2m_im_{i-1}$, если i четно и $i > 2$. Эти элементы отображаются следующим образом под действием забывающего гомоморфизма $\alpha\colon \Omega^{SU} \to \mathcal{W}$:

$$y_2 \mapsto 2x_1^2, \quad y_{2k-1} \mapsto x_{2k-1}, \quad y_{2k} \mapsto 2x_{2k} - x_1x_{2k-1}, \quad k \geqslant 2.$$

В частности, кольцо $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12] \cong \mathbb{Z}[\frac12][y_i\colon i \geqslant 2]$ вкладывается в $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ в качестве подкольца многочленов, порожденного элементами x_1^2, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$.

В части II мы описываем геометрические представители в классах SU-бордизма, возникающие в торической топологии.

В § 8 мы собрали необходимые результаты о торических и квазиторических многообразиях, их кольцах когомологий и характеристических классах.

В § 9 мы предъявляем явную конструкцию семейств квазиторических многообразий, допускающих SU-структуру, следуя работе Лю и Панова [**31**]. Квазиторические SU-многообразия могут быть построены с помощью итерированной операции комплексной проективизации (что дает проективные торические многообразия); у получаемых многообразий мы затем подправляем стабильно комплексную структуру так, чтобы первый класс Чженя обратился в нуль. Получаемые SU-структуры на квазиторических многообразиях инвариантны относительно действий тора. Первые примеры такого типа были получены Лю и Ваном в работе [**32**].

В § 10 мы строим квазиторические образующие в кольце SU-бордизмов. Согласно результату [**31**] (который мы приводим в теореме 10.8), существуют квазиторические SU-многообразия M^{2i} размерности $2i \geqslant 10$ с $s_i(M^{2i}) = m_im_{i-1}$, если i нечетно, и с $s_i(M^{2i}) = 2m_im_{i-1}$, если i четно. Эти квазиторические многообразия представляют неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}$, являющиеся полиномиальными образующими кольца $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$. В малых размерностях $2i < 10$ известно, что квазиторические SU-многообразия M^{2i} бордантны нулю. Поэтому интересен вопрос о том, какие классы SU-бордизма в размерностях > 8 могут быть представлены квазиторическими многообразиями.

Как мы уже видели при описании кольца Ω^{SU} выше, характеристические числа SU-многообразий удовлетворяют нетривиальным соотношениям делимости. Теорема Ошанина [**41**], утверждающая, что сигнатура $(8k+4)$-мерного SU-многообразия делится на 16, является одним из наиболее известных примеров этого феномена. Поэтому мы считаем удивительным то обстоятельство, что полиномиальные образующие кольца SU-бордизмов $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ могут быть найдены среди самых простых семейств многообразий, получаемых торическими методами: 2-уровневые комплексные проективизации и 3-уровневые проективизации, имеющие первым уровнем пространство $\mathbb{C}P^1$. Доказательство теоремы 10.8 содержит в себе вычисления характеристических чисел и проверку соотношений делимости. В ходе доказательства получаются некоторые интересные результаты о биномиальных коэффициентах по модулю простого числа.

В § 11 мы приводим обзор конструкции Батырева [**6**] многообразий Калаби–Яу, возникающих в торической геометрии. В ее самой простой форме, эта конструкция даёт алгебраическую гиперповерхность, представляющую класс SU-бордизма $\partial[V]$ для гладкого торического многообразия Фано V. Более общая конструкция определяет (гладкие) многообразия Калаби–Яу, получающиеся из гиперповерхностей в торических многообразиях Фано с горенштейновыми особенностями с помощью специального разрешения особенностей. Горенштейновы торические многообразия Фано отвечают так называемым рефлексивным многогранникам, и число их конечно в каждой размерности. Четырёхмерные рефлексивные многогранники и возникающие из них трёхмерные Калаби–Яу многообразия полностью классифицированы [**28**], [**1**]; имеются также отдельные классификационные результаты о пятимерных рефлексивных многогранниках и соответствующих четырёхмерных многообразиях Калаби–Яу.

Классы SU-бордизма гиперповерхностей Калаби–Яу в гладких торических многообразиях Фано порождают кольцо SU-бордизмов $\Omega^{SU}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Более точно, неразложимые элементы $y_i\in\Omega^{SU}$, определенные выше, представляются линейным комбинациями классов бордизма гиперповерхностей Калаби–Яу. Этот результат, доказанный в [**30**], обсуждается в § 12 (в отличие от ситуации с квазиторическими многообразиями, на размерности y_i здесь уже не накладывается никаких ограничений).

Представляет интерес вопрос о том, какие классы бордизма из Ω^{SU} могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу. Этот вопрос является SU-аналогом хорошо известной проблемы Хирцебруха: какие классы бордизма из Ω^{U} содержат связные (неприводимые) неособые алгебраические многообразия? Если опустить условие связности, то любой класс U-бордизма положительной размерности представим алгебраическим многообразием по теореме Милнора (см. [**50**, с. 125]). Поскольку произведение и целочисленная линейная комбинация с положительными коэффициентами алгебраических классов также являются алгебраическими классами (возможно, несвязными), остается только найти в каждой размерности i алгебраические многообразия M и N с $s_i(M)=m_i$ и $s_i(N)=-m_i$. Для SU-бордизмов ситуация оказывается другой: если класс $a\in\Omega^{SU}$ может быть представлен многообразием Калаби–Яу, то класс $-a$ необязательно обладает этим свойством.

Такой случай возникает уже в комплексной размерности 2: класс $y_2\in\Omega^U_4$ может быть представлен поверхностью Калаби–Яу ($K3$-поверхностью), в то время как $-y_2$ не может быть представлен никакой гладкой комплексной поверхностью. Ситуация меняется в размерности 3, где обе образующих, y_3 и $-y_3$, могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу. То же имеет место и в комплексной размерности 4, как показывает теорема 13.5.

Авторы благодарны В. М. Бухштаберу и П. Ландвеберу за внимание к нашей работе и многочисленные полезные замечания и комментарии.

Часть I. Структурные результаты

1. Комплексные бордизмы

Мы кратко изложим основные определения и конструкции теории комплексных бордизмов (также известных как *унитарные бордизмы* или *U-бордизмы*). Более подробное изложение можно найти в [**22**], [**50**], [**13**] и [**15**].

Обозначим через η_n универсальное (тавтологическое) комплексное n-мерное векторное расслоение над бесконечномерным грассманианом $BU(n)$. Пусть ζ — вещественное $2n$-мерное векторное расслоение над клеточным пространством (CW-комплексом) X. *Комплексную структуру* на ζ можно определить одним из следующих эквивалентных способов:

1) как класс эквивалентности изоморфизмов вещественных векторных расслоений $\zeta\to\xi$, где ξ – комплексное n-мерное расслоение над пространством X, и два таких изоморфизма считаются эквивалентными, если один получается из другого с помощью композиции с изоморфизмом комплексных расслоений;
2) как гомотопический класс отображений вещественных $2n$-мерных векторных расслоений $\zeta\to\eta_n$, являющихся изоморфизмами на каждом слое;
3) как гомотопический класс поднятий отображения $X\to BO(2n)$, классифицирующего расслоение ζ, до отображения $X\to BU(n)$.

Все многообразия далее подразумеваются гладкими, компактными и без края (если не оговорено противное). *Стабильно комплексная структура* (также *унитарная структура* или *U-структура*) на многообразии M (возможно, с краем) — это класс эквивалентности комплексных структур на стабильном касательном расслоении многообразия M, то есть, класс эквивалентности изоморфизмов вещественных векторных расслоений

$$c_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^k \xrightarrow{\cong} \xi, \tag{1.1}$$

где ξ — комплексное векторное расслоение, и $\underline{\mathbb{R}}^k$ обозначает тривиальное вещественное k-мерное расслоение на M. Две такие комплексные структуры *эквивалентны*, если они отличаются на изоморфизм комплексных расслоений и прибавление тривиального комплексного слагаемого. Изоморфизм (1.1) определяет поднятие отображения $M \to BO(2l)$, классифицирующего расслоение $\mathcal{T}M\oplus\underline{\mathbb{R}}^k$, до отображения $M \to BU(l)$; здесь $2l = \dim_{\mathbb{R}}\xi = \dim M + k$. Композиция $c_{\mathcal{T}}$ с изоморфизмом комплексных расслоений не меняет гомотопический класс поднятия, а прибавление тривиального комплексного слагаемого $\underline{\mathbb{C}}^m$ к (1.1) приводит к композиции поднятия с каноническим отображением $BU(l) \to BU(l+m)$. Следовательно, стабильно комплексные структуры на многообразии M находятся в естественном биективном соответствии с гомотопическими классами поднятий классифицирующего отображения $M \to BO$ до отображения $M \to BU$.

Замечание. Вместо того, чтобы определять стабильно комплексную структуру как класс эквивалентности изоморфизмов (1.1), можно определить её, фиксировав единственный изоморфизм для достаточно большого k. Это следует из того, что прибавление тривиального комплексного слагаемого индуцирует взаимно однозначное соответствие между комплексными структурами на расслоениях $\mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^k$ для разных k при $k \geqslant 2$, см. [**22**, теорема 2.3].

Стабильно комплексное многообразие (также *унитарное многообразие* или *U-многообразие*) — это пара $(M, c_{\mathcal{T}})$, состоящая из многообразия и стабильно комплексной структуры на нём.

Комплексные (ко)бордизмы — это обобщённая теория (ко)гомологий, возникающая из U-многообразий. Она может быть определена как геометрически, так и гомотопически.

В геометрическом подходе группа бордизмов $U_n(X)$ определяются как множество классов бордизмов непрерывных отображений $M \to X$, где M — n-мерное U-многообразие. Подробнее геометрический подход описан в [**22**, §1] (см. также [**15**, приложение D]). Мы здесь кратко напомним ключевые моменты.

Конструкция 1.1 (геометрические U-бордизмы). Говорят, что стабильно комплексное многообразие M *ограничивает* (или *бордантно нулю*), если существует такое стабильно комплексное многообразие с краем W, что $\partial W = M$, причем стабильно комплексная структура на многообразии M совпадает с индуцированной на крае многообразия W. Индуцированная стабильно комплексная структура на ∂W определяется с помощью изоморфизма $\mathcal{T}W|_{\partial W} \cong \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Этот изоморфизм зависит от того, рассматриваем мы внутреннюю или внешнюю нормаль к подмногообразию M в W в качестве базиса для $\underline{\mathbb{R}}$, и от того, ставим ли мы эту нормаль в начало или конец касательного репера к M. Мы будем использовать выбор, при котором внешняя нормаль ставится в конец репера. Тогда, используя стабильно комплексную структуру на многообразии W, с помощью изоморфизма

$$\mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k+1} \cong \mathcal{T}W|_{\partial W} \oplus \underline{\mathbb{R}}^k \cong \xi$$

мы получаем стабильно комплексную структуру на крае $M = \partial W$.

Если бы мы выбрали внутреннюю нормаль вместо внешней, то получилась бы другая стабильно комплексная структура на $M = \partial W$. А именно, если $c_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}M \oplus$

$\underline{\mathbb{R}}^{k+1} \xrightarrow{\cong} \xi$ — стабильно комплексная структура на M, описанная выше, то несложно видеть, что стабильно комплексная структура, получающаяся с помощью внутренней нормали, эквивалентна следующей:

$$\mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k+1} \oplus \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{c_{\mathcal{T}} \oplus \tau} \xi \oplus \underline{\mathbb{C}} \tag{1.2}$$

где $\tau\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — комплексное сопряжение.

Для произвольного стабильно комплексного многообразия $(M, c_{\mathcal{T}})$ мы будем называть стабильно комплексную структуру (1.2) *противоположной* к структуре $c_{\mathcal{T}}$ и обозначать её через $-c_{\mathcal{T}}$. Если структура $c_{\mathcal{T}}$ ясна из контекста, мы будем писать M вместо $(M, c_{\mathcal{T}})$ и $-M$ вместо $(M, -c_{\mathcal{T}})$.

Для фиксированного неотрицательного целого числа n и топологической пары (X, A) рассмотрим пары (M, f), состоящие из компактного n-мерного U-многообразия с краем M и непрерывного отображения пар $f\colon (M, \partial M) \to (X, A)$. Скажем, что такая пара (M, f) *ограничивает* (или *бордантна нулю*), если существуют компактное $(n{+}1)$-мерное U-многообразие W с краем и непрерывное отображение $F\colon W \to X$ такие, что

(a) M является регулярным подмногообразием в ∂W, и U-структура на M совпадает с ограничением U-структуры на ∂W;
(b) $F|_M = f$ и $F(\partial W \setminus M) \subset A$.

Пары (M_1, f_1) и (M_2, f_2) называются *бордантными*, если дизъюнктное объединение $(M_1, f_1) \sqcup (-M_2, f_2)$ бордантно нулю. Бордантность является отношением эквивалентности: рефлексивность следует из существования такой стабильно комплексной структуры на цилиндре $M \times I$, что $\partial(M \times I) = M \sqcup (-M)$, а при доказательстве транзитивности используется склеивание многообразий и сглаживание углов. Классы эквивалентности мы далее будем называть *классами бордизмов*.

Обозначим через $[M, f]$ или просто через $[M]$ класс бордизмов пары (M, f). По отношению к операции дизъюнктного объединения классы бордизмов $[M, f]$ образуют абелеву группу, которую мы пока обозначим $U'_n(X, A)$, и будем называть (геометрической) *группой унитарных бордизмов* пары (X, A). Геометрические U-бордизмы — это обобщённая теория гомологий, удовлетворяющая всем аксиомам Стинрода–Эйленберга, за исключением аксиомы размерности.

Гомотопический подход к определению комплексных (ко)бордизмов основывается на понятии *MU-спектра*, которое мы также кратко напомним.

Конструкция 1.2 (гомотопические U-бордизмы). Обозначим через $MU(n)$ пространство Тома универсального комплексного n-мерного векторного расслоения η_n над $BU(n)$. Спектр Тома $MU = \{Y_i,\ \Sigma Y_i \to Y_{i+1} \colon i \geqslant 0\}$ состоит из пространств $Y_{2k} = MU(k)$, $Y_{2k+1} = \Sigma Y_{2k}$ со следующими структурными отображениями: $\Sigma Y_{2k} \to Y_{2k+1}$ — тождественное, а $\Sigma Y_{2k+1} \to Y_{2k+2}$ — отображение пространств Тома $\Sigma^2 MU(k) = S^2 \wedge MU(k) \to MU(k+1)$, соответствующее отображению расслоений $\eta_k \oplus \underline{\mathbb{C}} \to \eta_{k+1}$, классифицирующему $\eta_k \oplus \underline{\mathbb{C}}$. MU-спектр определяет обобщённую теорию (ко)гомологий, известную как (гомотопические) *унитарные (ко)бордизмы*. Соответствующие группы бордизмов и кобордизмов клеточной пары (X, A) равны по определению

$$\begin{aligned} U_n(X, A) &= \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+n}\bigl((X/A) \wedge MU(k)\bigr), \\ U^n(X, A) &= \lim_{k\to\infty} \bigl[\Sigma^{2k-n}(X/A), MU(k)\bigr]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Группы бордизмов пространства X определяются как $U_n(X) := U_n(X, \varnothing)$. Мы будем использовать обозначение X_+ для пунктированного пространства $X/\varnothing$, которое представляет собой дизъюнктное объединение пространства X и добавленной отмеченной точки. Для конечной клеточной пары (X, A) группа бордизмов $U_n(X, A)$ изоморфна $\pi_{2k+n}((X/A) \wedge MU(k))$ для достаточно большого k, и аналогично для $U^n(X, A)$.

По определению группы гомотопических бордизмов и кобордизмов точки удовлетворяют равенству
$$U_n(pt) = U^{-n}(pt) = \pi_{2k+n}(MU(k))$$
для достаточно большого k, и $U_n(pt) = 0$ для $n < 0$.

Эквивалентность геометрического и гомотопического подходов к определению комплексных бордизмов устанавливается следующим результатом Коннера и Флойда.

Теорема 1.3 ([**22**, (3.1)]). *Обобщённые теории гомологий $U'_*(\cdot)$ и $U_*(\cdot)$ изоморфны на категории клеточных пар и непрерывных отображений.*

Набросок доказательства. Доказательство следует подходу Тома [**51**], использованному им в случае ориентированных бордизмов (см. также [**21**, Chapter 1]). Мы определим функтор $\varphi\colon U'_n(X,A) \to U_n(X,A)$ между теориями гомологий, а затем покажем, что он индуцирует изоморфизм на гомологиях точки.

Для клеточной пары (X,A) имеется изоморфизм $U'_n(X,A) \cong U'_n(X/A, pt)$, и следовательно мы можем свести всё к случаю $A = \varnothing$ и определять только отображения $\varphi\colon U'_n(X) \to U_n(X)$.

Возьмём геометрический класс бордизмов $[M,f] \in U'_n(X)$, представленный непрерывным отображением $f\colon M \to X$ из U-многообразия M. Вложим M в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+2k}$ и обозначим через ν нормальное расслоение этого вложения. Изоморфизм вещественных векторных расслоений $\mathcal{T}M \oplus \nu \cong \underline{\mathbb{R}}^{n+2k}$ позволяет нам переводить стабильно комплексные структуры на многообазии M в комплексные структуры на нормальном расслоении ν. (Это можно понимать в самом наивном смысле, работая с касательными и нормальными реперами, но нужно проверить, что данная процедура согласована с операцией стабилизации, см. также [**22**, (2.3)].)

Отображение Понтрягина–Тома
$$S^{2k+n} \to Th(\nu)$$
отождествляет замкнутую трубчатую окрестность многообразия M в $\mathbb{R}^{2k+n} \subset S^{2k+n}$ с тотальным пространством $D(\nu)$ расслоения на диски, ассоциированного с ν, и отображает замыкание дополнения до этой трубчатой окрестности в отмеченную точку пространства Тома $Th(\nu) = D(\nu)/S(\nu)$.

Теперь мы определим отображение $D(\nu) \to X \times D(\eta_k)$, первая компонента которого является композицией $D(\nu) \longrightarrow M \xrightarrow{f} X$, а вторая компонента — отображение расслоений на диски, соответствующее классифицирующему отображению $\nu \to \eta_k$ для определённой выше комплексной структуры на расслоении ν. Аналогично поступая с расслоениями на сферы, мы получаем отображение пар
$$\bigl(D(\nu), S(\nu)\bigr) \to \bigl(X \times D(\eta_k), X \times S(\eta_k)\bigr)$$
и, следовательно, отображение пространств Тома
$$Th(\nu) \to (X/\varnothing) \wedge MU(k).$$
Взяв композицию с отображением Понтрягина–Тома, мы получим отображение $S^{2k+n} \to (X/\varnothing) \wedge MU(k)$, представляющее гомотопический класс бордизмов в группе $U_n(X)$, см. (1.3). Нужно только проверить, что отображения, получающиеся из бордантных пар (M,f), гомотопны, и следовательно, мы получаем функтор $\varphi\colon U'_*(\cdot) \to U_*(\cdot)$.

Чтобы показать, что $\varphi\colon U'_*(pt) \to U_*(pt)$ является изоморфизмом, мы построим обратное отображение $U_*(pt) \to U'_*(pt)$. Возьмём гомотопический класс отображений $g\colon S^{2k+n} \to MU(k)$, представляющий элемент гомотопической группы бордизмов $U_n(pt)$. Меняя, если необходимо, g внутри его гомотопического класса, мы можем считать, что g гладко и трансверсально вдоль нулевого сечения $BU(k) \subset MU(k)$. Тогда прообраз $M := g^{-1}(BU(k))$ является n-мерным подмногообразием в S^{2k+n}. При этом нормальное расслоение ν подмногообразия M в S^{2k+n} индуцируется из нормального расслоения $BU(k)$ в $MU(k)$, то есть из η_k. Следовательно, мы получаем комплексную структуру на нормальном расслоении ν, которая, как было показано выше, определяет некоторую стабильно комплексную структуру на многообразии M. Получившийся геометрический класс бордизмов $[M] \in U'_n(pt)$ и определяет искомое обратное отображение к φ. $\square$

Далее мы будем обозначать как геометрические, так и гомотопические группы унитарных бордизмов через $U_*(\cdot)$.

Конструкция 1.4 (произведения). Для прямого произведения расслоений $\eta_m \times \eta_n$ существуют соответствующие классифицирующее отображение $BU(m) \times BU(n) \to BU(m+n)$ (единственное с точностью до гомотопии) и отображение расслоений $\eta_m \times \eta_n \to \eta_{m+n}$. Последнее индуцирует отображение пространств Тома

$$MU(m) \wedge MU(n) \to MU(n+m),$$

которое ассоциативно и коммутативно с точностью до гомотопии. Эти отображения используются, чтобы определить умножение в комплексных (ко)бордизмах, превращающее их в мультипликативную теорию (ко)гомологий. А именно, существуют каноническое спаривание (*произведение Кронекера*)

$$\langle\ ,\ \rangle \colon U^m(X) \otimes U_n(X) \to \Omega^U_{n-m},$$

$\frown$-*произведение*

$$\frown \colon U^m(X) \otimes U_n(X) \to U_{n-m}(X),$$

и $\smile$-*произведние* (или просто *произведение*)

$$\smile \colon U^m(X) \otimes U^n(X) \to U^{m+n}(X),$$

определяемые следующим образом. Рассмотрим класс кобордизмов $x \in U^m(X)$, представленный отображением $\Sigma^{2l-m} X_+ \to MU(l)$, и класс бордизмов $\alpha \in U_n(X)$, представленный отображением $S^{2k+n} \to X_+ \wedge MU(k)$. Тогда $\langle x, \alpha \rangle \in \Omega^U_{n-m}$ представляется композицией

$$S^{2k+2l+n-m} \xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\alpha} \Sigma^{2l-m} X_+ \wedge MU(k) \xrightarrow{x \wedge \mathrm{id}} MU(l) \wedge MU(k) \to MU(l+k)$$

Если $\Delta \colon X_+ \to (X \times X)_+ = X_+ \wedge X_+$ — диагональное отображение, то $x \frown \alpha \in U_{n-m}(X)$ представляется композицией отображений

$$S^{2k+2l+n-m} \xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\alpha} \Sigma^{2l-m} X_+ \wedge MU(k) \xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\Delta \wedge \mathrm{id}} X_+ \wedge \Sigma^{2l-m} X_+ \wedge MU(k)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id} \wedge x \wedge \mathrm{id}} X_+ \wedge MU(l) \wedge MU(k) \to X_+ \wedge MU(l+k)$$

$\smile$-произведение опеделяется аналогично; оно превращает $U^*(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U^n(X)$ в градуированное коммутативное кольцо, называемое *кольцом комплексных кобордизмов пространства* X. Прямая сумма

$$\Omega_U := U^*(pt) = \bigoplus_n U^n(pt)$$

часто называется просто *кольцом комплексных кобордизмов*. Оно градуировано неположительными целыми числами. Мы также будем использовать обозначение Ω^U для неотрицательно градуированного кольца $U_*(pt) = \bigoplus_n U_n(pt)$ — *кольца комплексных бордизмов*, где $U_n(pt) = U^{-n}(pt)$. Каждое кольцо $U^*(X)$ является модулем над Ω_U.

Стабильно комплексное n-многообразие M имеет *фундаментальный класс бордизмов* $[M] \in U_n(M)$, который геометрически определяется как класс тождественного отображения $M \to$ M. В этом случае определены изоморфизмы *двойственности Пуанкаре–Атья* [**3**], см. также [**15**, Construction D.3.4]:

$$D_U \colon U^k(M) \xrightarrow{\cong} U_{n-k}(M), \quad x \mapsto x \frown [M].$$

Мы имеем

$$H^*(BU(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_n], \quad \deg c_i = 2i,$$

где c_i — универсальные характеристические классы Чженя. Для данного разбиения $\omega = (i_1,\ldots,i_k)$ числа $n = |\omega| = i_1 + \ldots + i_k$ на натуральные числа определим моном $c_\omega = c_{i_1}\cdots c_{i_k}$ степени $2|\omega|$ и соответствующий характеристический класс $c_\omega(\xi)$ комплексного n-мерного расслоения ξ. Соответствующее касательное *характеристическое число* Чженя стабильно касательного многообразия M определяется как

$$c_\omega[M] := \langle c_\omega(\mathcal{T}M), [M]\rangle.$$

Здесь $[M]$ — фундаментальный гомологический класс многообразия M, и $\mathcal{T}M$ рассматривается как комплексное расслоение благодаря изоморфизму (1.1). Мы часто будем писать $c_\omega(M)$ вместо $c_\omega(\mathcal{T}M)$ для стабильно комплексного многообразия M. Число $c_\omega[M]$ полагается равным нулю, если $2|\omega| \neq \dim M$.

Один важный характеристический класс — это класс s_n. Он определяется как многочлен от классов Чженя $c_1,\ldots,c_n$, который получается, если выразить симметрический многочлен $x_1^n + \cdots + x_n^n$ через элементарные симметрические многочлены $i_i(x_1,\ldots,x_n)$, а затем заменить каждый i_i на c_i. Определим соответствующее характеристическое число как

$$s_n[M] := \langle s_n(\mathcal{T}M), [M]\rangle.$$

Оно известно как *s-число* или *число Милнора* многообразия M.

Для каждого целого $i \geqslant 1$ положим

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p; \\ p, & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } k > 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Следующий фундаментальный результат Милнора и Новикова описывает структуру кольца Ω^U комплексных бордизмов точки.

Теорема 1.5 (Милнор, Новиков).

а) *Кольцо комплексных бордизмов Ω^U является полиномиальным кольцом над $\mathbb{Z}$ с одной образующей в каждой положительной чётной размерности:*

$$\Omega^U \cong \mathbb{Z}[a_i\colon i \geqslant 1], \quad \deg a_i = 2i.$$

б) *Класс бордизмов стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной полиномиальной образующей a_i, если и только если*

$$s_i[M^{2i}] = \pm m_i.$$

в) *Два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда у них равны все характеристичские числа Чженя.*

Часть в) теоремы 1.5 можно переформулировать, сказав, что гомоморфизм универсальных характеристических чисел $e\colon \Omega^U_{2n} \to H_{2n}(BU)$ является мономорфизмом в каждой размерности. Данный гомоморфизм (для нормальных характеристических чисел) совпадает с композицией

$$\Omega^U_{2n} = \pi_{2n+2N}(MU(N)) \longrightarrow H_{2n+2N}(MU(N)) \longrightarrow H_{2n}(BU(N))$$

гомоморфизма Гуревича и изоморфизма Тома. По теореме Серра, в данном случае гомоморфизм Гуревича является изоморфизмом по модулю класса конечных групп. Инъективность $e\colon \Omega^U_{2n} \to H_{2n}(BU)$ тогда следует из отсутствия кручения в Ω^U.

Изоморфизм колец $\Omega^U \cong \mathbb{Z}[a_i\colon i \geqslant 1]$, $\deg a_i = 2i$, был впервые доказан Новиковым [**38**] в 1960 году с помощью спектральной последовательности Адамса и структурной теории алгебр Хопфа. Более подробное изложение этого доказательства дано в [**39**]. Работа Милнора [**33**] содержала доказательство только аддитивного изоморфизма (включающее отсутствие кручения в Ω^U и вычисление рангов); кольцевая структура Ω^U должна была войти во вторую часть [**33**], которая не была опубликована. Другое, геометрическое доказательство кольцевого изоморфизма было дано Стонгом в 1965 году и включено в его монографию [**50**]. Все эти результаты предшествовали введению техники формальных групп в кобордизмы в работе Новикова [**40**]. Используя формальные группы и степенные операции том Дика, Квилленом [**44**] было доказано, что классифицирующее отображение из универсальной формальной группы Лазара в формальную группу геометрических кобордизмов индуцирует изоморфизм колец $\mathbb{Z}[a_i\colon i \geqslant 1] \cong \Omega^U$.

Конструкция 1.6 (формальная группа геометрических кобордизмов). Пусть X — клеточное пространство. Так как $\mathbb{C}P^\infty \simeq MU(1)$, вторая группа когомологий $H^2(X) = [X, \mathbb{C}P^\infty]$ является подмножеством (не подгруппой!) во второй группе кобордизмов $U^2(X)$. То есть, любой элемент $x \in H^2(X)$ определяет класс кобордизмов $u_x \in U^2(X)$. Элементы из $U^2(X)$, получаемые таким образом, называются *геометрическими кобордизмами* пространства X.

В случае, когда $X = X^k$ — многообразие, каждый класс когомологий $x \in H^2(X)$ двойственнен по Пуанкаре к некоторому подмногообразию $M \subset X$ коразмерности 2 с фиксированной комплексной структурой в нормальном расслоении. Более того, если X — стабильно комплексное многообразие, представляющее класс бордизмов $[X] \in \Omega^U_k$, то мы имеем

$$[M] = \varepsilon D_U(u_x) \in \Omega^U_{k-2},$$

где $D_U\colon U^2(X) \to U_{k-2}(X)$ — отображение двойственности Пуанкаре–Атья, а отображение $\varepsilon\colon U_{k-2}(X) \to \Omega^U_{k-2}$ есть аугментация в бордизмы точки. По определению εD_U есть кронекеровское произведение с классом $[X]$.

Для двух геометрических кобордизмов $u, v \in U^2(X)$, соответствующих элементам $x, y \in H^2(X)$, обозначим через $u +_H v$ геометрический кобордизм, соответствующий когомологическому классу $x + y$. Тогда в $U^2(X)$ имеем следующее равенство:

$$u +_H v = F_U(u, v) = u + v + \sum_{k\geqslant 1,\, l\geqslant 1} \alpha_{kl}\, u^k v^l, \tag{1.5}$$

где коэффициенты $\alpha_{kl} \in \Omega_U^{-2(k+l-1)}$ не зависят от u, v и X. Ряд $F_U(u,v)$ из соотношения (1.5) является (коммутативной одномерной) формальной группой над кольцом комплексных кобордизмов Ω_U. Она была введена Новиковым в [**40**, §5, Appendix 1] и называется *формальной группой геометрических кобордизмов*. Подробности данной конструкции можно найти в [**13**] и [**15**, Appendix E].

Имеем

$$U^*(BU) = \Omega_U[[c_1^U, c_2^U, \ldots, c_i^U, \ldots]],$$

где c_i^U — i-ый универсальный характеристический класс Коннера–Флойда, а равенство выше понимается как изоморфизм градуированных компонент. Для комплексного i-мерного векторного расслоения ξ над клеточным пространством X определён характеристический класс $c_i^U(\xi) = f^*(c_i^U) \in U^{2i}(X)$, где $f\colon X \to BU$ — классифицирующее отображение.

Пусть η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$ и $\bar\eta$ — комплексно сопряжённое к нему (расслоение гиперплоскости). Класс $u = c_1^U(\bar\eta) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ представляет собой класс кобордизмов, соответствующий вложению $\mathbb{C}P^\infty = BU(1) \to MU(1)$, которое является гомотопической эквивалентностью. Иными словами, $u = c_1^U(\bar\eta)$ есть геометрический кобордизм, соответствующий первому классу Чженя $c_1(\bar\eta) \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$. Тогда класс $c_1^U(\eta) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ представляет собой формальный степенной ряд, обратный к $u = c_1^U(\bar\eta)$ относительно формальной группы F_U; мы будем обозначать этот ряд через $\overline{u}$.

Аналогично, для любого комплексного линейного расслоения ξ над X класс $c_1^U(\xi) \in U^2(X)$ совпадает с геометрическим кобордизмом, соответствующим $c_1(\xi) \in$

$H^2(X)$. Формальная группа геометрических кобордизмов выражает первый класс Коннера–Флойда тензорного произведения $\xi \otimes \zeta$ линейных расслоений над X через классы $u = c_1^U(\xi)$ и $v = c_1^U(\zeta)$:

$$c_1^U(\xi \otimes \zeta) = F_U(u, v).$$

Если ξ — комплексное расслоение произвольной размерности над X, то геометрический кобордизм, соответствующий $c_1(\xi) \in H^2(X)$, есть $c_1^U(\det \xi) \in U^2(X)$ (он задаётся отображением $X \to \mathbb{C}P^\infty$, классифицирующим детерминантное расслоение $\det \xi$). Вообще говоря, $c_1^U(\det \xi) \neq c_1^U(\xi)$. Рассмотрим детерминантное отображение $\det\colon U \to U(1)$ и соответствующее отображение $\det\colon BU \to BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$. Определим универсальный характеристический класс $d^U = \det^* u \in U^2(BU)$. Тогда мы имеем $d^U(\xi) = c_1^U(\det \xi)$.

2. SU-многообразия и SU-спектр

Специальной унитарной структурой (*SU-структурой*) на многообразии M называется стабильно комплексная структура $c_\mathcal{T}$, см. (1.1), вместе с выбором SU-структуры на комплексном векторном расслоении ξ. Эквивалентно, SU-структура — гомотопический класс поднятия отображения $M \to BU$, классифицирующего ξ, до отображения $M \to BSU$. Стабильно комплексное многообразие $(M, c_\mathcal{T})$ допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда первый (целочисленный) класс Чженя расслоения ξ равен нулю: $c_1(\xi) = 0$. Кроме того, такая SU-структура единственна, если $H^1(M; \mathbb{Z}) = 0$ (это следует, например, из рассмотрения гомотопической последовательности расслоения $BSU \to BU$ со слоем S^1). *SU-многообразием* называется стабильно комплексное многообразие с фиксированной SU-структурой на нём. Часто, допуская некоторую вольность речи, мы будем называть SU-многообразием стабильно комплексное многообразие M с $c_1(M) = 0$, имея в виду, что такое многообразие допускает некоторую SU-структуру.

Существует обобщённая теория гомологий, получающаяся из многообразий с SU-структурой, известная как SU-бордизмы. Как и в случае U-бордизмов, она может быть определена геометрически или гомотопически.

В геометрическом подходе группа бордизмов $SU_n(X)$ определяется как множество классов бордизмов непрерывных отображений $M \to X$, где M — n-мерное SU-многообразие. Гомотопический подход основывается на понятии *MSU-спектра*. Пусть $\widetilde{\eta}_n$ — универсальное (тавтологическое) комплексное n-мерное расслоение над $BSU(n)$. Пространство Тома расслоения $\widetilde{\eta}_n$ обозначается $MSU(n)$. Спектр Тома $MSU = \{Z_i,\ \Sigma Z_i \to Z_{i+1}\colon i \geqslant 0\}$ имеет $Z_{2k} = MSU(k)$ и $Z_{2k+1} = \Sigma Z_{2k}$. Группы *SU-бордизмов* и *кобордизмов* клеточной пары (X, A) определяются как

$$SU_n(X, A) = \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+n}\big((X/A) \wedge MSU(k)\big),$$
$$SU^n(X, A) = \lim_{k\to\infty} \big[\Sigma^{2k-n}(X/A), MSU(k)\big].$$

Таким образом, аналогично случаю U-бордизмов, получаем мультипликативную обобщённую теорию (ко)гомологий.

Кольцо SU-бордизмов определяется как $\Omega^{SU} = SU_*(pt)$.

В отличие от Ω^U, кольцо Ω^{SU} имеет кручение. Первый элемент кручения появляется уже в размерности 1: из того, что пространство Тома $MSU(k)$ не имеет клеток в размерностях от $2k+1$ до $2k+3$, следует, что $\Omega_1^{SU} = \pi_1^s = \mathbb{Z}_2$. Образующая θ группы Ω_1^{SU} представляется окружностью с нетривиальным оснащением, индуцирующим нетривиальную SU-структуру.

Первым структурным результатом о кольце Ω^{SU} была теорема Новикова 1962 года, показывающая, что Ω^{SU} становится полиномиальным кольцом после обращения двойки (хотя само Ω^{SU} не является полиномиальным даже по модулю кручения). Напомним, что по теореме 1.5 класс бордизмов $[M^{2i}] \in \Omega_{2i}^U$ является полиномиальной образующей в Ω^U, если и только если $s_i[M^{2i}] = \pm m_i$, где числа m_i определены в (1.4). Более сложные условия делимости на s_i-число позволяют определить и полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Теорема 2.1 (Новиков [**39**, Приложение 1]). *$\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ представляет собой полиномиальное кольцо с одной образующей в каждой чётной размерности $\geqslant 4$:*

$$\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][y_i \colon i \geqslant 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизмов SU-многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей y_i, если и только если

$$s_i[M^{2i}] = \pm m_i m_{i-1} \quad \text{с точностью до степени двойки.}$$

Заметим, что с точностью до степеней двойки мы имеем

$$m_i m_{i-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq p^k,\ i \neq p^k - 1 \text{ ни для какого нечётного простого } p, \\ p, & \text{если } i = p^k \text{ или } i = p^k - 1 \text{ для некоторого нечётного простого } p. \end{cases}$$

Дополнительное условие делимости в размерностях $2i = 2p^k$ вытекает из следующего простого наблюдения.

Предложение 2.2. *Если M^{2n} является SU-многообразием размерности $2n = 2p^k$ для некоторого простого p, то*

$$s_n[M^{2n}] = 0 \mod p.$$

Доказательство. Для $n = p^k$ мы имеем

$$s_n(M^{2n}) = x_1^n + \dots + x_n^n \equiv (x_1 + \dots + x_n)^n = c_1^n(M^{2n}) = 0 \mod p \qquad \square$$

Как и в случае унитарных бордизмов, из теоремы 2.1 следует, что класс SU-бордизмов SU-многообразия определяется своими характеристическими числами с точностью до 2-примарного кручения. Как показали Андерсон, Браун и Петерсон [**2**], характеристические числа в KO-теории вместе с обычными характеристическими числами уже полностью определяют класс SU-бордизмов.

3. Операции в комплексных кобордизмах и спектральная последовательность Адамса–Новикова

(Стабильной) *операцией* θ степени n в комплексных кобордизмах называется семейство аддитивных отображений

$$\theta \colon U^k(X, A) \to U^{k+n}(X, A),$$

определённых для всех клеточных пар (X, A), которые функториальны по (X, A) и коммутируют с изоморфизмами надстройки. Множество всех операций образует кольцо по отношению к сложению и композиции; более того, имеется структура алгебры над кольцом Ω_U. Эта алгебра обозначается A^U; она была описана в работах Ландвебера [**29**] и Новикова [**40**, §5].

Конструкция 3.1 (операции и характеристические классы). Существует изоморфизм Ω_U-модулей

$$A^U \cong U^*(MU) = \varprojlim U^{*+2N}(MU(N)).$$

Для элемента $a \in U^n(MU)$ из A^U, представленного отображением спектров $a \colon MU \to \Sigma^n MU$, мы обозначим соответствующую операцию через

$$a^* \colon U^*(X) \to U^{*+n}(X),$$

где X — клеточное пространство. Действие операции a^* описывается следующим образом. Для элемента $x \in U^m(X)$, представленного отображением $x\colon X \to \Sigma^m MU$, элемент $a^*x \in U^{m+n}(X)$ представляется композицией

$$X \xrightarrow{x} \Sigma^m MU \xrightarrow{\Sigma^m a} \Sigma^{m+n} MU.$$

Таким образом определяется левое действие алгебры A^U на группах кобордизмов пространства X, превращающее U^* в функтор со значениями в категории градуированных левых A^U-модулей.

Также аналогично определяется действие

$$a_*\colon U_*(X) \to U_{*-n}(X)$$

алгебры A^U на группах бордизмов. Для элемента $x \in U_m(X)$, представленного отображением $x\colon \Sigma^m S \to X \wedge MU$, элемент $a_*x \in U_{m-n}(X)$ представляется композицией

$$\Sigma^{m-n} S \xrightarrow{\Sigma^{-n}x} \Sigma^{-n}(X \wedge MU) \xrightarrow{\Sigma^{-n}(1\wedge a)} X \wedge MU.$$

Существуют естественные изоморфизмы Тома

$$\varphi_*^N\colon U_{n+2N}(MU(N)) \to U_n(BU(N)), \quad \varphi_N^*\colon U^n(BU(N)) \to U^{n+2N}(MU(N)).$$

Так как $U_n(BU)$ есть прямой предел групп $U_n(BU(N))$, а $U^n(BU)$ — обратный предел групп $U^n(BU(N))$, и аналогично для MU, то мы также имеем стабильные изоморфизмы Тома

$$\varphi_*\colon U_n(MU) \to U_n(BU), \quad \varphi^*\colon U^n(BU) \to U^n(MU).$$

Отсюда следует, что каждый универсальный характеристический класс $\alpha \in U^n(BU)$ определяет операцию $a = \varphi^*(\alpha) \in U^n(MU)$, и наоборот.

Если $x \in U_m(X)$ представляется сингулярным многообразием $M^m \xrightarrow{f} X$, то a_*x можно интерпретировать геометрически следующим образом. Пусть $\alpha = (\varphi^*)^{-1}a$ — характеристический класс, соответствующий элементу a. Рассмотрим $\alpha(-\mathcal{T}M) \in U^n(M^m)$, где $\mathcal{T}M$ — касательное расслоение, а $-\mathcal{T}M$ — стабильное нормальное расслоение многообразия M. Применяя оператор двойственности Пуанкаре–Атья $D_U\colon U^n(M^m) \to U_{m-n}(M^m)$, мы получаем элемент $D_U\alpha(-\mathcal{T}M) \in U_{m-n}(M)$, представляемый сингулярным многообразием $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M$. Тогда $a_*x \in U_{m-n}(X)$ представляется композицией $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M \xrightarrow{f} X$.

Имеется изоморфизм левых Ω_U-модулей

$$A^U = U^*(MU) \cong \Omega_U \mathbin{\widehat{\otimes}} S,$$

где $\widehat{\otimes}$ — пополненное тензорное произведение, а S — *алгебра Ландвебера-Новикова*, порождённая операциями $S_\omega = \varphi^*(s_\omega^U)$, соответствующими универсальным характеристическим классам $s_\omega^U \in U^*(BU)$, которые получаются из симметризации мономов $t_1^{i_1}\cdots t_k^{i_k}$, индексированных разбиениями $\omega = (i_1, \dots, i_k)$. Следовательно, каждый элемент $a \in A^U$ может быть записан единственным образом в виде бесконечного ряда $a = \sum_\omega \lambda_\omega S_\omega$, где $\lambda_\omega \in \Omega_U$. Структура алгебры Хопфа на S описана в [**29**] и [**40**, §5].

Таким образом, в случае $X = pt$ мы имеем представления алгебры A^U на $\Omega_U = U^*(pt)$ и $\Omega^U = U_*(pt)$. В отличие от обычных (ко)гомологий верна следующая

Лемма 3.2 (см. [**40**, лемма 3.1 и лемма 5.2]). *Представления алгебры A^U на $\Omega_U = U^*(pt)$ и $\Omega^U = U_*(pt)$ точны.*

Замечание. Более общо, для двух спектров конечного типа E и F естественный гомоморфизм $F^*(E) \to \mathrm{Hom}^*(\pi_*(E), \pi_*(F))$ инъективен, если $\pi_*(F)$ и $H_*(E)$ не имеют кручения; подробности см. в [**48**].

Кроме представления алгебры A^U на бордизмах $U_*(X)$ любого пространства X определим ещё одно представление алгебры A^U на $U_*(BU)$ следующим образом.

Конструкция 3.3 (представление A^U на $U_*(BU)$, $a \mapsto \widetilde{a}$). Пусть $a \in U^n(MU)$ — элемент из A^U. Положим

$$\widetilde{a} := \varphi_* a_* \varphi_*^{-1} \colon U_m(BU) \to U_{m-n}(BU).$$

Геометрический смысл этой операции описывается следующим образом. Рассмотрим класс бордизмов $[M,\xi] \in U_m(BU)$, где ξ — стабильное расслоение, индуцированное сингулярным многообразием $M \to BU$ из (стабильного) тавтологического расслоения над BU. Элемент $a \in U^n(MU)$ определяет универсальный характеристический класс $\alpha = (\varphi^*)^{-1} a \in U^n(BU)$ и, следовательно, класс $\alpha(\xi) \in U^n(M)$. Рассмотрим двойственный по Пуанкаре-Атья класс $D_U(\alpha(\xi)) = [Y_a, f_a] \in U_{m-n}(M)$, где $Y_a \xrightarrow{f_a} M$ — сингулярное многообразие в M. Тогда

$$\widetilde{a}[M,\xi] = [Y_a, f_a^*(\xi + \mathcal{T}M) - \mathcal{T}Y_a] \in U_{m-n}(BU).$$

Применяя аугментацию $\varepsilon \colon U_*(BU) \to \varOmega^U$, мы получаем

$$\varepsilon(\widetilde{a}[M,\xi]) = [Y_a] = \big\langle (\varphi^*)^{-1} a, [M,\xi] \big\rangle \in U_{m-n}(pt) = \varOmega^U_{m-n}, \tag{3.1}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает кронекеровское произведение в (ко)бордизмах пространства BU.

Лемма 3.4. *Представление $a \mapsto \widetilde{a}$ алгебры A^U на $U_*(BU)$ точно.*

Доказательство. Полагая $\xi = -\mathcal{T}M$ в конструкции 3.3, мы получаем

$$\widetilde{a}[M, -\mathcal{T}M] = [Y_a, -\mathcal{T}Y_a].$$

Из этого следует, что мы можем рассматривать представление $a \mapsto a_*$ на $U_*(pt)$ как подпредставление в представлении $a \mapsto \widetilde{a}$ на $U_*(BU)$. Так как представление $a \mapsto a_*$ точно по лемме 3.2, представление $a \mapsto \widetilde{a}$ также точно. $\square$

Ниже мы приводим основные свойства когомологической спектральной последовательности Адамса–Новикова в комплексных кобордизмах. Подробности можно найти в [**40**]; см. также [**35**], [**5**], [**9**].

Теорема 3.5 (спектральная последовательность Адамса–Новикова в комплексных кобордизмах). *Пусть X — связный спектр, целочисленные гомологии которого не имеют кручения и конечно порождены в каждой размерности. Тогда существует спектральная последовательность*

$$\{E_r^{p,q}, \quad d_r \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1}, \quad r \geqslant 2\}$$

со следующими свойствами:

а) $E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^{p,q}_{A^U}(U^*(X), U^*(pt))$, *где U^* — теория комплексных кобордизмов и $A^U = U^*(MU)$ — алгебра операций.*

б) *Существует фильтрация*

$$\pi_n(X) = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset F^{2,n+2} \supset \ldots, \qquad \bigcap_{s \geqslant 0} F^{s,n+s} = 0,$$

присоединённый биградуированный модуль которой совпадает с бесконечным членом спектральной последовательности: $E_\infty^{p,q} \cong F^{p,q}/F^{p+1,q+1}$.

в) *Краевой гомоморфизм*

$$\pi_n(X) = F^{0,n} \to E_\infty^{0,n} \to E_2^{0,n} = \operatorname{Hom}^n_{A^U}(U^*(X), U^*(pt))$$

совпадает с естественно определённым отображением.

Кроме того, если X — кольцевой спектр, то спектральная последовательность мультипликативна.

Замечание. Естественное отображение $h\colon \pi_n(X) \to \mathrm{Hom}^n_{A^U}(U^*(X), U^*(pt))$ из пункта в) теоремы 3.5 определяется следующим образом. Если элемент $\alpha \in \pi_n(X)$ представляется отображением $f\colon \Sigma^n S \to X$, а элемент $\beta \in U^p(X)$ — отображением $g\colon X \to \Sigma^p MU$, то элемент $h(\alpha)(\beta) \in U^{p-n}(pt)$ представляется композицией

$$\Sigma^n S \xrightarrow{\ f\ } X \xrightarrow{\ g\ } \Sigma^p MU.$$

4. Структура A^U-модуля $U^*(MSU)$

Чтобы применить теорему 3.5 к спектру специальных унитарных бордизмов MSU, мы должны описать структуру A^U-модуля на $U^*(MSU)$. Главный результат здесь (теорема 4.5) восходит к Новикову. Мы приводим полное доказательство, восполняя некоторые технические детали, отсутствующие в [**40**].

Рассмотрим универсальный характеристический класс $d^U \in U^2(BU)$, введённый к конце параграфа 1, $d^U(\xi) = c_1^U(\det \xi)$. Положим также $\overline{d}^U = c_1^U(\overline{\det \xi})$. Из рассмотрения спектральной последовательности расслоения $BSU \to BU \xrightarrow{\det} BU(1)$ вытекает, что $U^*(BU) \to U^*(BSU)$ есть эпиморфизм, ядром которого служит идеал $I(d^U)$, порождённый классом d^U. Используя изоморфизмы Тома

$$\varphi^*\colon U^*(BSU) \to U^*(MSU) \quad \text{и} \quad \varphi^*\colon U^*(BU) \to U^*(MU),$$

мы получаем, что естественное отображение $MSU \to MU$ индуцирует эпиморфизм $U^*(MU) \to U^*(MSU)$ с ядром $\varphi^*(I(d^U))$. Так как $U^*(MU) \to U^*(MSU)$ — отображение A^U-модулей, мы получаем

$$U^*(MSU) = A^U/\varphi^*(I(d^U)) \quad \text{как } A^U\text{-модуль.} \tag{4.1}$$

Это первое описание искомой структуры A^U-модуля.

Теперь мы определим некоторые важные операции из A^U. Напомним, что каждый характеристический класс $\alpha \in U^*(BU)$ определяет операцию $\varphi^*(\alpha) \in A^U = U^*(MU)$.

Конструкция 4.1 (операции $\Delta_{(k_1,k_2)}$). Для неотрицательных целых чисел k_1, k_2 определим

$$\Delta_{(k_1,k_2)} = \varphi^*\bigl((\overline{d}^U)^{k_1}(d^U)^{k_2}\bigr) \in (A^U)^{2k_1+2k_2}.$$

Соответствующая операция $\widetilde{\Delta}_{(k_1,k_2)}\colon U_*(BU) \to U_{*-2k_1-2k_2}(BU)$ (см. конструкцию 3.3) описывается геометрически следующим образом. Рассмотрим класс $[M,\xi] \in U_n(BU)$. Пусть $i_1\colon Y_1 \hookrightarrow M$ и $i_2\colon Y_2 \hookrightarrow M$ — подмногообразия коразмерности 2, двойственные по Пуанкаре к $-c_1(\xi)$ и $c_1(\xi)$ соответственно. Мы имеем $\nu(Y_1 \subset M) = \overline{(\det \xi)}|_{Y_1}$ и $\nu(Y_2 \subset M) = (\det \xi)|_{Y_2}$. Эти же подмногообразия можно рассматривать, как двойственные по Пуанкаре–Атья к классам $c_1^U(\overline{\det \xi}) = \overline{d}^U(\xi)$ и $c_1^U(\xi) = d^U(\xi)$ соответственно. Подмногообразие, двойственное по Пуанкаре–Атья к $(\overline{d}^U(\xi))^{k_1}(d^U(\xi))^{k_2} \in U^{2k_1+2k_2}(M)$, задаётся трансверсальным пересечением

$$Y_{k_1,k_2} = \underbrace{Y_1 \cdots Y_1}_{k_1} \cdot \underbrace{Y_2 \cdots Y_2}_{k_2}$$

с комплексной структурой в нормальном расслоении $\nu = \nu(Y_{k_1,k_2} \subset M) = (\overline{\det \xi})^{\oplus k_1} \oplus (\det \xi)^{\oplus k_2}|_{Y_{k_1,k_2}}$. Следовательно, мы имеем

$$\widetilde{\Delta}_{(k_1,k_2)}[M,\xi] = [Y_{k_1,k_2}, \xi|_{Y_{k_1,k_2}} + \nu\,] \in U_{n-2k_1-2k_2}(BU).$$

В случае $\xi = -\mathcal{T}M$ мы получаем $(\Delta_{(k_1,k_2)})_*[M] = [M_{k_1,k_2}]$, где M_{k_1,k_2} — подмногообразие, двойственное к $(\det \mathcal{T}M)^{\oplus k_1} \oplus (\overline{\det \mathcal{T}M})^{\oplus k_2}$.

Конструкция 4.2 (операции $\Psi_{(k_1,k_2)}$). Для неотрицательных целых чисел k_1, k_2, положим $k = k_1 + k_2$. Пусть ξ — комплексное линейное расслоение над $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим проективизацию $p\colon \mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k) \to \mathbb{C}P^n$, где $\underline{\mathbb{C}}^k$ — тривиальное расслоение ранга k. Касательное расслоение к многообразию $\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k)$ стабильно расщепляется:

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k) \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta \otimes p^*(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k)) = p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta \otimes p^*\xi) \oplus \bar\eta^{\oplus k},$$

где η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k)$, см. [**15**, теорема D.4.1]. Мы введём новую стабильно комплексную структуру на $\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k)$, используя изоморфизм вещественных расслоений

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^k) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \cong p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta \otimes p^*\xi) \oplus \bar\eta^{\oplus k_1} \oplus \eta^{\oplus k_2},$$

и обозначим полученное стабильно комплексное многообразие через $P^{(k_1,k_2)}(\xi)$.

Мы получаем класс бордизмов $[P^{(k_1,k_2)}(\xi), p] \in U_{2n+2k}(\mathbb{C}P^n)$. Двойственный к нему класс кобордизмов $\chi_{(k_1,k_2)}(\xi) := (D_U)^{-1}[P^{(k_1,k_2)}(\xi), p] \in U^{-2k}(\mathbb{C}P^n)$ определяет универсальный характеристический класс линейных расслоений, который мы обозначим $\chi_{(k_1,k_2)} \in U^{-2k}(\mathbb{C}P^\infty)$.

Теперь мы можем распространить определение $\chi_{(k_1,k_2)}$ на комплексные расслоения произвольного ранга, полагая $\chi_{(k_1,k_2)}(\xi) := \chi_{(k_1,k_2)}(\det \xi)$. В результате мы получаем универсальный характеристический класс $\chi_{(k_1,k_2)} \in U^{-2k}(BU)$ и соответствующую операцию

$$\Psi_{(k_1,k_2)} = \varphi^*\chi_{(k_1,k_2)} \in U^{-2(k_1+k_2)}(MU) = (A^U)^{-2(k_1+k_2)}.$$

Геометрически, $(\Psi_{(k_1,k_2)})_*[M^{2n}]$ — это класс $(2n + 2k_1 + 2k_2)$-мерного многообразия $[\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C}^{k_1+k_2})]$ со стабильно комплексной структурой

$$p^*(\mathcal{T}M) \oplus (\bar\eta \otimes p^*(\overline{\det \mathcal{T}M})) \oplus \bar\eta^{\oplus k_1} \oplus \eta^{\oplus k_2}.$$

Мы будем использовать следующие обозначения для некоторых из введённых операций:

$$\partial = \Delta_{(1,0)}, \quad \Delta = \Delta_{(1,1)}, \quad \chi = \Psi_{(1,0)}, \quad \Psi = \Psi_{(1,1)}. \tag{4.2}$$

С геометрической точки зрения $\partial_*[M]$ представляется подмногообразием, двойственным к $c_1(\det \mathcal{T}M) = c_1(M)$, и $\chi_*[M]$ представляется многообразием $\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}M} \oplus \underline{\mathbb{C}})$ со стандартной стабильно комплексной структурой. Операции ∂_* и Δ_* детально изучались Коннером и Флойдом [**22**], которые обозначали их просто через ∂ и Δ.

Описанные выше операции удовлетворяют следующим алгебраическим соотношениям.

Лемма 4.3. *Выполнены равенства*

$$\partial^2 = \Delta\partial = 0, \quad \Delta\Psi = \mathrm{id}, \quad \partial\Psi = 0, \quad \chi\partial = [\mathbb{C}P^1]\partial, \quad \partial\chi\partial = 2\partial.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.2 достаточно проверить эти соотношения на бордизмах точки Ω^U. Напомним, что $\partial_*[M]$ представляется подмногообразием, двойственным к $c_1(M)$, которое является SU-многообразием. Следовательно, $(\Delta_{(k_1,k_2)})_*\partial_* = 0$. В частности, $\partial_*^2 = \Delta_*\partial_* = 0$.

Равенство $\Delta_*\Psi_* = \mathrm{id}$ доказано в [**22**, теорема 8.1]. Равенство $\partial_*\Psi_* = 0$ приведено в [**22**, теорема 8.2], но его доказательство содержит неточность в вычислении характеристических классов. Поэтому ниже мы приводим исправленное доказательство.

Возьмём $[M^{2n}] \in \Omega^U_{2n}$. Тогда класс $\Psi_*[M^{2n}]$ представляется многообразием $\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}M} \oplus \underline{\mathbb{C}}^2)$ со стабильно комплексной структурой, задаваемой изоморфизмом

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}M} \oplus \underline{\mathbb{C}}^2) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \cong p^*\mathcal{T}M \oplus (\bar\eta \otimes p^*\overline{\det \mathcal{T}M}) \oplus \bar\eta \oplus \eta.$$

Обозначим это стабильно комплексное многообразие через P^{2n+4}. Тогда $\partial_*\Psi_*[M^{2n}] = \partial_*[P^{2n+4}]$ представляется подмногообразием $N^{2n+2} \subset P^{2n+4}$, двойственным к классу

$c_1(P^{2n+4}) = c_1(\bar\eta)$. Мы можем взять в качестве N^{2n+2} подмногообразие $\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C})$ со стабильно комплексной структурой

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}M} \oplus \underline{\mathbb{C}}) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \cong p^*\mathcal{T}M \oplus (\bar\eta \otimes p^*\overline{\det \mathcal{T}M}) \oplus \eta.$$

Заметим, что $[N^{2n+2}]$ есть в точности $(\Psi_{(0,1)})_*[M^{2n}]$. Для того, чтобы увидеть, что N^{2n+2} бордантно нулю, посчитаем его полный класс Чженя. Обозначим $c_i = c_i(M)$, $d = c_1(\bar\eta)$, тогда мы имеем соотношение $d^2 = p^*c_1 \cdot d$. Мы получаем

$$\begin{aligned} c(N^{2n+2}) &= (1 + p^*c_1 + \cdots + p^*c_n)(1 + d - p^*c_1)(1 - d) \\ &= (1 + p^*c_1 + \cdots + p^*c_n)(1 - p^*c_1) \\ &= 1 + p^*(c_2 - c_1^2) + p^*(c_3 - c_1c_2) + \cdots + p^*(c_n - c_1c_{n-1}) \end{aligned}$$

(это вычисление было неверно проведено в [**22**, pp. 36–37]). Отсюда $c_\omega(N^{2n+2}) = p^*c'_\omega(M^{2n})$, где $c'_i = c_i - c_1c_{i-1}$, и все характеристические числа $c_\omega[N^{2n+2}]$ равны нулю по соображениям размерности.

Равенство $\partial\Psi = \Psi_{0,1} = 0$ можно также получить геометрически, заметив, что стабильно комплексная структура на N^{2n+2} тривиальна на каждом слое $\mathbb{C}P^1 = S^2$ проективизации, и значит, она продолжается на ассоциированное расслоение на 3-мерные диски.

Чтобы проверить равенство $\chi_*\partial_* = [\mathbb{C}P^1]\partial_*$, заметим, что $\partial_*[M^{2n}] = [Y^{2n-2}]$, где Y^{2n-2} — SU-многообразие, т. е. $\det \mathcal{T}Y$ тривиально. Тогда $\chi_*\partial_*[M^{2n}]$ представляется многообразием $\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}Y} \oplus \underline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}P^1 \times Y$, откуда вытекает требуемое равенство.

Последнее соотношение получается после применения ∂_* к обеим частям равенства $\chi_*\partial_* = [\mathbb{C}P^1]\partial_*$. В обозначениях предыдущего абзаца, мы должны проверить равенство $\partial_*(\mathbb{C}P^1 \times Y) = 2Y$, которое следует из того наблюдения, что $2Y \subset \mathbb{C}P^1 \times Y$ представляет класс гомологий, двойственный к $c_1(\mathbb{C}P^1 \times Y) = c_1(\mathbb{C}P^1) \otimes 1$. ☐

Замечание. В [**40**, §5] вместо равенства $\partial\chi\partial = 2\partial$ приведено равенство $[\partial, \chi] = 2$. Но равенство $[\partial, \chi] = 2$ невозможно. Действительно, применяя ∂ справа, мы получаем $\partial\chi\partial = 2\partial$, а применяя ∂ слева, мы получаем $-\partial\chi\partial = 2\partial$, что влечёт $\partial = 0$. С другой стороны, $\partial[\mathbb{C}P^1] = 2$.

Следствие 4.4. *Если для некоторых $a, b \in A^U$ выполнено равенство $a\partial + b\Delta = 0$, то $b = 0$.*

Доказательство. Достаточно умножить данное равенство справа на Ψ и воспользоваться предыдущими соотношениями. ☐

Теперь мы можем сформулировать основной результат о $U^*(MSU)$, который позволит нам вычислить соответствующую спектральную последовательность Адамса–Новикова.

Теорема 4.5 ([**40**, теорема 6.1]).

а) *Левый A^U-модуль $U^*(MSU)$ изоморфен $A^U/(A^U\Delta + A^U\partial)$. Ядро естественного гомоморфизма $A^U = U^*(MU) \to U^*(MSU)$ отождествляется с $A^U\Delta + A^U\partial$.*

б) *Левый аннулятор ∂ равен $A^U\Delta + A^U\partial$.*

Доказательство. Исходное доказательство в [**40**] в некоторых моментах довольно схематично. Восполнение деталей потребовало некоторой технической работы. Доказательство будет состоять из трёх частей.

I. Покажем, что $\widetilde{\partial}(U_*(BU)) = U_*(BSU)$. Другими словами, класс бордизмов $[X, \xi] \in U_m(BU)$ лежит в образе $\widetilde{\partial}$ тогда и только тогда, когда он представляется парой (X, ξ), где ξ — SU-расслоение, т. е. $c_1(\xi) = 0$.

Для доказательства включения $\widetilde{\partial}(U_*(BU)) \supset U_*(BSU)$ возьмём $[X,\xi] \in U_m(BU)$ с $c_1(\xi) = 0$. Рассмотрим класс бордизмов $[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta] \in U_{m+2}(BU)$, где η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^1$. Согласно определению операции $\widetilde{\partial}$ (конструкция 3.3), $\widetilde{\partial}[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta] = [Y,\zeta]$, где $Y \subset X \times \mathbb{C}P^1$ — подмногообразие коразмерности 2, двойственное к $c_1(\xi\times\eta) = 1 \otimes c_1(\eta)$. Следовательно, мы можем взять $Y = X$, и тогда

$$\zeta = \xi \times \eta|_X + \mathcal{T}(X \times \mathbb{C}P^1)|_X - \mathcal{T}X = \xi$$

как стабильные расслоения. В итоге получаем, что $[X,\xi] = \widetilde{\partial}[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta]$.

Для доказательства обратного включения $\widetilde{\partial}(U_*(BU)) \subset U_*(BSU)$ возьмём $[Y,\zeta] = \widetilde{\partial}[X,\xi]$. Мы должны показать, что класс ζ представляется SU-расслоением. Но согласно конструкции 3.3,

$$\widetilde{\partial}[X,\xi] = [Y, \xi|_Y + \mathcal{T}X|_Y - \mathcal{T}Y] \in U_{m-2}(BU),$$

где $Y \subset X$ — подмногообразие коразмерности 2 с нормальным расслоением $\nu(Y \subset X) = \overline{\det \xi}|_Y$. Тогда

$$c_1(\zeta) = c_1(\xi|_Y + \mathcal{T}X|_Y - \mathcal{T}Y) = c_1(\xi|_Y) + c_1(\nu) = c_1(\det \xi|_Y) + c_1(\overline{\det \xi}|_Y) = 0,$$

и значит, ζ — SU-расслоение.

II. Покажем, что $\mathrm{Ann}_L\partial = \varphi^*(I(d^U))$, где $\mathrm{Ann}_L\partial$ обозначает левый аннулятор ∂ в A^U. Пусть $a\partial = 0$ для некоторого $a \in A^U$. Тогда $\widetilde{a}\widetilde{\partial} = 0$, что по предыдущему пункту эквивалентно тому, что $\widetilde{a}|_{U_*(BSU)} = 0$. Другими словами, $\widetilde{a}[X,\xi] = [Y_a, f_a^*(\xi + \mathcal{T}X) - \mathcal{T}Y_a] = 0$ для любого SU-расслоения ξ. В частности, $[Y_a] = 0$ в Ω_U. Но согласно (3.1) $[Y_a] = \langle(\varphi^*)^{-1}a, [X,\xi]\rangle$. Отсюда следует, что $(\varphi^*)^{-1}a \in U^*(BU) = \mathrm{Hom}_{\Omega^U}(U_*(BU), \Omega^U)$ лежит в идеале $I(d^U)$, потому что последний состоит в точности из тех гомоморфизмов $U_*(BU) \to \Omega^U$, которые обращаются в ноль на классах бордизмов SU-расслоений. То есть, $a \in \varphi^*(I(d^U))$ и $\mathrm{Ann}_L(\partial) \subset \varphi^*(I(d^U))$. Для доказательства противоположного включения заметим, что $a \in \varphi^*(I(d^U))$ влечёт, что $\widetilde{a}|_{U_*(BSU)} = 0$. Согласно предыдущему пункту, $\widetilde{a}\widetilde{\partial} = 0$. Теперь лемма 3.4 показывает, что $a\partial = 0$, и следовательно, $a \in \mathrm{Ann}_L(\partial)$.

III. Покажем теперь, что $\varphi^*(I(d^U)) = A^U\Delta + A^U\partial$.

Из следствия 4.4 вытекает, что сумма $A^U\Delta + A^U\partial$ прямая, и далее мы будем обозначать её $A^U\Delta \oplus A^U\partial$.

Из леммы 4.3 и пункта II получаем включение $A^U\Delta \oplus A^U\partial \subset \mathrm{Ann}_L\partial = \varphi^*(I(d^U))$. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow A^U\Delta \oplus A^U\partial \xrightarrow{\ i\ } \varphi^*(I(d^U)) \longrightarrow \varphi^*(I(d^U))/(A^U\Delta \oplus A^U\partial) \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

градуированных Ω_U-модулей. Обозначим

$$N = \varphi^*(I(d^U))/(A^U\Delta \oplus A^U\partial).$$

Нам нужно показать, что $N = 0$.

Для начала покажем, что N не имеет Ω_U-кручения. Пусть $\lambda n = 0$ для ненулевого $\lambda \in \Omega_U$ и $n = x + (A^U\Delta + A^U\partial) \in N$, $x \in \varphi^*(I(d^U))$. То есть, $\lambda x = a\Delta + b\partial$ для некоторых $a, b \in A^U$. Умножая справа на Ψ и используя лемму 4.3, получаем $a = \lambda x\Psi$ и $b\partial = \lambda x - \lambda x\Psi\Delta = \lambda y$. Следовательно, $\widetilde{b}\widetilde{\partial} = \widetilde{\lambda y}$. Далее, для класса бордизмов $[Y,\zeta] \in U_*(BSU)$ мы имеем

$$\bigl\langle(\varphi^*)^{-1}b, [Y,\zeta]\bigr\rangle = \bigl\langle(\varphi^*)^{-1}b, \widetilde{\partial}[X,\xi]\bigr\rangle = \varepsilon(\widetilde{\lambda y}\,[X,\xi]) = \lambda\varepsilon(\widetilde{y}\,[X,\xi]),$$

где первое равенство следует из пункта I, а второе — из соотношений (3.1). Рассмотрим естественную проекцию $p\colon U^*(BU) \to U^*(BSU)$, двойственную посредством кронекеровского спаривания естественному включению $U_*(BSU) \hookrightarrow U_*(BU)$. Тогда из равенства выше вытекает, что $p((\varphi^*)^{-1}b) = \lambda w$ для некоторого $w \in U^*(BSU)$. Мы имеем

$w = p(t)$ для некоторого $t \in U^*(BU)$, следовательно, $p((\varphi^*)^{-1}b - \lambda t) = 0$, и мы получаем, что $(\varphi^*)^{-1}b - \lambda t \in \operatorname{Ker} p = I(d^U)$. Значит, $b - \lambda\varphi^*(t) \in \varphi^*(I(d^U))$ и $b\partial = \lambda\varphi^*(t)\partial$ по пункту II. В итоге получаем, что $\lambda x = a\varDelta + b\partial = \lambda(x\varPsi\varDelta + \varphi^*(t)\partial)$. Так как A^U не имеет $\varOmega_U$-кручения, мы заключаем, что $x = x\varPsi\varDelta + \varphi^*(t)\partial \in A^U\varDelta \oplus A^U\partial$, и значит, $n = 0$. Что и требовалось.

Теперь рассмотрим следующие A^U-линейные отображения:

$$p_\Delta\colon A^U \to A^U\varDelta, \qquad a \mapsto 2a\varPsi\varDelta, \qquad\qquad p_\partial\colon A^U \to A^U\partial, \qquad a \mapsto a(1-\varPsi\varDelta)\chi\partial.$$

Эти отображения ведут себя подобно взаимно ортогональным проекторам, а именно, они удовлетворяют следующим равенствам

$$p_\Delta|_{A^U\varDelta} = 2\operatorname{id}_{A^U\varDelta}, \qquad p_\Delta|_{A^U\partial} = 0, \qquad p_\partial|_{A^U\partial} = 2\operatorname{id}_{A^U\partial}, \qquad p_\partial|_{A^U\varDelta} = 0.$$

Это проверяется прямым вычислением с использованием леммы 4.3:

$$p_\Delta(a\varDelta) = 2a\varDelta\varPsi\varDelta = 2a\varDelta, \qquad p_\Delta(b\partial) = 2b\partial\varPsi\varDelta = 0,$$
$$p_\partial(a\varDelta) = a\varDelta(1-\varPsi\varDelta)\chi\partial = (a\varDelta - a\varDelta\varPsi\varDelta)\chi\partial = 0,$$
$$p_\partial(b\partial) = b\partial(1-\varPsi\varDelta)\chi\partial = (b\partial - b\partial\varPsi\varDelta)\chi\partial = b\partial\chi\partial = 2b\partial.$$

Следовательно, мы имеем A^U-линейное отображение $p = p_\Delta + p_\partial\colon A^U \to A^U\varDelta \oplus A^U\partial$, удовлетворяющее $p|_{A^U\varDelta\oplus A^U\partial} = 2\operatorname{id}_{A^U\varDelta\oplus A^U\partial}$. Теперь мы воспользуемся следующим чисто алгебраическим фактом.

Лемма 4.6. *Пусть* $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ *— короткая точная последовательность абелевых групп. Предположим, что* A *не имеет* n*-кручения для некоторого фиксированного* $n \in \mathbb{Z}$*, и существует такой гомоморфизм* $p\colon B \to A$*, что* $p\circ i = n\operatorname{id}_A$*. Тогда существует мономорфизм* $s\colon nC \hookrightarrow B$*.*

Если мы начинаем с короткой точной последовательности R*-модулей для некоторого коммутативного кольца* R*, то* s *также будет гомоморфизмом* R*-модулей.*

Доказательство. Рассмотрим $nc \in nC$. Если $nc = \pi(nb)$, то $nc = \pi(nb - i(p(b)))$ и $p(nb - i(p(b))) = np(b) - np(b) = 0$. Следовательно, существует такой элемент $x := nb - i(p(b)) \in B$, что $\pi(x) = nc$ и $p(x) = 0$. Если x' — другой такой элемент, то $\pi(x - x') = 0$, следовательно, $x - x' = i(y)$, и $0 = p(x-x') = p(i(y)) = ny$. Так как A не имеет n-кручения, $y = 0$ и $x = x'$. Таким образом, x определяется единственным образом, и мы получаем корректно определённый гомоморфизм $s\colon nC \to B$, $nc \mapsto x$, удовлетворяющий равенствам $p \circ s = 0$ и $\pi \circ s = \operatorname{id}_{nC}$. Из последнего равенства вытекает, что s инъективен. □

Применяя эту лемму к короткой точной последовательности (4.3) и отображению $p = p_\Delta + p_\partial$ (ограниченному на $\varphi^* I(d^U)$), мы заключаем, что $2N$ вкладывается в $\varphi^* I(d^U) \subset A^U$. Так как N не имеет 2-кручения, то сам N также вкладывается в $\varphi^* I(d^U) \subset A^U$. Кроме того, применяя $\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z}$ к (4.3), мы получаем короткую точную последовательность градуированных абелевых групп

$$0 \to \big((A^U\varDelta)\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z}\big) \oplus \big((A^U\partial)\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z}\big) \xrightarrow{i\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z}} \varphi^*(I(d^U))\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z} \to N\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z} \to 0. \tag{4.4}$$

Инъективность второго отображения следует из равенства $(p\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z})(i\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z}) = 2\operatorname{id}$ и отсутствия кручения в $\big((A^U\varDelta)\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z}\big) \oplus \big((A^U\partial)\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z}\big)$ (эта группа описана ниже). Заметим, что $M\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z} = M/(\varOmega_U^+M)$ для любого $\varOmega_U$-модуля M, где $\varOmega_U^+$ обозначает идеал элементов ненулевой (отрицательной) степени из $\varOmega_U$.

Теперь мы, используя подсчёт размерностей, покажем, что $N\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z}$ — конечная группа (в каждой размерности).

Так как $\varDelta$ имеет правый обратный $\varPsi$, A^U-модуль $A^U\varDelta$ — свободный с одной образующей в размерности 4. То есть, $(A^U\varDelta)^{2k} = U^{2k-4}(MU)$. Следовательно,

$$((A^U\varDelta)\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z})^{2k} = (U^{*-4}(MU)\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z})^{2k} = H^{2k-4}(MU;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{p(k-2)},$$

где $p(k)$ — количество целочисленных разбиений числа k. Кроме того,

$$(A^U\partial)^{2k} = (A^U)^{2k-2}\partial \cong (A^U)^{2k-2}/(\operatorname{Ann}_L\partial)^{2k-2} \\ = (A^U)^{2k-2}/(\varphi^* I(d^U))^{2k-2} = U^{2k-2}(MSU),$$

где третье равенство следует из пункта II, а последнее — из равенства (4.1). Отсюда получаем, что

$$((A^U\partial)\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z})^{2k} \cong H^{2k-2}(MSU;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\widetilde{p}(k-1)},$$

где $\widetilde{p}(k)$ — число целочисленных разбиений числа k без 1. Наконец, $(\varphi^* I(d^U))\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z} = \varphi_H^* I(c_1)$, где $\varphi_H^*\colon H^*(BU,\mathbb{Z})\to H^*(MU,\mathbb{Z})$ — изоморфизм Тома в целочисленных когомологиях, и $I(c_1)$ — идеал в $H^*(BU,\mathbb{Z})$, порождённый первым универсальным классом Чженя c_1. Следовательно,

$$((\varphi^* I(d^U))\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z})^{2k} = (\varphi_H^* I(c_1))^{2k} = \mathbb{Z}^{p(k-1)}.$$

Применяя полученные равенства к $(2k)$-ой однородной компоненте последовательности (4.4), мы получаем

$$0 \to \mathbb{Z}^{p(k-2)+\widetilde{p}(k-1)} \to \mathbb{Z}^{p(k-1)} \to (N\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z})^{2k} \to 0.$$

Теперь из равенства $p(k-1) = p(k-2) + \widetilde{p}(k-1)$ следует, что группы $(N\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z})^{2k}$ конечны.

Таким образом, мы имеем такой градуированный $\varOmega_U$-подмодуль N в A^U, что $(N\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z})^{2k}$ — конечная группа для каждого k. Мы должны показать, что $N=0$. Рассмотрим $\varOmega_U$-линейную проекцию $p_\omega\colon A^U\to\varOmega_U$, сопоставляющую элементу $a\in A^U$ его коэффициент λ_ω в представлении $a=\sum_\omega \lambda_\omega S_\omega$ в виде ряда от операций $S_\omega\in A^U$ Ландвебера–Новикова. Так как группа $N\otimes_{\varOmega_U}\mathbb{Z} = N/(\varOmega_U^+ N)$ конечна в каждой размерности, группа $p_\omega(N)/(\varOmega_U^+ p_\omega(N))$ также конечна в каждой размерности. Нам нужно установить, что $p_\omega(N)=0$. Мы имеем следующую алгебраическую ситуацию. Пусть R — неотрицательно (или неположительно) градуированное кольцо без кручения, и пусть $I\subset R$ — идеал такой, что группа $I/(R^+I)$ конечна в каждой размерности. Тогда утверждается, что $I=0$. Действительно, рассмотрим элемент $x\in I$ минимальной возможной степени. Тогда $nx\in R^+I$ для некоторого ненулевого целого числа n. Но так как степень элемента x минимальна в I, каждый ненулевой элемент из R^+I имеет степень строго большую, чем $\deg x$. Значит, $nx=0$. Так как R не имеет кручения, мы заключаем, что $x=0$ и $I=0$. Возвращаясь к нашей ситуации, мы получаем, что $p_\omega(N)=0$ для всех ω. А значит, $N=0$, что и требовалось.

Итак, мы показали, что $\varphi^*(I(d^U)) = A^U\varDelta + A^U\partial$. Сопоставляя это равенство с (4.1), мы получаем пункт а) теоремы, а соединяя с равенствами из пункта II, мы получаем $\operatorname{Ann}_L\partial = A^U\varDelta + A^U\partial$, что доказывает пункт б). □

5. Вычисление спектральной последовательности

Применим теперь спектральную последовательность Адамса–Новикова (теорема 3.5) к спектру SU-бордизмов $X = MSU$. В результате мы получим мультипликативную спектральную последовательность со вторым членом

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^{p,q}_{A^U}(U^*(MSU), U^*(pt)),$$

сходящуюся к $\pi_*(MSU) = \varOmega_*^{SU}$.

Из теоремы 4.5 следует, что имеется свободная резольвента левых A^U-модулей:

$$0 \longleftarrow U^*(MSU) \cong A^U/(A^U\partial + A^U\Delta) \longleftarrow A^U \xleftarrow{f_0} A^U \oplus A^U \xleftarrow{f_1} A^U \oplus A^U \xleftarrow{f_2} \dots$$

где $A^U \to A^U/(A^U\partial + A^U)$ — естественная проекция, $f_0(a,b) = a\partial + b\Delta$ и $f_i(a,b) = (a\partial + b\Delta, 0)$ для $i \geqslant 1$. Мы сформулируем это более аккуратно следующим образом:

Предложение 5.1. *Имеется следующая свободная резольвента левых A^U-модулей:*

$$0 \longleftarrow U^*(MSU) \longleftarrow R^0 \xleftarrow{f_0} R^1 \xleftarrow{f_1} R^2 \xleftarrow{f_2} \dots$$

где $R^0 = A^U\langle u_0\rangle$ — свободный модуль с одной образующей в размерности 0, $R^i = A^U\langle u_i, v_i\rangle$ — свободный модуль с двумя образующими, $\deg u_i = 2i$, $\deg v_i = 2i+2$, $i \geqslant 1$, и $f_{i-1}(u_i) = \partial u_{i-1}$, $f_{i-1}(v_i) = \Delta u_{i-1}$.

Доказательство. Мы имеем $f_{i-1}f_i = 0$, поскольку $\partial^2 = \Delta\partial = 0$. Точность в члене R^0 — это утверждение теоремы 4.5. Чтобы проверить точность в R^i для $i \geqslant 1$, предположим, что $0 = f_{i-1}(au_i + bv_i) = (a\partial + b\Delta)u_{i-1}$. Тогда $a\partial + b\Delta = 0$, из чего следует, что $b = 0$ и $a\partial = 0$ по следствию 4.4. Значит, $a \in \mathrm{Ann}_L \partial$, и следовательно, $a = a'\partial + b'\Delta$ по теореме 4.5 б). В итоге получаем $au_i + bv_i = au_i = f_i(a'u_{i+1} + b'v_{i+1})$, что и требовалось. □

Применяя теперь функтор $\mathrm{Hom}^q_{A^U}(-, U^*(pt))$ к резольвенте из предложения 5.1 и используя изоморфизмы $\Omega_U^{-q} = \Omega_q^U$, мы получаем комплекс, гомологии которого есть члены $E_2^{*,q}$ спектральной последовательности:

$$0 \longrightarrow \Omega_q^U \xrightarrow{d^0} \Omega_{q-2}^U \oplus \Omega_{q-4}^U \xrightarrow{d^1} \Omega_{q-4}^U \oplus \Omega_{q-6}^U \xrightarrow{d^2} \dots \tag{5.1}$$

Дифференциалы действуют как $d^0(a) = (\partial a, \Delta a)$ и $d^i(a,b) = (\partial a, \Delta a)$, $i \geqslant 1$. Здесь через ∂ и Δ обозначены уже действия соответствующих операций на Ω^U; этих обозначений мы будем придерживаться и далее.

В работе [**22**] Коннер и Флойд ввели в рассмотрение группы

$$\mathcal{W}_q = \mathrm{Ker}(\Delta\colon \Omega_q^U \to \Omega_{q-4}^U).$$

Так как $\partial^2 = \Delta\partial = 0$, мы получаем дифференциал $\partial\colon \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_{k-2}$.

Предложение 5.2. *Комплекс (5.1) квазиизоморфен своему подкомплексу*

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}_q \xrightarrow{\partial} \mathcal{W}_{q-2} \xrightarrow{\partial} \mathcal{W}_{q-4} \xrightarrow{\partial} \dots$$

Доказательство. Рассмотрим включение $i\colon \mathcal{W}_k \to \Omega_k^U \oplus \Omega_{k-2}^U$, $w \mapsto (w, 0)$, для $w \in \mathrm{Ker}\,\Delta$. Это отображение цепных комплексов, так как $i(\partial w) = (\partial w, 0) = (\partial w, \Delta w) = d(w,0) = di(w)$. Индуцированное отображение в гомологиях инъективно, так как из $i(w) = d(a,b)$ следует, что $(w,0) = (\partial a, \Delta a)$, и значит, $w = \partial a$ для $a \in \mathrm{Ker}\,\Delta = \mathcal{W}_*$. Чтобы доказать сюръективность, рассмотрим цикл $(a,b) \in \Omega_k^U \oplus \Omega_{k-2}^U$. Тогда $0 = d(a,b) = (\partial a, \Delta a)$. Поскольку отображение $\Delta\colon \Omega_{k+2}^U \to \Omega_{k-2}^U$ сюръективно (оно имеет правое обратное Ψ), существует элемент $b' \in \Omega_{k+2}^U$ такой, что $\Delta b' = b$. Тогда $a - \partial b' \in \mathrm{Ker}\,\Delta$ является ∂-циклом, и $(a,b) - i(a - \partial b') = (a,b) - (a - \partial b', 0) = (\partial b', b) = d(b', 0)$, то есть, $i(a - \partial b')$ гомологичен (a,b). □

Предложение 5.3. *Для члена E_2 спектральной последовательности выполнено*

а) $E_2^{0,q} = \mathrm{Ker}(\partial\colon \mathcal{W}_q \to \mathcal{W}_{q-2}) = (\mathrm{Ker}\,\partial) \cap (\mathrm{Ker}\,\Delta) \subset \Omega_q^U$;

б) $E_2^{p,q} = H_{q-2p}(\mathcal{W}_*, \partial)$ *для* $p > 0$.

в) *краевой гомоморфизм* $h\colon \Omega_q^{SU} \to E_2^{0,q}$ *совпадает с забывающим гомоморфизмом* $\Omega_q^{SU} \to \mathcal{W}_q$.

Следовательно, спектральная последовательность сконцентрирована в первом квадранте (т. е., $E_r^{p,q}=0$ для $p<0$ или $q<0$), $E_r^{p,q}=0$ для нечётных q или при $q<2p$, и дифференциалы $d_r\colon E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q+r-1}$ тривиальны для чётных r.

Доказательство. Утверждения а) и б) прямо следуют из предложения 5.2. Для доказательства пункта в) напомним, что краевой гомоморфизм

$$h\colon \Omega_q^{SU}\to E_2^{0,q}=\mathrm{Hom}^q_{A^U}(U^*(MSU),\Omega_U)$$

определяется следующим образом. Для элемента $\alpha\in\Omega_q^{SU}$, представленного отображением $f\colon S^q\to MSU$ и элемента $\beta\in U^p(MSU)$, представленного отображением $g\colon MSU\to\Sigma^pMU$ элемент $h(\alpha)(\beta)\in\Omega_U^{p-q}$ представляется композицией $g\circ f\colon S^q\to \Sigma^pMU$. Отождествление $E_2^{0,q}$ с $\mathrm{Ker}(\partial\colon\mathcal{W}_q\to\mathcal{W}_{q-2})$ сопоставляет A^U-гомоморфизму $\varphi\colon U^*(MSU)\to\Omega_U^{*-q}$ элемент $\varphi(\iota)$, где $\iota\in U^0(MSU)$ — класс, представляемый каноническим отображением спектров $MSU\to MU$. Таким образом, краевой гомоморфизм представляет собой отображение $\Omega_q^{SU}\to\Omega_q^U$, $\alpha\mapsto h(\alpha)(\iota)$, что есть в точности гомоморфизм забывания, что доказывает в). Оставшиеся утверждения следуют из того, что комплекс $\mathcal{W}_*$ сконцентрирован в неотрицательных чётных размерностях. □

В частности, $d_2=0$ и $E_2=E_3$. Мы будем обозначать этот член просто E.

Мы имеем $E^{1,2}=H_0(\mathcal{W}_*,\partial)=\mathbb{Z}_2$, так как $\mathcal{W}_0=\Omega_0^U=\mathbb{Z}$, $\mathcal{W}_2=\Omega_2^U=\mathbb{Z}$ с образующей $[\mathbb{C}P^1]$, и $\partial[\mathbb{C}P^1]=2$. Рассмотрим образующую $\theta\in E^{1,2}$. По соображениям размерности это цикл всех дифференциалов, так как она лежит на «граничной линии» $q=2p$.

Предложение 5.4. *Умножение на θ определяет изоморфизм $E^{p,q}\to E^{p+1,q+2}$ для $p>0$ и эпиморфизм $E^{0,q}\to E^{1,q+2}$ с ядром $\mathrm{Im}\,\partial$.*

Доказательство. Для $p>0$ отображение $E^{p,q}\xrightarrow{\cdot\theta}E^{p+1,q+2}$ есть просто тождественное отображение $H_{q-2p}(\mathcal{W}_*)\to H_{q-2p}(\mathcal{W}_*)$. Для $p=0$ гомоморфизм $E^{0,q}\to E^{1,q+2}$ есть естественная проекция $\mathrm{Ker}(\partial\colon\mathcal{W}_q\to\mathcal{W}_{q-2})$ на $H_q(\mathcal{W}_*)$, и значит, его ядро есть $\mathrm{Im}\,\partial$. □

Отсюда следует, что $E^{p,q}=\theta E^{p-1,q-2}$ для $p\geqslant 1$. В частности, $E^{k,2k}=\mathbb{Z}_2$ с образующей θ^k, и значит, единственные ненулевые элементы на граничной линии $q=2p$ это $1,\theta,\theta^2,\theta^3,\ldots$

Рассмотрим теперь $E^{0,4}=\mathrm{Ker}(\partial\colon\mathcal{W}_4\to\mathcal{W}_2)$. Заметим, что $\partial|_{\Omega_4^U}=0$, так как единственное число Чженя для многообразий из Ω_2^U это c_1. Следовательно, $E^{0,4}=\mathcal{W}_4$. Кроме того, $\mathcal{W}_4\cong\mathbb{Z}$ с образующей

$$K=9[\mathbb{C}P^1]^2-8[\mathbb{C}P^2]$$

(этот класс бордизмов имеет характеристические числа $c_1^2=0$ и $c_2=12$). Значит, K является образующей в $E^{0,4}=\mathbb{Z}$.

Имеется потенциально нетривиальный дифференциал $d_3\colon E^{0,4}\to E^{3,6}$, см. рис. 1.

Предложение 5.5. *Мы имеем $d_3(K)=\theta^3$.*

Доказательство. Пусть $d_3(K)=0$. Мы также имеем $d_i(K)=0$ для $i>3$, поскольку $d_i(K)\in E_i^{i,i+3}$ лежит ниже граничной линии $p=2q$. Отсюда следует, что K является циклом всех дифференциалов, и значит, представляет элемент в $E_\infty^{0,4}$. Тогда $E_2^{0,4}=E_\infty^{0,4}$, откуда следует, что краевой гомоморфизм $\Omega_4^{SU}\to E_2^{0,4}$ сюръективен. Но этот гомоморфизм, согласно предложению 5.3 в), совпадает с забывающим гомоморфизмом $\Omega_4^{SU}\to\mathcal{W}_4$, который не может быть сюръективным, например, потому, что $\mathrm{td}(K)=1$, тогда как род Тодда 4-мерного SU-многообразия всегда чётен (это следует, например, из классической теоремы Рохлина о сигнатуре [**46**]). Таким образом, мы пришли к противоречию. □

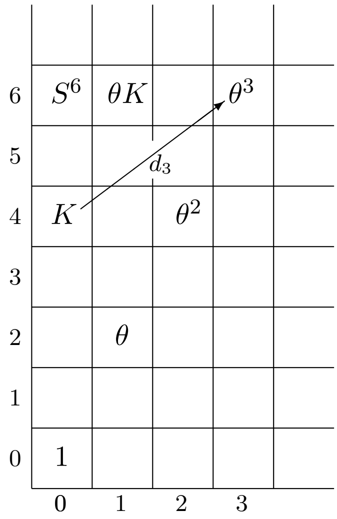

Рис. 1. Член $E_2 = E_3$ спектральной последовательности Адамса–Новикова для SU-бордизмов.

Предложение 5.6. *Мы имеем* $E_4^{p,q} = 0$ *для* $p \geqslant 3$ *и* $E_4 = E_\infty$.

Доказательство. Возьмём d_3-цикл $x \in E^{p,q}$ с $p \geqslant 3$. Мы имеем $x = \theta^3 y$ для некоторого $y \in E^{p-3,q-6}$ и $0 = d_3 x = \theta^3 d_3 y$. Но $d_3 y \in E^{p,q-4}$, и умножение на θ^3 биективно в этой размерности согласно предложению 5.4. Значит, $d_3 y = 0$. Отсюда следует, что $x = \theta^3 y = d_3(Ky)$. То есть, x — граница, и $E_4^{p,q} = 0$ для $p \geqslant 3$. По соображениям размерности отсюда следует, что $d_i = 0$ для всех $i \geqslant 4$ и $E_\infty = E_4$. $\square$

Отсюда получаем, что бесконечный член спектральной последовательности состоит только из трёх столбцов, и легко видеть, что $E_\infty^{1,*} = \theta E_\infty^{0,*}$, $E_\infty^{2,*} = \theta E_\infty^{1,*}$. Более того, в первых трёх столбцах мы имеем $E_\infty = \operatorname{Ker} d_3$ по соображениям размерности, и умножение на θ инъективно на $E_\infty^{1,*}$. В частности, $E_\infty^{k,2k} = E^{k,2k} = \mathbb{Z}_2$ с образующей θ^k для $0 \leqslant k \leqslant 2$, и $E_\infty^{k,2k} = 0$ для $k \geqslant 3$.

Из предложения 5.6 следует, что для фильтрации Адамса–Новикова на Ω^{SU} выполнено $F^{p,q} = 0$ при $p \geqslant 3$, то есть, фильтрация состоит только из трёх членов:

$$\Omega_n^{SU} = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset F^{2,n+2} = E_\infty^{2,n+2}.$$

Для нечётного $n = 2k+1$ мы имеем $F^{0,2k+1}/F^{1,2k+2} = E_\infty^{0,2k+1} = 0$ и $F^{2,2k+3} = E_\infty^{2,2k+3} = 0$ согласно предложению 5.3. Следовательно,

$$\Omega_{2k+1}^{SU} = E_\infty^{1,2k+2}. \tag{5.2}$$

Для чётного $n = 2k$ мы имеем $F^{1,2k+1}/F^{2,2k+2} = E_\infty^{1,2k+1} = 0$, и значит, мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \to E_\infty^{2,2k+2} \to \Omega_{2k}^{SU} \to E_\infty^{0,2k} \to 0. \tag{5.3}$$

Пример 5.7. В малых размерностях мы имеем следующее.

- $\Omega_0^{SU} = E_\infty^{0,0} = E^{0,0} \cong \mathbb{Z}$, так как $E_\infty^{2,2} = 0$.
- $\Omega_1^{SU} = E_\infty^{1,2} = E^{1,2} \cong \mathbb{Z}_2$ с образующей θ.
- $\Omega_2^{SU} = E_\infty^{2,4} \cong \mathbb{Z}_2$ с образующей θ^2, поскольку $0 = E^{0,2} = \operatorname{Ker}\partial \subset \mathcal{W}_2$ (напомним, что группа $\mathcal{W}_2$ порождена $[\mathbb{C}P^1]$ и $\partial[\mathbb{C}P^2] = 2$).
- $\Omega_3^{SU} = E_\infty^{1,4} = \theta E_\infty^{0,2} = 0$.
- $\Omega_4^{SU} = E_\infty^{0,4} \cong \mathbb{Z}$ с образующей $2K$. Равенство $\Omega_4^{SU} = E_\infty^{0,4}$ следует из (5.3), так как $E_\infty^{2,6} = \theta^2 E_\infty^{0,2} = 0$. Образующей группы $E_\infty^{0,4} = \operatorname{Ker} d_3$ является $2K$, так как $d_3(K) = \theta^3$.

- $\Omega^{SU}_5 = E^{1,6}_\infty = \theta E^{0,4}_\infty = 0$, так как $\theta \cdot 2K = 0$.

Теорема 5.8.

а) *Ядро забывающего гомоморфизма $\Omega^{SU} \to \Omega^U$ состоит в точности из элементов кручения.*

б) *Каждый элемент кручения из Ω^{SU} имеет порядок 2. Более точно,*

$$\Omega^{SU}_{2k+1} = \theta\Omega^{SU}_{2k}, \quad \operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{2k} = \theta^2\Omega^{SU}_{2k-2}.$$

Доказательство. Мы имеем $\Omega^{SU}_{2k+1} = E^{1,2k+2}_\infty = \theta E^{0,2k}_\infty = \theta\Omega^{SU}_{2k}$, так как отображение $\Omega^{SU}_{2k} \to E^{0,2k}_\infty$ сюръективно. Отсюда также следует, что Ω^{SU}_{2k+1} целиком состоит из элементов 2-кручения, что даёт пункты а) и б) в нечётных размерностях.

В чётных размерностях мы воспользуемся точной последовательностью (5.3). Так как $E^{0,2k}_\infty \subset E^{0,2k} \subset \mathcal{W}_* \subset \Omega^U$ свободно от кручения, а $E^{2,2k+2}_\infty = \theta^2 E^{0,2k-2}_\infty$ целиком состоит из 2-кручения, мы получаем $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{2k} = E^{2,2k+2}_\infty = \theta^2 E^{0,2k-2}_\infty = \theta^2\Omega^{SU}_{2k-2}$, что доказывает пункт б). Чтобы закончить доказательство пункта а), осталось заметить, что ядро гомоморфизма $\Omega^{SU} \to \Omega^U$, согласно предложению 5.3 в), совпадает с ядром гомоморфизма $\Omega^{SU}_{2k} \to E^{0,2k}_\infty$, которое равно кручению в Ω^{SU}_{2k} по предыдущему. □

Следующая лемма даёт точную последовательность, полученную Коннером и Флойдом [**22**], которая играет ключевую роль при вычислении кручения в Ω^{SU}.

Лемма 5.9. *Имеется короткая точная последовательность $\mathbb{Z}_2$-модулей*

$$0 \to \Omega^{SU}_{2k-1} \to H_{2k-2}(\mathcal{W}_*, \partial) \to \Omega^{SU}_{2k-5} \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{SU}_{2k-1} = E^{1,2k}_\infty \arrow[r] & E^{1,2k} \arrow[r, "d_3^{1,2k}"] & E^{4,2k+2} \arrow[r, "d_3^{4,2k+2}"] & E^{7,2k+4} \\
& 0 \arrow[r] & \Omega^{SU}_{2k-5} \arrow[r] & E^{1,2k-4} \arrow[u, "\cong"', "\cdot\theta^3"] \arrow[r, "d_3^{1,2k-4}"] & E^{4,2k-2} \arrow[u, "\cong"', "\cdot\theta^3"]
\end{tikzcd}$$

Её строки точны согласно предложению 5.6 и (5.2). Из коммутативности диаграммы мы имеем $\operatorname{Im} d_3^{1,2k} = \operatorname{Ker} d_3^{4,2k+2} \cong \operatorname{Ker} d_3^{1,2k-4} = \Omega^{SU}_{2k-5}$. Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \Omega^{SU}_{2k-1} \to E^{1,2k} \to \Omega^{SU}_{2k-5} \to 0.$$

Осталось заметить, что $E^{1,2k} = H_{2k-2}(\mathcal{W}_*, \partial)$. □

Замечание. Точная последовательность из леммы 5.9 есть производная точная последовательность 5-членной точной последовательности (0.1) из введения.

Гомологии комплекса $(\mathcal{W}_*, \partial)$ вычислены Коннером и Флойдом. По поводу связи этого вычисления со спектральной последовательностью Адамса–Новикова см. [**8**, §5].

Теорема 5.10 ([**22**, теорема 11.8]). *$H(\mathcal{W}_*, \partial)$ есть полиномиальная алгебра над $\mathbb{Z}_2$ следующего вида:*

$$H(\mathcal{W}_*, \partial) \cong \mathbb{Z}_2[\omega_2, \omega_{4k} \colon k \geqslant 2], \quad \deg\omega_2 = 4,\ \deg\omega_{4k} = 8k.$$

Замечание. Умножение в $H(\mathcal{W}_*, \partial)$ индуцировано умножением в Ω^U, см. раздел 6. Оно совпадает с умножением в члене E_2 спектральной последовательности Адамса–Новикова.

В итоге мы получаем следующую информацию о свободной части и кручении групп Ω^{SU}:

Теорема 5.11.

а) $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_n = 0$ *за исключением* $n = 8k+1$ *или* $8k+2$, *когда* $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_n$ *есть* $\mathbb{Z}_2$-*модуль размерности, равной количеству разбиений числа* k.

б) $\Omega^{SU}_{2i}/\operatorname{Tors}$ *изоморфно образу забывающего гомоморфизма* $\alpha\colon \Omega^{SU}_{2i} \to \Omega^U_{2i}$, *который равен* $\operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{W}_{2i} \to \mathcal{W}_{2i-2})$, *если* $2i \not\equiv 4 \mod 8$, *и* $\operatorname{Im}(\partial\colon \mathcal{W}_{2i} \to \mathcal{W}_{2i-2})$, *если* $2i \equiv 4 \mod 8$.

в) *Существуют классы* SU-*бордизмов* $w_{4k} \in \Omega^{SU}_{8k}$, $k \geqslant 1$ *такие, что любой элемент кручения из* Ω^{SU} *единственным образом представляется в виде* $P\cdot\theta$ *или* $P\cdot\theta^2$, *где* P — *многочлен от* w_{4k} *с коэффициентами равными* 0 *или* 1. *Элемент* $w_{4k} \in \Omega^{SU}_{8k}$ *определяется тем условием, что он представляет полиномиальную образующую* ω_{4k} *в* $H_{8k}(\mathcal{W}_*, \partial)$ *при* $k \geqslant 2$, *а* $w_4 \in \Omega^{SU}_8$ — *представляет* ω_2^2.

Замечание. Единственная неоднозначность в определении w_{4k} заключается в выборе ∂-цикла из $\mathcal{W}_{8k}$, представляющего полиномиальную образующую ω_{4k} или ω_2^2 из теоремы 5.10. Коль скоро выбраны представители $w_{4k} \in \mathcal{W}_{8k}$, они уже однозначно поднимаются до $w_{4k} \in \Omega^{SU}_{8k}$, так как забывающий гомоморфизм $\alpha\colon \Omega^{SU}_{8k} \to \mathcal{W}_{8k}$ есть мономорфизм на $\operatorname{Ker}\partial$ в размерности $8k$, согласно утверждениям а) и б).

Доказательство теоремы 5.11. Докажем пункт а). Из теоремы 5.10 следует, что $H_{q-2p}(\mathcal{W}_*) = 0$ кроме случаев $q-2p = 8k$ или $q-2p = 8k+4$. Сначала рассмотрим случай нечётного n. Лемма 5.9 даёт точную последовательность

$$0 \to \Omega^{SU}_{8k-1} \to H_{8k-2}(\mathcal{W}_*) \to \Omega^{SU}_{8k-5} \to 0,$$

из которой следует, что $\Omega^{SU}_{8k-1} = \Omega^{SU}_{8k-5} = 0$. Также мы имеем точную последовательность

$$0 \to \Omega^{SU}_{8k+1} \to H_{8k}(\mathcal{W}_*) \to \Omega^{SU}_{8k-3} \to 0,$$

которая расщепляется, так как $H(\mathcal{W}_*)$ является $\mathbb{Z}_2$-модулем. То есть, $\Omega^{SU}_{8k+1} \oplus \Omega^{SU}_{8k-3} \cong H_{8k}(\mathcal{W}_*) \cong H_{8k+4}(\mathcal{W}_*) \cong \Omega^{SU}_{8k+5} \oplus \Omega^{SU}_{8k+1}$. Следовательно, $\Omega^{SU}_{8k-3} = \Omega^{SU}_{8k+5}$. Так как это верно для всех k, мы получаем, что $\Omega^{SU}_{8k+5} = 0$. В итоге получаем, что единственной нетривиальной группой Ω^{SU}_n с нечётным n остаётся Ω^{SU}_{8k+1}, и лемма 5.9 даёт изоморфизм $\Omega^{SU}_{8k+1} \cong H_{8k}(\mathcal{W}_*)$. Теперь из теоремы 5.10 следует, что Ω^{SU}_{8k+1} — $\mathbb{Z}_2$-модуль размерности, равной числу разбиений k.

Для чётного $n = 2m$ теорема 5.8 даёт $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{2m} = \theta\Omega^{SU}_{2m-1}$. Согласно предыдущему абзацу, эта группа нетривиальна только при $2m = 8k+2$. Умножение на θ определяет изоморфизм

$$\Omega^{SU}_{8k+1} = E_\infty^{1,8k+2} \xrightarrow{\cdot\theta} E_\infty^{2,8k+4} = \operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+2}.$$

Это доказывает пункт а).

Для доказательства пункта б) напомним, что $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_q$ совпадает с ядром забывающего гомоморфизма $\Omega^{SU}_q \to \mathcal{W}_q$ по теореме 5.8 а), а сам забывающий гомоморфизм совпадает с краевым гомоморфизмом $h\colon \Omega^{SU}_q \to E_2^{0,q}$, согласно предложению 5.3 в). Следовательно, $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors} \cong \operatorname{Im} h$. Кроме того, $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker}(d_3\colon E_3^{0,*} \to E^{3,*+2})$ по предложению 5.6.

Тогда для $2i \neq 8k, 8k+4$ мы имеем

$$d_3(E^{0,2i}) = \theta^{-1}d_3(\theta E^{0,2i}) = \theta^{-1}d_3(E^{1,2i+2}) = 0$$

так как $E^{1,2i+2} = H_{2i}(\mathcal{W}_*) = 0$ по теореме 5.10. Следовательно, в этом случае получаем, что $\Omega^{SU}_{2i}/\operatorname{Tors} \cong \operatorname{Ker} d_3 = E^{0,2i} = \operatorname{Ker}\partial$.

Для $2i = 8k$ заметим, что

$$0 = \Omega^{SU}_{8k-3} = E_\infty^{1,8k-2} = \operatorname{Ker} d_3^{1,8k-2} \subset E^{1,8k-2}.$$

Отсюда получаем

$$0 = \operatorname{Ker}(d_3^{1,8k-2}\theta^{-2}) = \operatorname{Ker}(\theta^{-2}d_3^{3,8k+2}) = \operatorname{Ker} d_3^{3,8k+2}. \tag{5.4}$$

А значит, $\operatorname{Im} d_3^{0,8k} \subset \operatorname{Ker} d_3^{3,8k+2} = 0$, и $\Omega^{SU}_{8k}/\operatorname{Tors} \cong \operatorname{Ker} d_3^{0,8k} = E^{0,8k} = \operatorname{Ker}\partial$.

Осталось рассмотреть случай $2i = 8k+4$. Точная последовательность (5.3) даёт $\Omega^{SU}_{8k+2} = E_\infty^{0,8k+4}$, так как $E_\infty^{2,8k+6} \subset E^{2,8k+6} = H_{8k+2}(\mathcal{W}_*) = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{SU}_{8k+4} = E_\infty^{0,8k+4} \arrow[r] & E^{0,8k+4} \arrow[r, "d_3^{0,8k+4}"] \arrow[d, "\cdot\theta^3"] & E^{3,8k+6} \arrow[d, "\cdot\theta^3", "\cong"'] \\
 & 0 \arrow[r] & E^{3,8k+10} \arrow[r, "d_3^{3,8k+10}"] & E^{6,8k+12}
\end{tikzcd}$$

Точность нижней строки следует из (5.4). Из этой диаграммы получаем, что

$$\Omega^{SU}_{8k+4} \cong \operatorname{Ker} d_3^{0,8k+4} = \operatorname{Ker}(E^{0,8k+4} \xrightarrow{\cdot\theta^3} E^{3,8k+10}) = \operatorname{Ker}(E^{0,8k+4} \xrightarrow{\cdot\theta} E^{1,8k+6}) = \operatorname{Im}\partial,$$

где два последних равенства следуют из предложения 5.4. Это завершает доказательство пункта б).

Осталось доказать пункт в). Используя только что доказанный пункт б) и теорему 5.8 б), мы можем отождествить гомоморфизм $\Omega^{SU}_{8n} \xrightarrow{\cdot\theta} \Omega^{SU}_{8n+1}$ с проекцией $\operatorname{Ker}\partial \to \operatorname{Ker}\partial/\operatorname{Im}\partial = H_{8n}(\mathcal{W}_*)$. Возьмём тогда элемент $\alpha \in \Omega^{SU}_{8n+1}$ и запишем его, согласно теореме 5.10, в виде многочлена $P(\omega_{4k})$ от ω_{4k} с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$. (Чтобы не усложнять обозначения, здесь и далее в размерности 4 подразумевается ω_2^2 вместо несуществующего ω_4.) Выберем поднятия $w_{4k} \in \Omega^{SU}_{8k} = \operatorname{Ker}\partial \subset \mathcal{W}_{4k}$ классов ω_{4k}; тогда $a = P(w_{4k})$ отображается в α. Другими словами, $\alpha = P(w_{4k})\cdot\theta$, где теперь P понимается как многочлен с коэффициентами 0 и 1. Если $\alpha = Q(w_{4k})\cdot\theta$ для другого такого многочлена Q, то $P(\omega_{4k}) = Q(\omega_{4k})$, откуда следует, что $P = Q$, так как ω_{4k} алгебраически независимы над $\mathbb{Z}_2$ и оба многочлена P и Q имеют коэффициенты 0 и 1. В итоге, каждый элемент Ω^{SU}_{8k+1} единственным образом представляется в виде $P\cdot\theta$, что и утверждалось. Для элементов из $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+2}$ осталось всполнить, что $\Omega^{SU}_{8k+1} \xrightarrow{\cdot\theta} \operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+2}$ — изоморфизм. Это завершает доказательство теоремы. □

6. Кольцо $\mathcal{W}$

Теорема 5.11 б) связывает группу $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}$ с подгруппой $\operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}) = (\operatorname{Ker}\partial) \cap (\operatorname{Ker}\Delta)$ в Ω^U. Хотя $\mathcal{W} = \operatorname{Ker}\Delta$ *не является* подкольцом в Ω^U, существует умножение в $\mathcal{W}$, относительно которого включение $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors} \subset \mathcal{W}$ является кольцевым гомоморфизмом. Это приводит к описанию кольцевой структуры в $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}$. Мы рассмотрим здесь этот подход, следуя [**22**], [**54**] и [**50**].

Напомним определение геометрических операций $\partial\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-2}$ и $\Delta\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-4}$, см. (4.2).

Конструкция 6.1 (∂ и Δ, напоминание). Рассмотрим стабильно комплексное многообразие $M = M^{2n}$ с фундаментальным классом $[M^{2n}] \in H_{2n}(M;\mathbb{Z})$. Пусть $N = N^{2n-2}$ — стабильно комплексное подмногообразие, двойственное к когомологическому классу $c_1(M) = c_1(\det\mathcal{T}M)$. То есть, мы имеем включение

$$i\colon N^{2n-2} \hookrightarrow M^{2n} \quad \text{такое, что} \quad i_*([N]) = c_1(M) \frown [M] \quad \text{в } H_*(M;\mathbb{Z}).$$

Ограничение $\det\mathcal{T}M$ на N является нормальным расслоением $\nu(N \subset M)$. Стабильно комплексная структура на N определяется с помощью изоморфизма $\mathcal{T}M|_N \cong \mathcal{T}N \oplus \nu(N \subset M)$. Отсюда вытекает, что $c_1(N) = 0$, и значит, N является SU-многообразием.

Гомоморфизм $\partial = \Delta_{(1,0)}\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-2}$ отправляет класс бордизмов $[M]$ в класс бордизмов $[N]$, двойственный к $c_1(M)$, в описанном выше смысле. Эта операция корректно определена на классах бордизмов, так как $[N] = \varepsilon D_U(c_1^U(\det \mathcal{T}M))$, где $D_U\colon U^2(M) \to U_{2n-2}(M)$ — гомоморфизм двойственности Пуанкаре–Атья и $\varepsilon\colon U_{2n-2}(M) \to \Omega^U_{2n-2}$ — аугментация. Мы имеем $\partial^2 = 0$, так как $c_1(N) = 0$.

Аналогично, гомоморфизм $\Delta = \Delta_{(1,1)}\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-4}$ отображает класс бордизмов $[M]$ в класс бордизмов подмногообразия $L = L^{2n-4}$, двойственного к $\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}$. То есть, мы имеем

$$j\colon L^{2n-4} \hookrightarrow M^{2n} \quad \text{такое, что} \quad j_*([L]) = -c_1^2(M) \frown [M] \quad \text{в } H_*(M;\mathbb{Z}).$$

Введём также гомоморфизмы $\partial_k = \Delta_{(k,0)}\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-2k}$, отображающие класс бордизмов $[M]$ в класс бордизмов подмногообразия $[P]$, двойственного к $(\det \mathcal{T}M)^{\oplus k}$. Мы имеем $[P] = \varepsilon D_U(u^k)$, где $u = c_1^U(\det \mathcal{T}M)$.

Лемма 6.2. *Пусть $[M] \in \Omega^U$ — класс бордизмов, у которого равны нулю все числа Чженя, содержащие множитель c_1^k. Тогда $\partial_k[M] = 0$.*

Доказательство. Мы имеем $\partial_k[M] = [P]$, где $j\colon P \hookrightarrow M$ — такое подмногообразие, что

$$\mathcal{T}P \oplus j^*(\det \mathcal{T}M)^{\oplus k} = j^*(\mathcal{T}M).$$

Предположим, что $c_1^k c_\omega[M] = 0$ для всех ω. Мы должны показать, что $c_\omega[P] = 0$. Вычисляя полный класс Чженя расслоения выше, мы получаем

$$c(P)(1 + j^*c_1(M))^k = j^*c(M)$$

или

$$c(P) = j^*\left(\frac{c(M)}{(1 + c_1(M))^k}\right) = j^*\,\widetilde{c}(M),$$

где $\widetilde{c}(M)$ — некоторый многочлен от классов Чженя многообразия M. Тогда для любого $\omega = (i_1, \ldots, i_p)$ мы имеем

$$\bigl\langle c_\omega(P), [P]\bigr\rangle = \bigl\langle j^*\,\widetilde{c}_\omega(M), [P]\bigr\rangle = \bigl\langle \widetilde{c}_\omega(M), c_1^k(M) \frown [M]\bigr\rangle = \bigl\langle c_1^k\,\widetilde{c}_\omega(M), [M]\bigr\rangle = 0. \quad \square$$

Ранее мы определили группы $\mathcal{W}_{2n}$ как

$$\mathcal{W}_{2n} = \operatorname{Ker}(\Delta\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-4}).$$

Эти же группы могут быть определены в терминах характеристических чисел и геометрически, как описывается ниже. Когомологический класс $x \in H^2(M)$ называется *сферическим*, если $x = f^*(u)$ для некоторого отображения $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$, где $u = c_1(\bar\eta)$, и η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^1$.

Теорема 6.3. *Следующие три группы совпадают:*

а) *группа $\mathcal{W} = \operatorname{Ker} \Delta$;*
б) *подгруппа в Ω^U, состоящая из тех классов бордизмов, у которых равны нулю все характеристические числа Чженя, содержащие множитель c_1^2;*
в) *подгруппа в Ω^U, состоящая из классов бордизмов, представляемых многообразием со сферическим первым классом Чженя.*

Доказательство. Эквивалентность а) и б) была доказана в [**22**, (6.4)]. Мы приведём более прямое доказательство ниже. По определению $\Delta[M] = [L]$, где $j\colon L \hookrightarrow M$ — такое подмногообразие, что

$$\mathcal{T}L \oplus j^*\bigl(\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}\bigr) = j^*(\mathcal{T}M).$$

Вычислим классы Чженя:

$$c(L)(1 + j^*c_1(M))(1 - j^*c_1(M)) = j^*c(M),$$
$$c_i(L) - c_{i-2}(L) \cdot j^*c_1^2(M) = j^*c_i(M).$$

В частности, для $i=1$ мы получаем $c_1(L)=j^*c_1(M)$, так что мы можем переписать формулу выше в виде
$$(c_i-c_1^2c_{i-2})(L)=j^*c_i(M).$$
Для разбиения $\omega=(i_1,\ldots,i_p)$ и соответствующего класса Чженя $c_\omega=c_{i_1}\cdots c_{i_p}$ мы получаем следующее соотношение на характеристические числа:
$$\big\langle (c_{i_1}-c_1^2c_{i_1-2})\cdots(c_{i_p}-c_1^2c_{i_p-2})(L),[L]\big\rangle=\big\langle j^*c_\omega(M),[L]\big\rangle=\big\langle -c_1^2c_\omega(M),[M]\big\rangle$$
Теперь, если $\varDelta[M]=[L]=0$, то левая часть равенства выше равна нулю, и мы получаем из правой части, что каждое число Чженя многообразия M, содержащее множитель c_1^2, равно нулю.

Для доказательства противоположной импликации предположим, что $-c_1^2c_\omega[M]=0$ для всех ω. Мы должны показать, что $c_\omega[L]=0$. Это делается абсолютно аналогично доказательству леммы 6.2.

Эквивалентность а) и в) доказана в [**50**, Chapter VIII]. □

Следствие 6.4. *Если $[M]\in\mathcal{W}$, то $\partial_k[M]=0$ для всех $k\geqslant 2$.*

Доказательство. По теореме 6.3, из $[M]\in\mathcal{W}$ следует, что каждое число Чженя многообразия M, содержащее в качестве множителя c_1^2, равно нулю. Но тогда тем более равно нулю каждое число Чженя, содержащее множителем c_1^k для $k\geqslant 2$. Следовательно, по лемме 6.2, $\partial_k[M]=0$. □

Замечание. Для операции $\partial=\partial_1$, аналог эквивалентности а) и б) из теоремы 6.3 не имеет места. Точнее, согласно лемме 6.2, группа $\operatorname{Ker}\partial$ содержит подгруппу в $\varOmega^U$, состоящую из классов бордизмов, у которых равны нулю все числа Чженя, содержащие c_1. Но обратное включение неверно. Например, каждый элемент из $\varOmega^U_4$ лежит в $\operatorname{Ker}\partial$, но $c_1^2[\mathbb{C}P^2]\neq 0$. В действительности, подгруппа в $\varOmega^U$, состоящая из классов бордизмов, у которых равны нулю все числа Чженя, содержащие c_1, совпадает с пересечением $\operatorname{Ker}\partial\cap\operatorname{Ker}\varDelta$.

Из любого определения группы $\mathcal{W}_{2n}$ следует, что имеются забывающие гомоморфизмы $\varOmega^{SU}_{2n}\to\mathcal{W}_{2n}\to\varOmega^U_{2n}$, и корректно определено ограничение граничного гомоморфизма $\partial\colon\mathcal{W}_{2n}\to\mathcal{W}_{2n-2}$.

Лемма 6.5. *Для любых элементов $a,b\in\mathcal{W}$ выполнено*
$$\partial(a\cdot b)=a\cdot\partial b+\partial a\cdot b-[\mathbb{C}P^1]\cdot\partial a\cdot\partial b,$$
$$\varDelta(a\cdot b)=-2\partial a\cdot\partial b,$$
где $a\cdot b$ обозначает умножение в $\varOmega^U$.

Доказательство. Пусть $a=[M^{2m}]$ и $b=[N^{2n}]$ для некоторых стабильно комплексных многообразий. Тогда класс $\partial(a\cdot b)\in\varOmega^U_{2m+2n-2}$ представляется подмногообразием $X\subset M\times N$, двойственным к $c_1(M\times N)=x+y$, где $x=p_1^*c_1(M)$, $y=p_2^*c_1(M)$ и $p_1\colon M\times N\to M$, $p_2\colon M\times N\to N$ — проекции. Пусть $u,v\in U^2(M\times N)$ — геометрические кобордизмы, соответствующие x,y (см. конструкцию 1.6). Тогда мы имеем
$$\partial(a\cdot b)=[X]=\varepsilon D_U(u+_{H}v).$$
С другой стороны,
$$u+_{H}v=F_U(u,v)=u+v+\sum_{k\geqslant1,\,l\geqslant1}\alpha_{kl}\,u^kv^l.$$
Чтобы описать $\partial(a\cdot b)=[X]$, применим к обеим частям этого равенства εD_U. Мы имеем $\varepsilon D_U(u)=\partial a\cdot b$ (в качестве подмногообразия, двойственного к $p_1^*c_1(M)$ в $M\times N$, может быть взято прямое произведение подмногообразия, двойственного к $c_1(M)$ в M, и N). Аналогично, $\varepsilon D_U(v)=a\cdot\partial b$ и $\varepsilon D_U(uv)=\partial a\cdot\partial b$. Мы утверждаем, что

$\varepsilon D_U(u^k v^l) = 0$ при $k \geqslant 2$ или $l \geqslant 2$. Действительно, класс бордизмов $\varepsilon D_U(u^k v^l)$ представляется подмногообразием, двойственным в $M \times N$ к $p_1^*(\det \mathcal{T}M)^{\oplus k} \oplus p_2^*(\det \mathcal{T}N)^{\oplus l}$. Этот класс есть $\partial_k a \cdot \partial_l b$. Но так как $a, b \in \mathcal{W}$, согласно следствию 6.4 мы получаем, что либо $\partial_k a = 0$, либо $\partial_l b = 0$.

Отсюда следует первое равенство леммы, если заметить, что $\alpha_{11} = -[\mathbb{C}P^1]$ (см., например [**15**, теорема E.2.3]).

Что касается второго равенства, класс $\varDelta(a \cdot b) \in \varOmega^U_{2m+2n-4}$ представляется подмногообразием $L \subset M \times N$, двойственным к $-c_1^2(M \times N) = (x+y)(-x-y)$. Аналогично рассуждениям выше получаем

$$\varDelta(a \cdot b) = [L] = \varepsilon D_U\bigl(F_U(u,v)\overline{F_U(u,v)}\bigr) = \varepsilon D_U(-2uv) = -2\partial a \cdot \partial b. \qquad \square$$

Прямая сумма $\mathcal{W} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathcal{W}_{2i}$ *не является* подкольцом в $\varOmega^U$: мы имеем $[\mathbb{C}P^1] \in \mathcal{W}_2$, но $c_1^2[\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1] = 8 \neq 0$, и значит, $[\mathbb{C}P^1] \times [\mathbb{C}P^1] \notin \mathcal{W}_4$.

Кольцевая структура в $\mathcal{W}$ будет определена с использованием проектора $\rho\colon \varOmega^U \to \varOmega^U$, который описан ниже. Напомним, что в конструкции 4.2 была определена операция $\varPsi\colon \varOmega^U_{2n} \to \varOmega^U_{2n+4}$, являющаяся правой обратной к $\varDelta$.

Предложение 6.6. *Гомоморфизм* $\rho = \mathrm{id} - \varPsi\varDelta\colon \varOmega^U \to \varOmega^U$ *является проектором, для которого* $\operatorname{Im}\rho = \mathcal{W}$, $\operatorname{Ker}\rho = \varPsi(\varOmega^U)$ *и* $\partial\rho = \rho\partial = \partial$.

Доказательство. Соотношение $\varDelta\varPsi = \mathrm{id}$ из леммы 4.3 влечёт, что $(\mathrm{id} - \varPsi\varDelta)^2 = \mathrm{id} - \varPsi\varDelta$, то есть, ρ — проектор. Из этого же соотношения вытекает, что $\varDelta\rho = 0$, то есть, $\operatorname{Im}\rho \subset \operatorname{Ker}\varDelta = \mathcal{W}$. Включение же $\operatorname{Im}\rho \supset \operatorname{Ker}\varDelta$ очевидно. Равенство $\operatorname{Ker}\rho = \operatorname{Im}\varPsi$ доказывается аналогично. Наконец, $\partial(\mathrm{id} - \varPsi\varDelta) = \partial - \partial\varPsi\varDelta = \partial$ так как $\partial\varPsi = 0$, и $(\mathrm{id} - \varPsi\varDelta)\partial = \partial - \varPsi\varDelta\partial = \partial$ так как $\varDelta\partial = 0$. $\square$

Следствие 6.7. $\operatorname{rank}\mathcal{W}_{2n} = \operatorname{rank}\varOmega^U_{2n} - \operatorname{rank}\varOmega^U_{2n-4}$.

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что $\varOmega^U = \operatorname{Ker}\rho \oplus \operatorname{Im}\rho$. Мы имеем $(\operatorname{Im}\rho)_{2n} = \mathcal{W}_{2n}$ и $(\operatorname{Ker}\rho)_{2n} = \varPsi(\varOmega^U_{2n-4}) \cong \varOmega^U_{2n-4}$, поскольку $\varPsi$ инъективно (оно имеет левое обратное $\varDelta$). $\square$

Используя проектор $\rho = \mathrm{id} - \varPsi\varDelta$, определим *скрученное произведение* элементов $a, b \in \mathcal{W}$ как

$$a * b = \rho(a \cdot b),$$

где $\cdot$ обозначает умножение в $\varOmega^U$. Геометрическое описание этого умножения даётся следующим предложением.

Предложение 6.8. *Мы имеем*

$$a * b = a \cdot b + 2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b,$$

где V^4 *— многообразие* $\mathbb{C}P^2$ *со стабильно комплексной структурой* $\mathcal{T}\mathbb{C}P^2 \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \cong \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta$.

Доказательство. Мы должны проверить, что $\varPsi\varDelta(a \cdot b) = -2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b$. По лемме 6.5, $\varDelta(a \cdot b) = -2\partial a \cdot \partial b$. Напомним, что, согласно конструкции 4.2, $\varPsi[M]$ представляется многообразием $\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}M} \oplus \underline{\mathbb{C}}^2)$ со стабильно комплексной структурой $p^*\mathcal{T}M \oplus (\bar\eta \otimes p^*\overline{\det \mathcal{T}M}) \oplus \bar\eta \oplus \eta$. В нашем случае $[M] = -2\partial a \cdot \partial b$, и значит, расслоение $\det \mathcal{T}M$ тривиально. Следовательно, мы получаем, что класс бордизмов $\varPsi\varDelta(a \cdot b) = \varPsi[M]$ представляется тотальным пространством тривиального расслоения над M, слой которого — $\mathbb{C}P^2$ со стабильно комплексной структурой $\bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta$. Этот класс бордизмов есть в точности прямое произведение $[V^4] \cdot [M] = -2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b$, что и требовалось. $\square$

Замечание. Мы можем также взять $V^4 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^2$ со стандартной комплексной структурой, так как это многообразие бордантно тому, что описано в предложении 6.8.

Теорема 6.9. *Прямая сумма $\mathcal{W}=\bigoplus_{i\geqslant 0}\mathcal{W}_{2i}$ является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей относительно умножения $*$.*

Доказательство. Мы должны только проверить, что умножение $*$ ассоциативно. Это прямое вычисление с использованием формулы из предложения 6.8. □

Проектор $\rho=\mathrm{id}-\Psi\Delta$ был определён Коннером и Флойдом в [**22**, (8.4)] и использовался Новиковым [**40**, Замечание 5.3]. Стонг [**50**, Chapter VIII] ввёл другой проектор $\pi\colon\varOmega^U\to\varOmega^U$ с образом $\mathcal{W}$, определяемый геометрически следующим образом. Возьмём $[M]\in\varOmega^U$. Тогда $\pi[M]$ — класс бордизмов $[N]$ подмногообразия $N\subset\mathbb{C}P^1\times M$, двойственного к $\bar\eta\otimes\det\mathcal{T}M$. Из этого геометрического определения легко следует, что $c_1(\pi[M])$ является сферическим классом; таким образом доказывается эквивалентность утверждений а) и в) в теореме 6.3.

Используя проектор Стонга $\pi\colon\varOmega^U\to\mathcal{W}$ (под названием «проектор типа Коннера–Флойда»), Бухштабером [**11**] была определена комплексно-ориентированная теория когомологий с кольцом коэффициентов $\mathcal{W}$ и изучена соответствующая формальная группа. Общая алгебраическая теория проекторов типа Коннера–Флойда была развита в работе [**10**] и применена к задаче о классификации стабильных ассоциативных умножений в комплексных кобордизмах.

Оба проектора ρ и π имеют одинаковый образ $\mathcal{W}$ и совпадают на элементах вида $a\cdot b$ для $a,b\in\mathcal{W}$. Следовательно, они определяют одинаковое умножение в $\mathcal{W}$. Тем не менее, проекторы ρ и π *различаются*, так как имеют разные ядра. Действительно, рассмотрим $[M^6]=\Psi[\mathbb{C}P^1]$. Тогда $\rho[M^6]=0$, так как $[M^6]\in\operatorname{Im}\Psi=\operatorname{Ker}\rho$. С другой стороны, $\pi[M^6]\neq 0$, так как можно проверить, что $c_1^3[M^6]=-2$, $c_3[M^6]=2$ и $c_3(\pi[M^6])=(-c_1^3+c_3)[M^6]=4\neq 0$. Кроме того, например, $c_3(\rho[\mathbb{C}P^3])=68$, а $c_3(\pi[\mathbb{C}P^3])=-60$.

Напомним, что по теореме 1.5 класс бордизмов $[M^{2i}]\in\varOmega^U_{2i}$ можно взять в качестве полиномиальной образующей кольца $\varOmega^U$, только если $s_i[M^{2i}]=\pm m_i$, где числа m_i определены в (1.4). Аналогичное описание для кольца $\mathcal{W}$ даётся в следующей теореме.

Теорема 6.10. *$\mathcal{W}$ является полиномиальным кольцом с образующими в каждой положительной чётной размерности за исключением 4:*

$$\mathcal{W}\cong\mathbb{Z}[x_1,x_i\colon i\geqslant 3],\quad x_1=[\mathbb{C}P^1],\quad \deg x_i=2i.$$

Полиномиальные образующие x_i выделяются условием $s_i(x_i)=\pm m_i m_{i-1}$ для $i\geqslant 3$. Граничный оператор $\partial\colon\mathcal{W}\to\mathcal{W}$, $\partial^2=0$ удовлетворяет равенству

$$\partial(a*b)=a*\partial b+\partial a*b-x_1*\partial a*\partial b, \tag{6.1}$$

и полиномиальные образующие $\mathcal{W}$ можно выбрать так, что будет выполнено

$$\partial x_1=2,\quad \partial x_{2i}=x_{2i-1}.$$

Доказательство. Мы начнём с проверки равенства (6.1):

$$\partial(a*b)=\partial\rho(ab)=\partial(ab)=a\partial b+b\partial a-[\mathbb{C}P^1]\partial a\partial b=a*\partial b+b*\partial a-[\mathbb{C}P^1]*\partial a*\partial b.$$

Здесь второе равенство содержится в предложении 6.6, третье — в лемме 6.5, а последнее также следует из леммы 6.5, так как из равенства $\Delta(ab)=-2\partial a\partial b$ для $a,b\in\mathcal{W}$ вытекает, что ab лежит в $\mathcal{W}$, и следовательно, $a*b=ab$, если $a\in\operatorname{Im}\partial$ или $b\in\operatorname{Im}\partial$.

В оставшейся части доказательства мы будем обозначать произведение элементов в $\mathcal{W}$ через $a*b$ только если оно отличается от произведения в $\varOmega^U$; в противном случае мы будем обозначать его через $a\cdot b$ или просто ab.

Теперь перейдём к доказательству основного утверждения. Мы начнём с определения классов бордизмов $b_i \in \mathcal{W}_{2i}$ для всех $i \geqslant 1$, кроме $i = 2$. Положим

$$b_i = \begin{cases} [\mathbb{C}P^1], & \text{если } i = 1, \\ \pi[\mathbb{C}P^{2^p} \times \mathbb{C}P^{2^{p+1}q}], & \text{если } i = 2^p(2q+1),\ p \geqslant 1,\ q \geqslant 1, \\ \pi[\mathbb{C}P^{2^p} \times \mathbb{C}P^{2^p}], & \text{если } i = 2^{p+1},\ p \geqslant 1, \\ \partial\, b_{i+1}, & \text{если } i \text{ нечётно и } i \geqslant 3, \end{cases}$$

где $\pi\colon \varOmega^U \to \mathcal{W}$ — проектор Стонга, определённый выше. Можно проверить, что

$$\begin{aligned} &s_i(b_i) = 1 \mod 2, \quad \text{если } i \neq 2^k - 1,\ i \neq 2^k, \\ &s_i(b_i) = 2 \mod 4, \quad \text{если } i = 2^k - 1, \\ &s_i(b_i) = 2 \mod 4, \quad \text{если } i = 2^{p+1}, \\ &s_{(2^p,2^p)}(b_{2^{p+1}}) = 1 \mod 2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Рассмотрим включение $\iota\colon \mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}_2 \to \varOmega^U \otimes \mathbb{Z}_2$. Из формулы для умножения в $\mathcal{W}$ из предложения 6.8 следует, что ι является кольцевым гомоморфизмом. Из соотношений (6.2) вытекает, что существуют такие полиномиальные образующие a_i кольца $\varOmega^U \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[a_i\colon i \geqslant 1]$, что $\iota(b_i) = a_i$ для $i \neq 2^{p+1}$ и $\iota(b_{2^{p+1}}) = (a_{2^p})^2 + \cdots$, где $\cdots$ обозначает разложимые элементы, соответствующие разбиениям строго меньшим $(2^p, 2^p)$ в лексикографическом порядке. Отсюда следует, что элементы $\iota(b_i)$ алгебраически независимы в полиномиальном кольце $\varOmega^U \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[a_i\colon i \geqslant 1]$. Следовательно, $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}_2$ содержит полиномиальное подкольцо $\mathbb{Z}_2[b_1, b_i\colon i \geqslant 3]$. Из сравнения рангов с использованием следствия 6.7 мы заключаем, что

$$\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[b_1, b_i\colon i \geqslant 3].$$

Теперь заметим, что $s_i(b_i)$ является нечётнократным числу $m_i m_{i-1}$ для $i \geqslant 3$, то есть,

$$s_i(b_i) = (2q_i + 1) m_i m_{i-1}, \quad i \geqslant 3. \tag{6.3}$$

Для чётных i это следует из (6.2) и того факта, что $s_i(b_i)$ делится на m_i, см. теорему 1.5 б). Для нечётных i мы имеем $b_i = \partial b_{i+1}$, так что b_i представляется SU-многообразием, и (6.3) следует из (6.2) и предложения 2.2.

По теореме 2.1, существуют элементы $y_i \in \varOmega^{SU}_{2i}$, $i \geqslant 2$, такие, что

$$s_i(y_i) = 2^{k_i} m_i m_{i-1}, \quad k_i \geqslant 0. \tag{6.4}$$

Найдём теперь для целых чисел q_i из (6.3) и k_i из (6.4) такие целые β_i и γ_i, что

$$\beta_i 2^{k_i+1} + \gamma_i(2q_i + 1) = 1.$$

В этом случае γ_i обязательно нечётно, то есть $\gamma_i = 2\alpha_i + 1$ для некоторого целого α_i. Положим $x_1 = [\mathbb{C}P^1]$ и

$$x_i' = (2\alpha_i + 1) b_i + 2\beta_i y_i, \quad i \geqslant 3.$$

Тогда из вышесказанного вытекает, что $s_i(x_i') = m_i m_{i-1}$. Искомые элементы x_i получаются из x_i' следующей модификацией:

$$x_{2i-1} = x_{2i-1}', \quad x_{2i} = x_{2i}' - x_1\big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}) b_{2i-1} - \beta_{2i-1} y_{2i-1}\big).$$

Тогда мы по-прежнему имеем

$$s_i(x_i) = m_i m_{i-1}$$

так как элементы $x_i - x_i'$ разложимы. Новые элементы x_{2i} всё ещё лежат в $\mathcal{W}$; для проверки используем второе равенство из леммы 6.5:

$$\varDelta x_{2i} = \varDelta x_{2i}' + 2\partial x_1 \partial\big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}) b_{2i-1} - \beta_{2i-1} y_{2i-1}\big) = 0,$$

поскольку $x_{2i}' \in \mathcal{W} = \operatorname{Ker} \varDelta$, $\partial b_{2i-1} = \partial^2 b_{2i} = 0$ и $\partial y_{2i-1} = 0$, так как $y_{2i-1} \in \varOmega^{SU}$.

Чтобы проверить равенство $\partial x_{2i} = x_{2i-1}$, используем первое равенство из леммы 6.5:

$$\begin{aligned}\partial x_{2i} &= \partial x'_{2i} - \partial x_1 \cdot \big((\alpha_{2i}-\alpha_{2i-1})b_{2i-1} - \beta_{2i-1}y_{2i-1}\big) = (2\alpha_{2i}+1)\partial b_{2i}\\ &\quad - 2\big((\alpha_{2i}-\alpha_{2i-1})b_{2i-1} - \beta_{2i-1}y_{2i-1}\big) = (2\alpha_{2i-1}+1)b_{2i-1} + 2\beta_{2i-1}y_{2i-1} = x_{2i-1}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon \mathcal{R} = \mathbb{Z}[x_1, x_i\colon i \geqslant 3] \to \mathcal{W},$$

отправляющий полиномиальную образующую x_i в соответствующий элемент из $\mathcal{W}$, определённый выше. Заметим, что $\varphi \otimes \mathbb{Z}_2$ отправляет x_i в b_i по модулю разложимых элементов. Как мы видели, $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[b_1, b_i\colon i \geqslant 3]$, откуда следует, что $\varphi \otimes \mathbb{Z}_2$ — изоморфизм. Так как $\mathcal{R}$ и $\mathcal{W}$ состоят из свободных групп конечного ранга в каждой размерности, φ — инъективен, и $\varphi(\mathcal{R}_n) \subset \mathcal{W}_n$ является подгруппой конечного нечётного индекса в каждой размерности.

Теперь мы покажем, что $\varphi\colon \mathcal{R} \to \mathcal{W}$ становится сюръективным после тензорного умножения на $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Отсюда будет следовать, что φ — изоморфизм.

Заметим, что для любого $\alpha \in \mathcal{W}$ мы имеем

$$\partial(x_1 * \alpha) = \partial x_1 \cdot \alpha + x_1 \cdot \partial\alpha - x_1 \cdot \partial x_1 \cdot \partial\alpha = 2\alpha - x_1\partial\alpha.$$

Значит, $\alpha = \frac{1}{2}\partial(x_1 * \alpha) + \frac{1}{2}x_1\partial\alpha$ в $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Следовательно, $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ порождён 1 и x_1 как модуль над $\varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ (заметим, что $\varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ — подкольцо в $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, согласно формуле из предложения 6.8). Более того, этот модуль свободен, так как из $0 = a + x_1 b$, $a, b \in \varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ следует, что $0 = \partial(a + x_1 b) = \partial x_1 \cdot b = 2b$, и следовательно, $b = 0$ и $a = 0$. То есть,

$$\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] = \varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]\langle 1, x_1\rangle.$$

Рассмотрим теперь следующие элементы из $\varphi(\mathcal{R}) \subset \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned}&y_2 = 2x_1 * x_1 = \partial(x_1 * x_1 * x_1), &&\\ &y_{2i} = \partial(x_1 * x_{2i}) = 2x_{2i} - x_1 x_{2i-1}, && i \geqslant 2,\\ &y_{2i-1} = x_{2i-1} = \partial(x_{2i}), && i \geqslant 2.\end{aligned} \tag{6.5}$$

На самом деле эти элементы содержатся в $\varOmega^{SU}$, так как лежат в $\operatorname{Im}\partial$. Кроме того,

$$\begin{aligned}&s_2(y_2) = 2s_2(x_1 \cdot x_1 + 8[V^4]) = -16 s_2(\mathbb{C}P^2) = -48 = -8m_2m_1, &&\\ &s_{2i}(y_{2i}) = 2s_{2i}(x_{2i}) = 2m_{2i}m_{2i-1}, && i \geqslant 2,\\ &s_{2i-1}(y_{2i-1}) = s_{2i-1}(x_{2i-1}) = m_{2i-1}m_{2i-2}, && i \geqslant 2,\end{aligned} \tag{6.6}$$

и следовательно, y_i являются полиномиальными образующими кольца $\varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ по теореме 2.1. Отсюда получаем, что $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\langle 1, x_1\rangle \subset \varphi\big(\mathcal{R} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\big)$. То есть, $\varphi \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ является эпиморфизмом, что завершает доказательство. □

7. Кольцевая структура $\varOmega^{SU}$

Забывающий гомоморфизм $\alpha\colon \varOmega^{SU} \to \mathcal{W}$ является гомоморфизмом колец; это следует из предложения 6.8, так как $\partial\alpha(x) = 0$ для всех $x \in \varOmega^{SU}$. Следовательно, кольцо $\varOmega^{SU}/\mathrm{Tors}$ отождествляется с некоторым подкольцом в $\mathcal{W}$.

Заметим, что из теоремы 6.10 следует, что

$$\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][x_1, x_{2k-1}, 2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}\colon k \geqslant 2], \tag{7.1}$$

где $x_1^2 = x_1 * x_1$, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}$ для $k \geqslant 2$ являются ∂-циклами.

Для каждого целого числа $n \geqslant 3$ обозначим

$$g(n) = \begin{cases} 2m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n > 3 \text{ нечётно;} \\ m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n > 3 \text{ чётно;} \\ -48, & \text{если } n = 3. \end{cases} \tag{7.2}$$

Эти числа присутствуют в формулах (6.6). Например, $g(4) = 6$, $g(5) = 20$. Для $n > 3$ число $g(n)$ может принимать следующие значения: 1, 2, 4, p, $2p$, $4p$, где p — нечётное простое число.

Теорема 7.1. *Существуют неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$, $i \geqslant 2$, с минимальными s-числами $s_i(y_i) = g(i+1)$. Гомоморфизм забывания $\alpha\colon \Omega^{SU} \to \mathcal{W}$ отображает эти элементы следующим образом:*

$$y_2 \mapsto 2x_1^2, \quad y_{2k-1} \mapsto x_{2k-1}, \quad y_{2k} \mapsto 2x_{2k} - x_1x_{2k-1}, \quad k \geqslant 2,$$

где x_i — полиномиальные образующие кольца $\mathcal{W}$. В частности, кольцо $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12] \cong \mathbb{Z}[\frac12][y_i\colon i \geqslant 2]$ вкладывается в (7.1) в качестве полиномиального подкольца, порождённого элементами x_1^2, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$.

Доказательство. Элементы $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$ уже были определены в (6.5), и их s-числа даются формулами (6.6). Мы должны только проверить, что s-число элемента y_i является минимально возможным среди всех элементов из Ω^{SU}_{2i}.

Для y_{2k-1} число $m_{2k-1}m_{2k-2}$ является минимальным возможным среди всех элементов из $\mathcal{W}_{4k-2}$ по теореме 6.10, и следовательно, оно также минимально и для элементов из $\Omega^{SU}_{4k-2} \subset \mathcal{W}_{4k-2}$. (Заметим, что разложимость в $\mathcal{W}$ относительно умножения $*$ равносильна разложимости в Ω^U в размерностях > 4; это следует из предложения 6.8.)

Для $y_2 = 2x_1^2$ мы имеем $\Omega^{SU}_4 = \operatorname{Im}\partial = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle$, где $y_2 = 2K$ в обозначениях примера 5.7.

Рассмотрим теперь y_{2k} для $k \geqslant 2$. Мы имеем $s_{2k}(y_{2k}) = 2m_{2k}m_{2k-1}$. Возьмём любой элемент $a \in \Omega^{SU}_{4k} \subset (\operatorname{Ker}\partial)_{4k}$. Из (7.1) следует, что $\operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W})$ состоит из таких $\mathbb{Z}[\frac12]$-многочленов от x_1^2, x_{2i-1}, $2x_{2i} - x_1x_{2i-1}$, которые имеют целые коэффициенты как многочлены от переменных x_i. Запишем

$$a = \lambda(2x_{2k} - x_1x_{2k-1}) + b,$$

где $\lambda \in \mathbb{Z}[\frac12]$ и b — разложимый элемент из $\mathbb{Z}[\frac12][x_1^2, x_{2i-1}, 2x_{2i} - x_1x_{2i-1}]$. Тогда b не содержит слагаемого x_1x_{2k-1}, и следовательно, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Значит, $s_{2k}(a) = 2\lambda s_{2k}(x_{2k}) = \lambda \cdot 2m_{2k}m_{2k-1}$, и $2m_{2k}m_{2k-1}$ является минимальным возможным s-числом в Ω^{SU}_{4k}. □

Напомним, что согласно теореме 5.8 а) образ забывающего гомоморфизма $\alpha\colon \Omega^{SU} \to \mathcal{W}$ изоморфен $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}$. По теореме 5.11 б), $\Omega^{SU}_{2i}/\operatorname{Tors}$ изоморфно $\operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W})$ для $2i \not\equiv 4 \mod 8$ и изоморфно $\operatorname{Im}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W})$ для $2i \equiv 4 \mod 8$. Комбинируя это с теоремой 7.1, мы получаем описание $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}$ как подкольца в $\mathcal{W}$. Наконец, мультипликативная структура в кручении описывается теоремой 5.11 в). Собирая всю эту информацию вместе, мы, в принципе, получаем полное описание кольца Ω^{SU}. Однако, как замечено у Стонга в конце главы X в **[50]**, внутреннее строение этого кольца чрезвычайно сложно. Например, в размерностях $\leqslant 10$ мы имеем следующие нетривиальные градуированные компоненты кольца Ω^{SU}, описанные в терминах элементов x_i и y_i из теоремы 7.1:

$$\Omega^{SU}_0 = \mathbb{Z}, \quad \Omega^{SU}_1 = \mathbb{Z}_2\langle\theta\rangle, \quad \Omega^{SU}_2 = \mathbb{Z}_2\langle\theta^2\rangle,$$

$$\Omega^{SU}_4 = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle,\ y_2 = 2x_1^2, \quad \Omega^{SU}_6 = \mathbb{Z}\langle y_3\rangle,\ y_3 = x_3, \quad \Omega^{SU}_8 = \mathbb{Z}\langle \tfrac14 y_2^2, y_4\rangle,\ y_4 = 2x_4 - x_1x_3,$$

$$\Omega^{SU}_9 = \mathbb{Z}_2\langle\theta x_1^4\rangle, \quad \Omega^{SU}_{10} = \mathbb{Z}\langle \tfrac12 y_2y_3, y_5\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle\theta^2x_1^4\rangle,\ y_5 = x_5.$$

Мы имеем

$$y_2 = 2x_1^2 = 2\big(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\big)$$

как классы U-бордизмов. В размерности 8 мы имеем

$$\tfrac14 y_2^2 = x_1^4 = \big(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\big)\times\big(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\big)$$

как классы U-бордизмов, так как $x_1^2 = 9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1]-8[\mathbb{C}P^2]$ является ∂-циклом. Кроме того, элемент $\frac14 y_2^2 = x_1^4$ может быть также выбран в качестве w_4 в теореме 5.11 в). Мы видим, что 8 является первой размерностью, в которой $\Omega^{SU}/\mathrm{Tors}$ отличается от кольца полиномов, так как квадрат 4-мерной образующей y_2 делится на 4. Кроме того, произведение 4- и 6- мерных образующих делится на 2.

Часть II. Геометрические представители

8. Торические и квазиторические многообразия

В этом разделе приводятся необходимые сведения о торических и квазиторических многообразиях. Стандартными источниками по торической геометрии являются обзор Данилова [**24**], а также монографии Оды [**42**], Фултона [**26**] и Кокса, Литтла и Шенка [**23**]. Дальнейшие сведения о квазиторических многообразиях можно найти в [**15**, Глава 6].

Торическим многообразием называется нормальное комплексное алгебраическое многообразие V, содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ в качестве открытого по Зарисскому множества так, что естественное действие $(\mathbb{C}^\times)^n$ на себе продолжается до действия на всем V.

В торической геометрии имеется фундаментальное соответствие между классами изоморфизма комплексных n-мерных торических многообразий и рациональными веерами в $\mathbb{R}^n$. При этом соответствии

конуса	$\longleftrightarrow$	аффинные торические многообразия
полные веера	$\longleftrightarrow$	полные (компактные) торические многообразия
нормальные веера многогранников	$\longleftrightarrow$	проективные торические многообразия
неособые веера	$\longleftrightarrow$	неособые торические многообразия
симплициальные веера	$\longleftrightarrow$	торические орбиобразия

Веером называется конечный набор $\Sigma = \{\sigma_1,\dots,\sigma_s\}$ строго выпуклых конусов σ_i в $\mathbb{R}^n$ такой, что всякая грань конуса из Σ сама принадлежит Σ, и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Веер *рационален* (по отношению к стандартной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n\subset\mathbb{R}^n$), если каждый его конус порожден рациональными (или целочисленными) векторами. В частности, каждый одномерный конус рационального веера Σ порожден примитивным вектором $\boldsymbol{a}_i\in\mathbb{Z}^n$. Веер Σ называется *симплициальным*, если каждый его конус σ_j порожден частью базиса $\mathbb{R}^n$ (такой конус также называется *симплициальным*). Веер Σ называется *неособым*, если каждый его конус σ_j порожден частью базиса решетки $\mathbb{Z}^n$. Веер Σ называется *полным*, если объединение его конусов совпадает со всем $\mathbb{R}^n$.

Особенно важны для нас проективные торические многообразия. Проективное торическое многообразие V определяется *целочисленным многогранником*, то есть, выпуклым n-мерным многогранником P с вершинами в $\mathbb{Z}^n$. *Нормальным веером* Σ_P называется веер, n-мерные конуса которого σ_v соответствуют вершинам v многогранника P, и σ_v порожден направленными внутрь многогранника примитивными векторами нормалей к гиперграням P, сходящимся в вершине v. Веер Σ_P определяет проективное торическое многообразие V_P. Различные целочисленные многогранники с одинаковыми нормальными веерами задают разные проективные вложения одного и того же торического многообразия.

Многогранник P называется *неособым* или *дельзантовым*, если его нормальный веер Σ_P неособый. Неособые проективные торические многообразия соответствуют неособым целочисленным многогранникам. Заметим, что неособый n-мерный многогранник P обязательно является *простым*, т. е., в каждой вершине v многогранника P сходятся в точности n гиперграней.

Неприводимые тор-инвариантные дивизоры на V суть алгебраические торические подмногообразия в V комплексной коразмерности 1, соответствующие одномерным конусам веера Σ. Когда V проективно, они также отвечают гиперграням многогранника P. В дальнейшем мы предполагаем, что имеется m одномерных конусов (или гиперграней) и обозначаем соответствующие им примитивные векторы через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, а соответствующие подмногообразия коразмерности 1 (неприводимые дивизоры) через $D_1, \ldots, D_m$.

Теорема 8.1 (Данилов–Юркевич). *Пусть V — неособое торическое многообразие комплексной размерности n с полным неособым веером Σ. Тогда кольцо когомологий $H^*(V;\mathbb{Z})$ порождено двумерными классами v_i, двойственными к инвариантным подмногообразиям D_i, и имеет место изоморфизм*

$$H^*(V;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}, \qquad \deg v_i = 2,$$

где $\mathcal{I}$ — идеал, порожденный элементами следующих двух типов:

а) $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ *такие, что* $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}$ *не порождают конуса из* Σ*;*

б) $\sum_{i=1}^{m} \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle v_i$, *для любого вектора* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Имеется аналогичное описание кольца когомологий полного торического орбиобразия с коэффициентами в $\mathbb{Q}$.

Удобно рассматривать целочисленную $n \times m$-матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

столбцами которой являются векторы $\boldsymbol{a}_i$, записанные в стандартном базисе $\mathbb{Z}^n$. Тогда идеал в пункте б) теоремы 8.1 порожден n линейными формами $a_{j1}v_1 + \ldots + a_{jm}v_m$, соответствующими строкам матрицы Λ.

Далее под торическим многообразием мы будем подразумевать неособое полное (компактное) торическое многообразие.

Теорема 8.2. *Для торического многообразия V имеет место следующий изоморфизм комплексных векторных расслоений:*

$$\mathcal{T}V \oplus \underline{\mathbb{C}}^{m-n} \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m,$$

где $\mathcal{T}V$ обозначает касательное расслоение, $\underline{\mathbb{C}}^{m-n}$ есть тривиальное $(m-n)$-мерное расслоение, а ρ_i — линейное расслоение, соответствующее дивизору D_i, причем $c_1(\rho_i) = v_i$. В частности, полный класс Чженя многообразия V задается формулой

$$c(V) = (1 + v_1) \cdots (1 + v_m).$$

Пример 8.3. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является торическим мнообразием. Конуса соответствующего ему веера порождены собственными подмножествами множества из $m = n + 1$ векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, -\boldsymbol{e}_1 - \ldots - \boldsymbol{e}_n$, где $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{Z}^n$ есть i-й вектор стандартного базиса. Таким образом, мы получаем нормальный веер целочисленного симплекса Δ^n с вершинами в точках $\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$. Матрица (8.1) задается следующим образом

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&\ddots&0&\vdots\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

Теорема 8.1 описывает когомологии $\mathbb{C}P^n$ как

$$H^*(\mathbb{C}P^n)\cong\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_{n+1}]/(v_1\cdots v_{n+1},v_1-v_{n+1},\dots,v_n-v_{n+1})\cong\mathbb{Z}[v]/(v^{n+1}),$$

где за v можно принять любой из векторов v_i. Теорема 8.2 приводит нас к стандартному разложению

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P^n\oplus\underline{\mathbb{C}}\cong\bar\eta\oplus\ldots\oplus\bar\eta\qquad(n+1\text{ слагаемое}),$$

где $\eta=\mathcal{O}(-1)$ — *тавтологическое* (хопфовское) линейное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, а $\bar\eta=\mathcal{O}(1)$ есть его сопряженное, или расслоение гиперплоского сечения $\mathbb{C}P^{n-1}\subset\mathbb{C}P^n$.

Пример 8.4. Комплексная проективизация суммы линейных расслоений над проективным пространством является торическим многообразием. Этот пример будет использован нами в нескольких последующих конструкциях.

Пусть заданы два положительных целых числа n_1, n_2 и последовательность целых чисел $(i_1,\dots,i_{n_2})$. Рассмотрим проективизацию $V=\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1}\oplus\ldots\oplus\eta^{\otimes i_{n_2}}\oplus\underline{\mathbb{C}})$, где $\eta^{\otimes i}$ обозначает i-ю тензорную степень расслоения η над $\mathbb{C}P^{n_1}$, когда $i\geqslant0$, и i-ю тензорную степень сопряженного расслоения $\bar\eta$, иначе. Многообразие V является тотальным пространством расслоения над $\mathbb{C}P^{n_1}$ со слоем $\mathbb{C}P^{n_2}$. Оно также будет проективным торическим многообразием с соответствующей матрицей (8.1) вида

$$\begin{pmatrix}\overbrace{1\quad 0\quad 0}^{n_1}&-1&&&&\\0\quad\ddots\quad 0&\vdots&&\text{\Large 0}&&\\0\quad 0\quad 1&-1&&&&\\&i_1&1&0&0&-1\\\text{\Large 0}&\vdots&0&\ddots&0&\vdots\\&i_{n_2}&\underbrace{0}&\underbrace{0}_{n_2}&\underbrace{1}&-1\end{pmatrix}$$

Здесь многогранник P комбинаторно эквивалентен произведению двух симплексов $\Delta^{n_1}\times\Delta^{n_2}$. Теорема 8.1 описывает когомологии V как

$$H^*(V)\cong\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_{n_1+1},v_{n_1+2},\dots,v_{n_1+n_2+2}]/\mathcal{I},$$

где идеал $\mathcal{I}$ порожден элементами

$$v_1\cdots v_{n_1+1},\ v_{n_1+2}\cdots v_{n_1+n_2+2},\ v_1-v_{n_1+1},\dots,v_{n_1}-v_{n_1+1},$$
$$i_1v_{n_1+1}+v_{n_1+2}-v_{n_1+n_2+2},\dots,i_{n_2}v_{n_1+1}+v_{n_1+n_2+1}-v_{n_1+n_2+2}.$$

Другими словами,

$$H^*(V)\cong\mathbb{Z}[u,v]/\big(u^{n_1+1},v(v-i_1u)\cdots(v-i_{n_2}u)\big),\tag{8.2}$$

где $u=v_1=\ldots=v_{n_1+1}$ и $v=v_{n_1+n_2+2}$. Теорема 8.2 дает

$$c(V)=(1+u)^{n_1+1}(1+v-i_1u)\cdots(1+v-i_{n_2}u)(1+v).\tag{8.3}$$

Если $i_1=\ldots=i_{n_2}=0$, то мы получаем $V=\mathbb{C}P^{n_1}\times\mathbb{C}P^{n_2}$.

Та же информация может быть извлечена из следующего хорошо известного описания касательного расслоения и кольца когомологий комплексной проективизации.

Теорема 8.5 (Борель, Хирцебрух [**7**, §15]). *Пусть $p\colon \mathbb{C}P(\xi)\to X$ есть проективизация комплексного n-мерного расслоения ξ над комплексным многообразием X, и пусть γ обозначает тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$. Тогда имеется изоморфизм векторных расслоений*

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi)\oplus\underline{\mathbb{C}}\cong p^*\mathcal{T}X\oplus(\bar\gamma\otimes p^*\xi).$$

Более того, кольцо целочисленных когомологий $\mathbb{C}P(\xi)$ является факторкольцом кольца многочленов $H^*(X)[v]$ с одной образующей $v=c_1(\bar\gamma)$ и коэффициентами в $H^*(X)$ по единственному соотношению

$$v^n+c_1(\xi)v^{n-1}+\ldots+c_n(\xi)=0. \tag{8.4}$$

Соотношение, приведенное выше, равносильно тому, что $c_n(\bar\gamma\otimes p^*\xi)=0$.

Обращаясь к примеру 8.4, мы имеем расслоение $\xi=\eta^{\otimes i_1}\oplus\ldots\oplus\eta^{\otimes i_{n_2}}\oplus\underline{\mathbb{C}}$ над $X=\mathbb{C}P^{n_1}$. Имеем $H^*(X)=\mathbb{Z}[u]/(u^{n_1+1})$, где $u=c_1(\bar\eta)$, так что (8.4) принимает вид $v(v-i_1u)\cdots(v-i_{n_2}u)=0$, а кольцо $H^*(\mathbb{C}P(\xi))$, задаваемое теоремой 8.5, есть в точности (8.2). Далее, полный класс Чженя расслоения $p^*\mathcal{T}X\oplus(\bar\gamma\otimes p^*\xi)$ определяется по формуле (8.3).

Пространство орбит проективного торического многообразия V_P по действию компактного тора $T^n\subset(\mathbb{C}^\times)^n$ является простым многогранником P. Дэвис и Янушкиевич [**25**] ввели следующее топологическое понятие, обобщающее проективные торические многообразия.

Квазиторическим многообразием над простым n-мерным многогранником P называется гладкое многообразие M размерности $2n$ с локально стандартным действием тора T^n и непрерывной проекцией $\pi\colon M\to P$, слоями которой являются T^n-орбиты. (Действие T^n на M^{2n} называется *локально стандартным*, если каждая точка $x\in M^{2n}$ содержится в некоторой T^n-инвариантной окрестности, эквивариантно гомеоморфной открытому подмножеству в $\mathbb{C}^n$ со стандартным покоординатным действием тора T^n, подкрученным на автоморфизм тора.) Пространство орбит локально стандартного действия является многообразием с углами. Пространство орбит M/T^n квазиторического многообразия гомеоморфно, как многообразие с углами, многограннику P.

Не всякий простой многогранник может быть пространством орбит некоторого квазиторического многообразия. Тем не менее, квазиторические многообразия составляют намного более широкое семейство многобразий, чем проективные торические многообразия, а также обладают гораздо большей гибкостью, необходимой в топологических приложениях.

Обозначим через $F_1,\ldots,F_m$ гиперграни многогранника P, тогда каждое $M_i=\pi^{-1}(F_i)$ является квазиторическим подмногообразием в M коразмерности 2, называемым *характеристическим подмногообразием*. Характеристические подмногообразия $M_i\subset M$ — аналоги инвариантных дивизоров D_i на торическом многообразии V. Каждое M_i неподвижно под действием некоторой замкнутой одномерной подгруппы (окружности) $T_i\subset T^n$ и потому отвечает примитивному вектору $\lambda_i\in\mathbb{Z}^n$, определённому с точностью до знака. Выбор направления λ_i равносилен выбору ориентации нормального расслоения $\nu(M_i\subset M)$ или, эквивалентно, выбору ориентации подмногообразия M_i, если само M ориентировано. *Полиориентация* квазиторического многообразия M состоит из выбора ориентации M, а также всех характеристических подмногообразий M_i, $1\leqslant i\leqslant m$.

Векторы λ_i играют роль образующих $\boldsymbol{a}_i$ одномерных конусов веера, соответствующего торическому многообразию V (или нормальных векторов к гиперграням P, когда V проективно). Однако векторы λ_i необязательно являются нормалями к гиперграням многогранника P в общем случае.

Имеется аналог теоремы 8.1 для квазиторических многообразий:

Теорема 8.6. *Пусть M — полиориентированное квазиторическое многообразие размерности $2n$ над многогранником P. Кольцо когомологий $H^*(M;\mathbb{Z})$ порождено двумерными классами v_i, двойственными к ориентированным характеристическим подмногообразиям M_i, и задается изоморфизмом*

$$H^*(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/\mathcal{I}, \qquad \deg v_i = 2,$$

где $\mathcal{I}$ — идеал, порожденный элементами следующих двух типов:

а) $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$ *такие, что* $F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}=\varnothing$ *в* P;

б) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\langle\lambda_i,\boldsymbol{x}\rangle v_i$, *для всех* $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n$.

По аналогии с (8.1), мы рассматриваем целочисленную $n\times m$-матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

столбцами которой являются вектора λ_i, записанные в стандартном базисе $\mathbb{Z}^n$. Замена базиса решетки приводит к умножению матрицы Λ слева на матрицу из $GL(n,\mathbb{Z})$. Идеал в пункте б) теоремы 8.6 порожден n линейными формами $\lambda_{j1}v_1+\ldots+\lambda_{jm}v_m$, отвечающими строкам матрицы Λ. Кроме того, матрица Λ обладает свойством $\det(\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n})=\pm1$, когда соответствующие гиперграни $F_{i_1},\dots,F_{i_n}$ пересекаются в вершине многогранника P.

Имеет место также и аналог теоремы 8.2:

Теорема 8.7. *Для квазиторического многообразия M размерности $2n$ имеется изоморфизм вещественных векторных расслоений:*

$$\mathcal{T}M\oplus\underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)} \cong \rho_1\oplus\ldots\oplus\rho_m, \tag{8.6}$$

где ρ_i есть вещественное 2-мерное расслоение, отвечающее ориентации характеристического подмногообразия $M_i\subset M$, причем $\rho_i|_{M_i}=\nu(M_i\subset M)$.

Бухштабер и Рэй [**18**] ввели семейство проективных торических многообразий $\{B(n_1,n_2)\}$, которые мультипликативно порождают кольцо унитарных бордизмов Ω^U. Детали этой конструкции можно найти в [**15**, §9.1]. Далее мы опишем другое семейство торических образующих для Ω^U.

Конструкция 8.8. Пусть заданы два положительных целых числа n_1, n_2. Определим многообразие $L(n_1,n_2)$ как проективизацию $\mathbb{C}P(\eta\oplus\underline{\mathbb{C}}^{n_2})$, где η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^{n_1}$. Многообразие $L(n_1,n_2)$ является частным случаем многообразий, рассмотренных в примере 8.4, и значит, это проективное торическое многообразие, а соответствующая ему матрица (8.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad 0}^{n_1} & -1 & & & & \\ 0 \quad \ddots \quad 0 & \vdots & & & \text{\Large 0} & \\ 0 \quad 0 \quad 1 & -1 & & & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \text{\Large 0} & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & \underbrace{0 \quad 0}_{} & & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad n_2$$

Кольцо когомологий дается формулой

$$H^*\bigl(L(n_1,n_2)\bigr) \cong \mathbb{Z}[u,v]/\bigl(u^{n_1+1}, v^{n_2+1}-uv^{n_2}\bigr), \tag{8.8}$$

где $u^{n_1}v^{n_2}\langle L(n_1,n_2)\rangle = 1$. Имеется изоморфизм комплексных векторных расслоений

$$\mathcal{T}L(n_1,n_2)\oplus\underline{\mathbb{C}}^2 \cong \underbrace{p^*\bar\eta\oplus\ldots\oplus p^*\bar\eta}_{n_1+1}\oplus(\bar\gamma\otimes p^*\eta)\oplus\underbrace{\bar\gamma\oplus\ldots\oplus\bar\gamma}_{n_2}, \tag{8.9}$$

где γ обозначает тавтологическое линейное расслоение над $L(n_1,n_2)=\mathbb{C}P(\eta\oplus\underline{\mathbb{C}}^{n_2})$. Полный класс Чженя равен

$$c\bigl(L(n_1,n_2)\bigr) = (1+u)^{n_1+1}(1+v-u)(1+v)^{n_2}, \tag{8.10}$$

где $u = c_1(p^*\bar\eta)$ и $v = c_1(\bar\gamma)$. Положим также $L(n_1,0)=\mathbb{C}P^{n_1}$ и $L(0,n_2)=\mathbb{C}P^{n_2}$, равенства (8.8)–(8.10) по-прежнему будут верны.

Теорема 8.9 ([**31**, Теорема 3.8]). *Классы бордизмов $[L(n_1,n_2)]\in\Omega^U_{2(n_1+n_2)}$ мультипликативно порождают кольцо унитарных бордизмов Ω^U.*

Теорема 8.9 влечет, что всякий класс унитарных бордизмов представляется несвязным объединением произведений проективных торических многообразий. Произведение проективных торических многообразий снова является проективным торическим многообразием, а несвязные объединения — нет, поскольку торические многообразия связны. В теории бордизмов несвязное объединение может быть заменено на связную сумму, представляющую тот же класс бордизмов. Однако, связная сумма не является алгебраической операцией, и связная сумма двух алгебраических многообразий редко остается алгебраическим многообразием. Такое положение может быть исправлено путем перехода к квазиторическим многообразиям, как будет объяснено ниже. Напомним, что полиориентированное квазиторическое многообразие имеет вполне конкретную стабильно комплексную структуру, задаваемую с помощью изоморфизма из теоремы 8.7. Мы можем брать эквивариантные связные суммы квазиторических многообразий, как объясняется в работе Дэвиса и Янушкиевича [**25**], но получающаяся таким путем инвариантная стабильно комплексная структура не представляет сумму классов бордизмов исходных многообразий. Здесь необходима другая конструкция связной суммы, кратко описанная ниже. Детали этой конструкции можно найти в [**16**] и [**15**, §9.1].

Конструкция 8.10. Эта конструкция применяется к двум полиориентированным $2n$-мерным квазиторическим многообразиям M и M' над n-мерными многогранниками P и P', соответственно. Связная сумма берется в неподвижных точках M и M', отвечающих вершинам $v\in P$ и $v'\in P'$. Мы предполагаем, что v является пересечением первых n гиперграней многогранника P, то есть, $v=F_1\cap\dots\cap F_n$, и соответствующая характеристическая матрица (8.5) для M находится в *приведенной форме*, то есть,

$$\varLambda = (I\mid\varLambda_\star) \;=\; \begin{pmatrix}1&0&0&\lambda_{1,n+1}&\ldots&\lambda_{1,m}\\ 0&\ddots&0&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&1&\lambda_{n,n+1}&\ldots&\lambda_{n,m}\end{pmatrix}$$

где I обознает единичную матрицу, а $\varLambda_\star$ есть некоторая $n\times(m-n)$-матрица. Те же предположения делаются относительно M', P', v' и $\varLambda'$.

Следующий шаг зависит от *знаков* неподвижных точек, $\omega(v)$ и $\omega(v')$. Знак вершины v определяется полиориентацией; он равен $+1$, когда ориентация $\mathcal{T}_vM$, индуцированная глобальной ориентацией M, совпадает с ориентацией, приходящей из $\rho_1\oplus\ldots\oplus\rho_n|_v$, и равен -1, иначе.

Если $\omega(v)=-\omega(v')$, то мы берем связную сумму $M\,\#\,M'$ в v и v'. Получится квазиторическое многообразие над $P\#P'$ с характеристической матрицей $(\varLambda_\star\mid I\mid\varLambda'_\star)$.

Если $\omega(v)=\omega(v')$, то нам понадобится дополнительное связное слагаемое. Рассмотрим квазиторическое многообразие $S=S^2\times\ldots\times S^2$ над n-мерным кубом I^n, где каждое S^2 является квазиторическим многообразием над отрезком I с характеристической матрицей $(1\ 1)$. Оно представляет нуль в Ω^U и может быть отождествлено с $\mathbb{C}P^1$ со стабильно комплексной структурой, задаваемой изоморфизмом $\mathcal{T}\mathbb{C}P^1 \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \cong \bar{\eta} \oplus \eta$. Характеристическая матрица для S имеет вид $(I \mid I)$. Рассмотрим теперь связную сумму $M \# S \# M'$. Это квазиторическое многообразие над $P \# I^n \# P'$ с характеристической матрицей $(\Lambda_\star \mid I \mid I \mid \Lambda'_\star)$.

В каждом из этих случаев, получаемое полиориентированное квазиторическое многообразие $M \# M'$ или $M \# S \# M'$ с канонической стабильно комплексной структурой представляет сумму классов бордизма $[M] + [M'] \in \Omega^U_{2n}$.

Применяя приведённую выше конструкцию к любому из двух множеств торических образующих $\{B(n_1, n_2)\}$ или $\{L(n_1, n_2)\}$ кольца Ω^U, получаем следующий результат.

Теорема 8.11 ([**16**]). *В размерностях > 2 всякий класс унитарных бордизмов содержит квазиторическое многообразие, обязательно связное, стабильно комплексная структура на котором индуцируется полиориентацией, и потому согласована с действием тора.*

9. Квазиторические SU-многообразия

Полиориентированные квазиторические многообразия с SU структурой в стабильном касательном расслоении могут быть найдены с помощью следующего простого критерия.

Предложение 9.1 ([**17**]). *Полиориентированное квазиторическое многообразие M имеет $c_1(M) = 0$ тогда и только тогда, когда существует линейная функция $\varphi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ такая, что $\varphi(\lambda_i) = 1$ при $i = 1, \dots, m$. Здесь λ_i обозначают столбцы матрицы* (8.5).

В частности, если некоторые n векторов из $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ образуют стандартный базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, то M является SU-многообразием тогда и только тогда, когда суммы по столбцам матрицы Λ все равны 1.

Доказательство. По теореме 8.7, $c_1(M) = v_1 + \ldots + v_m$. По теореме 8.6, $v_1 + \ldots + v_m$ равно нулю в $H^2(M)$ тогда и только тогда, когда $v_1 + \ldots + v_m = \sum_i \varphi(\lambda_i) v_i$ для некоторой линейной функции $\varphi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, откуда и следует наше утверждение. $\square$

Предложение 9.2. *Торическое многообразие V не может быть SU-многообразием.*

Доказательство. Если $\varphi(\lambda_i) = 1$ для всех i, то векторы λ_i лежат в положительном полупространстве относительно линейной функции φ, и поэтому они не могут порождать полный веер. $\square$

Следующий более тонкий результат также исключает маломерные квазиторические многообразия.

Теорема 9.3 ([**17**, теорема 6.13]). *Квазиторическое SU-многообразие M^{2n} представляет 0 в Ω^U_{2n} при $n < 5$.*

Причина в том, что род Кричевера $\varphi_{\mathrm{K}}\colon \Omega^U \to R_{\mathrm{K}}$ (см. [**15**, §E.5]) обращается в нуль на квазиторических SU-многообразиях, однако φ_{K} является изоморфизмом в размерностях < 10.

Первые примеры квазиторических SU-многообразий, представляющих ненулевые классы бордизмов в Ω^U_{2n} для всех $n \geqslant 5$, кроме $n = 6$, были построены в [**32**]. Далее, в работе [**31**] были построены два семейства SU-многообразий, представляющих ненулевые классы бордизма в Ω^U_{2n} (а потому и в Ω^{SU}_{2n}) для всех $n \geqslant 5$, включая $n = 6$. Эти семейства определяются ниже. Они будут использованы нами для построения геометрических представителей мультипликативных образующих в кольце SU-бордизмов.

Конструкция 9.4. Пусть $n_1 = 2k_1$ положительное четное число, а $n_2 = 2k_2 + 1$ положительное нечетное число. Мы изменим стабильно комплексную структуру (8.9) на следующую:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{T}L(n_1, n_2) \oplus \underline{\mathbb{R}}^4 \cong \\
&\qquad \cong \underbrace{p^*\bar{\eta} \oplus p^*\eta \oplus \ldots \oplus p^*\bar{\eta} \oplus p^*\eta}_{2k_1} \oplus p^*\bar{\eta} \oplus (\bar{\gamma} \otimes p^*\eta) \oplus \underbrace{\bar{\gamma} \oplus \gamma \oplus \ldots \oplus \bar{\gamma} \oplus \gamma}_{2k_2} \oplus \gamma
\end{aligned}
$$

и обозначим полученное стабильно комплексное многообразие через $\widetilde{L}(n_1, n_2)$. Его кольцо когомологий задается той же формулой (8.8), однако

$$
c\bigl(\widetilde{L}(n_1, n_2)\bigr) = (1 - u^2)^{k_1}(1 + u)(1 + v - u)(1 - v^2)^{k_2}(1 - v), \tag{9.1}
$$

и поэтому $\widetilde{L}(n_1, n_2)$ является SU-многообразием размерности $2(n_1+n_2) = 4(k_1+k_2)+2$.

Рассматривая $L(n_1, n_2)$ как квазиторическое многообразие с полиориентацией, возникающей из комплексной структуры, мы видим, что замена линейного расслоения ρ_i из (8.6) на его сопряженное приводит к замене λ_i на $-\lambda_i$ в (8.5). Применяя эту операцию к соответствующим столбцам в (8.7), а затем умножая слева на подходящую матрицу из $GL(n, \mathbb{Z})$, мы получим, что $\widetilde{L}(n_1, n_2)$ есть полиориентированное квазиторическое многообразие над $\Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2}$ с характеристической матрицей

$$
\begin{pmatrix}
\overbrace{\begin{matrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{matrix}}^{n_1=2k_1} & \begin{matrix}1\\-1\\ \vdots\\1\\-1\end{matrix} & & \Large 0 \\
 & \begin{matrix}1\\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{n_2=2k_2+1} & \begin{matrix}1\\-1\\ \vdots\\1\end{matrix} \\
\Large 0 & & &
\end{pmatrix}
$$

Легко убедиться в том, что суммы по столбцам в этой матрице равны 1.

Конструкция 9.5. Предыдущая конструкция может быть итерирована с помощью перехода к проективизациям сумм линейных расслоений над $L(n_1, n_2)$. Нам понадобится только одно, конкретное семейство такого типа.

Для данных четного положительного $n_1 = 2k_1$ и нечетного положительного $n_2 = 2k_2 + 1$, рассмотрим полиориентированное квазиторическое многообразие $\widetilde{N}(n_1, n_2)$ над $\Delta^1 \times \Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2}$ с характеристической матрицей

$$
\begin{pmatrix}
\begin{matrix}1&1\end{matrix} & & & & \\
\Large 0 & \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{matrix}}_{n_1=2k_1} & \begin{matrix}1\\-1\\ \vdots\\1\\-1\end{matrix} & \Large 0 & \\
\begin{matrix}&-1\\&1\\&0\\&\\&\end{matrix} & \Large 0 & \begin{matrix}0\\0\\1\\ \\ \\ \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&1\end{matrix}}_{n_2=2k_2+1} & \begin{matrix}1\\-1\\1\\ \vdots\\1\end{matrix}
\end{pmatrix}
$$

Легко видеть, что все суммы по столбцам снова равны 1, а потому $\widetilde{N}(n_1,n_2)$ является квазиторическим SU-многообразием размерности $2(1+n_1+n_2)=4(k_1+k_2)+4$.

Можно проверить, что $\widetilde{N}(n_1,n_2)$ есть проективизация суммы n_2+1 линейных расслоений над $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^{n_1}$ с подправленной стабильно комплексной структурой.

Кольцо когомологий, получающееся по теореме 8.6, имеет вид

$$H^*(\widetilde{N}(n_1,n_2))\cong\mathbb{Z}[u,v,w]/\big(u^2,v^{n_1+1},(w-u)^2(v+w)w^{n_2-2}\big) \tag{9.2}$$

с $uv^{n_1}w^{n_2}\langle\widetilde{N}(n_1,n_2)\rangle=1$. Полный класс Чженя равен

$$c(\widetilde{N}(n_1,n_2))=(1-v^2)^{k_1}(1+v)(1-(w-u)^2)(1-v-w)(1-w^2)^{k_2-1}(1+w). \tag{9.3}$$

10. Квазиторические образующие в кольце SU-бордизмов

Как было показано в работе [**31**], элементы $y_i\in\varOmega_{2i}^{SU}$, описанные в теореме 7.1, могут быть представлены квазиторическими SU-многообразиями при $i\geqslant 5$. Здесь мы приводим набросок доказательства, обращая внимание на получающиеся интересные свойства делимости для биномиальных коэффициентов. Эти свойства делимости вытекают из анализа характеристических чисел квазиторических SU-многообразий $\widetilde{L}(n_1,n_2)$ и $\widetilde{N}(n_1,n_2)$, построенных в предыдущем разделе.

Лемма 10.1. *Для $n_1=2k_1>0$ и $n_2=2k_2+1>0$, мы имеем*

$$s_{n_1+n_2}\big[\widetilde{L}(n_1,n_2)\big]=-C^1_{n_1+n_2}+C^2_{n_1+n_2}-\ldots-C^{n_1-1}_{n_1+n_2}+C^{n_1}_{n_1+n_2}.$$

Доказательство. Применяя (9.1) и (8.8), вычисляем

$$\begin{aligned}s_{n_1+n_2}\big(\widetilde{L}(n_1,n_2)\big)&=(v-u)^{n_1+n_2}+(k_2+1)(-1)^{n_1+n_2}v^{n_1+n_2}+k_2v^{n_1+n_2}=\\&=(v-u)^{n_1+n_2}-v^{n_1+n_2}=\\&=\Big(-C^1_{n_1+n_2}+C^2_{n_1+n_2}-\cdots-C^{n_1-1}_{n_1+n_2}+C^{n_1}_{n_1+n_2}\Big)u^{n_1}v^{n_2},\end{aligned}$$

и искомая формула получается как значение на фундаментальном классе многообразия $\widetilde{L}(n_1,n_2)$. □

Заметим, что $s_3(\widetilde{L}(2,1))=0$ в соответствии с теоремой 9.3. С другой стороны, $s_{2+n_2}(\widetilde{L}(2,n_2))\neq 0$ при $n_2>1$, давая тем самым пример квазиторического SU-многообразия, не являющегося границей, в каждой размерности $4k+2$ при $k>1$.

Лемма 10.2. *При $k>1$ существует линейная комбинация y_{2k+1} классов SU-бордизма $[\widetilde{L}(n_1,n_2)]$ с $n_1+n_2=2k+1$ такая, что $s_{2k+1}(y_{2k+1})=m_{2k+1}m_{2k}$.*

Доказательство. По предыдущей лемме,

$$s_{n_1+n_2}\big[\widetilde{L}(n_1,n_2)-\widetilde{L}(n_1-2,n_2+2)\big]=C^{n_1}_{n_1+n_2}-C^{n_1-1}_{n_1+n_2}.$$

Искомый результат вытекает из следующей леммы. □

Лемма 10.3 ([**31**, Лемма 4.14]). *Для каждого целого числа $k>1$, имеем*

$$\text{н.о.д.}\,\big\{C^{2i}_{2k+1}-C^{2i-1}_{2k+1},\ 0<i\leqslant k\big\}=m_{2k+1}m_{2k}.$$

Лемма 10.3 также следует из результатов Бухштабера и Устинова о кольцах коэффициентов универсальных формальных групп [**19**, §9].

Теперь мы обратимся к многообразиям $\widetilde{N}(n_1,n_2)$ из конструкции 9.5.

Лемма 10.4. *Для $n_1=2k_1>0$ и $n_2=2k_2+1>0$, положим $n=n_1+n_2+1$, так что $\dim\widetilde{N}(n_1,n_2)=2n=4(k_1+k_2+1)$. Тогда*

$$s_n\big[\widetilde{N}(n_1,n_2)\big]=2\big(-C^1_n+C^2_n-\ldots-C^{n_1-1}_n+C^{n_1}_n-n_1\big).$$

Доказательство. Применяя (9.3) и (9.2), вычисляем

$$\begin{aligned}(10.1)\quad s_n\bigl(\widetilde{N}(n_1,n_2)\bigr) &= 2(w-u)^n+(v+w)^n+(2k_2-1)w^n=\\ &=2w^n-2nuw^{n-1}+w^n+C_n^1vw^{n-1}+\ldots+C_n^{2k_1}v^{2k_1}w^{2k_2+2}+(2k_2-1)w^n=\\ &=-2nuw^{n-1}+(n-n_1)w^n+C_n^1vw^{n-1}+\ldots+C_n^{n_1}v^{n_1}w^{n-n_1}.\end{aligned}$$

Теперь мы должны выразить каждый моном в формуле выше через $uv^{n_1}w^{n_2}$, пользуясь равенствами (9.2), а именно

$$(10.2)\qquad u^2=0,\quad v^{n_1+1}=0,\quad w^{n_2+1}=2uw^{n_2}-vw^{n_2}+2uvw^{n_2-1}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}(10.3)\quad uw^{n-1}&=uw^{n_1-1}w^{n_2+1}=uw^{n_1-1}(2uw^{n_2}-vw^{n_2}+2uvw^{n_2-1})=\\ &=-uvw^{n-2}=\ldots=(-1)^juv^jw^{n-j-1}=\ldots=uv^{n_1}w^{n_2}.\end{aligned}$$

Мы также покажем, что

$$(10.4)\qquad v^jw^{n-j}=(-1)^j2uv^{n_1}w^{n_2},\quad 0\leqslant j\leqslant n_1,$$

проверяя это равенство последовательно для $j=n_1,n_1-1,\ldots,0$. В самом деле, $v^{n_1}w^{n-n_1}=v^{n_1}w^{n_2+1}=2uv^{n_1}w^{n_2}$ в силу (10.2). Теперь, мы имеем

$$\begin{aligned}v^{j-1}w^{n-j+1}&=v^{j-1}w^{n_1+1-j}w^{n_2+1}=v^{j-1}w^{n_1+1-j}(2uw^{n_2}-vw^{n_2}+2uvw^{n_2-1})=\\ &=2uv^{j-1}w^{n-j}-v^jw^{n-j}+2uv^jw^{n-1-j}=-v^jw^{n-j},\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из (10.3). Равенство (10.4), тем самым, полностью проверено. Подставляя (10.3) и (10.4) в (10.1), получим

$$s_n\bigl(\widetilde{N}(n_1,n_2)\bigr)=\bigl(-2n+2(n-n_1)-2C_n^1+2C_n^2-\ldots-2C_n^{n_1-1}+2C_n^{n_1}\bigr)uv^{n_1}w^{n_2}.$$

Искомая формула получается как значение на фундаментальном классе $\langle\widetilde{N}(n_1,n_2)\rangle$. □

Заметим, что $s_4(\widetilde{N}(2,1))=0$, в соответствии с теоремой 9.3. С другой стороны, $s_n(\widetilde{N}(2,n_2))=n^2-3n-4>0$ при $n>4$, давая тем самым пример квазиторического SU-многообразия, не являющегося границей, в каждой размерности $4k$ с $k>2$. Сюда входит пример 12-мерного квазиторического SU-многообразия $\widetilde{N}(2,3)$, отсутствовавший в работе [**32**].

Лемма 10.5. *При $k>2$ существует линейная комбинация y_{2k} классов SU-бордизма $[\widetilde{N}(n_1,n_2)]$ с $n_1+n_2+1=2k$ такая, что $s_{2k}(y_{2k})=2m_{2k}m_{2k-1}$.*

Доказательство. Результат вытекает из леммы 10.4 и лемм 10.6, 10.7, см. ниже. □

Лемма 10.6 ([**31**, Лемма 4.17]). *При $k>2$ максимальная степень числа 2, которая делит каждое из чисел*

$$a_i=-C_{2k}^1+C_{2k}^2-\ldots-C_{2k}^{2i-1}+C_{2k}^{2i}-2i,\quad 0<i<k,$$

равна 2, если $2k=2^s$, и равна 1, иначе.

Лемма 10.7 ([**31**, Лемма 4.18]). *При $k>2$ максимальная степень нечетного простого числа p, которая делит каждое из чисел*

$$a_i=-C_{2k}^1+C_{2k}^2+\ldots-C_{2k}^{2i-1}+C_{2k}^{2i}-2i,\quad 0<i<k,$$

равна p, если $2k+1=p^s$, и равна 1, иначе.

Теперь мы получаем следующий результат о квазиторических представителях в кольце SU-бордизмов:

Теорема 10.8. *Существуют квазиторические SU-многообразия M^{2i}, $i \geqslant 5$, с $s_i(M^{2i}) = m_i m_{i-1}$, если i нечетно, и $s_i(M^{2i}) = 2m_i m_{i-1}$, если i четно. Эти квазиторические SU-многообразия имеют минимально возможные характеристические числа s_i и представляют полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.*

Доказательство. Применяя леммы 10.2 и 10.5, мы получаем, что существуют линейные комбинации классов SU-бордизмов, представлящихся квазиторическими SU-многообразиями, с требуемыми свойствами. Заметим, что применение конструкции 8.10 к двум квазиторическим SU-многообразиям M и M' дает квазиторическое SU-многообразие, представляющее их сумму в бордизмах. Далее, класс SU-бордизма $-[M]$ может быть представлен полиориентированным квазиторическим SU-многообразием, получаемым обращением глобальной ориентации у M. Таким образом, мы можем заменить линейные комбинации, получаемые из лемм 10.2 и 10.5, на связные суммы, которые будут квазиторическими SU-многообразиями. □

По аналогии с теоремой 8.11, мы можем поставить следующую проблему:

Вопрос 10.9. *Какие классы SU-бордизма в размерностях > 8 могут быть представлены квазиторическими SU-многообразиями?*

11. SU-многообразия, возникающие в торической геометрии

Мы называем компактное кэлерово многообразие M с $c_1(M) = 0$ *многообразием Калаби–Яу*. (По-видимому, это наиболее стандартное определение; однако в литературе встречаются и другие определения многообразий Калаби–Яу, иногда неэквивалентные приведённому выше.) По теореме Яу, доказывающей гипотезу Калаби, многообразия Калаби–Яу допускают Риччи-плоскую кэлерову метрику (для этого достаточно обращения в нуль *вещественного* первого класса Чженя). По определению, многообразие Калаби–Яу является SU-многообразием.

Напомним, что наши торические многообразия являются полными и неособыми, если не оговорено противное. Стандартная комплексная структура на торическом многообразии не может быть SU-структурой (предложение 9.2), поэтому среди торических многообразий нет многообразий Калаби–Яу. Однако следующая конструкция дает гиперповерхности Калаби–Яу в торических многообразия специального вида.

Конструкция 11.1 (Батырев [**6**]). Торическое многообразие V называется *многообразием Фано*, если его антиканонический класс $D_1 + \ldots + D_m$ (представляющий $c_1(V)$) является очень обильным. В геометрических терминах, проективное вложение $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, отвечающее дивизору $D_1 + \ldots + D_m$, приходит из целочисленного многогранника P, в котором расстояние по решетке от 0 до каждой гиперплоскости, содержащей гипергрань, равно 1. Такой многогранник P называется *рефлексивным*; его двойственный многогранник P^* также является целочисленным.

Подмногообразие N, двойственное к первому классу Чженя $c_1(V)$ (см. конструкцию 6.1), задается как гиперплоское сечение вложения $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, определяемого дивизором $D_1 + \cdots + D_m$. Поэтому $N \subset V$ является гладкой алгебраической гиперповерхностью в V, так что N — многообразие Калаби–Яу комплексной размерности $n-1$.

Таким образом, по любому торическому многообразию Фано V размерности n (или, эквивалентно, по любому неособому рефлексивному n-мерному многограннику P) можно построить каноническое $(n-1)$-мерное Калаби–Яу многообразие N_P.

Батырев [**6**] обобщил эту конструкцию на некоторые особые торические многообразия Фано. Комплексное нормальное неприводимое n-мерное проективное алгебраическое многообразие W, имеющее только канонические горенштейновы особенности, называется *алгебраическим многообразием Калаби–Яу*, если W имеет тривиальное каноническое расслоение и $H^i(W, \mathcal{O}_W) = 0$ при $0 < i < n$.

Обозначим через f многочлен Лорана от n переменных, и пусть $P = P(f)$ — его многогранник Ньютона (выпуклая оболочка точек решетки, соответствующих мономам из f). Тогда f определяет аффинную гиперповерхность Z_f в алгебраическом торе $(\mathbb{C}^\times)^n$, а её замыкание в топологии Зарисского $\overline{Z}_{f,P}$ — гиперповерхность в проективном торическом многообразии V_P. Гиперповерхность $\overline{Z}_{f,P}$ называется *P-регулярной*, если она пересекает каждое подмногообразие, соответствующее грани многогранника P, по подмногообразию коразмерности 1 (в частности, оно не пересекает точки, неподвижные относительно действия тора). В силу [**6**, теорема 4.1.9], следующие условия эквивалентны для P-регулярной гиперповерхности $\overline{Z}_{f,P}$:

а) $\overline{Z}_{f,P}$ является алгебраическим многообразием Калаби–Яу с каноническими особенностями;
б) V_P является торическим многообразием Фано с горенштейновыми особенностями;
в) P является рефлексивным многогранником (с точностью до параллельного переноса).

Более того, согласно [**6**, теорема 4.2.2], существует специальное разрешение особенностей $\widehat{Z}_{f,P} \to \overline{Z}_{f,P}$ (тороидальная MPCP-десингуляризация) такое, что $\widehat{Z}_{f,P}$ является алгебраическим многообразием Калаби–Яу с особенностями в коразмерности $\geqslant 4$. В частности, если $\dim P \leqslant 4$, то мы получаем гладкое многообразие Калаби–Яу. Это привело к построению семейства *зеркально-двойственных* пар трехмерных многообразий Калаби–Яу, возникающих из рефлексивных 4-мерных многогранников и их двойственных многогранников.

Характеристические s-числа многообразий Калаби–Яу $N = N_P$ задаются следующим образом.

Лемма 11.2. *Имеет место формула*

$$s_{n-1}(N) = \big\langle (v_1 + \ldots + v_m)(v_1^{n-1} + \ldots + v_m^{n-1}) - (v_1 + \ldots + v_m)^n, [V] \big\rangle.$$

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмом комплексных векторных расслоений $\mathcal{T}N \oplus \nu \cong i^*\mathcal{T}V$, где ν — нормальное расслоение вложения $i\colon N \hookrightarrow V$. Поэтому $s_{n-1}(\mathcal{T}N) + s_{n-1}(\nu) = i^* s_{n-1}(\mathcal{T}V)$, и мы получаем

$$\begin{aligned}\big\langle s_{n-1}(\mathcal{T}N), [N] \big\rangle = \big\langle -s_{n-1}(\nu) + i^* s_{n-1}(\mathcal{T}V), [N] \big\rangle = \\ = \big\langle c_1(\mathcal{T}V)\big(-c_1^{n-1}(\mathcal{T}V) + s_{n-1}(\mathcal{T}V)\big), [V] \big\rangle = \\ = \big\langle c_1(\mathcal{T}V) s_{n-1}(\mathcal{T}V) - c_1^n(\mathcal{T}V), [V] \big\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

12. Образующие Калаби–Яу в кольце SU-бордизмов

В работе [**30**] было построено семейство многообразий Калаби–Яу, классы бордизмов которых порождают кольцо специальных унитарных бордизмов с обращенной двойкой $\Omega^{SU}[\frac12] \cong \mathbb{Z}[\frac12][y_i\colon i \geqslant 2]$. Ниже мы описываем эту конструкцию.

Обозначим через $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ неупорядоченное разбиение числа n в сумму k положительных целых чисел, то есть, $i_1 + \ldots + i_k = n$. Пусть Δ^i — стандартный рефлексивный симплекс размерности i. Тогда $P_\omega = \Delta^{i_1} \times \ldots \times \Delta^{i_k}$ есть рефлексивный многогранник, соответствующий торическому многообразию Фано $\mathbb{C}P^\omega = \mathbb{C}P^{i_1} \times \ldots \times \mathbb{C}P^{i_k}$. Обозначим через N_ω гиперповерхность Калаби–Яу в $\mathbb{C}P^\omega$, получаемую применением конструкции 11.1.

Пусть $\widehat{P}(n)$ — множество всех разбиений ω числа n на слагаемые, не превосходящие $n-2$. Таким образом,

$$\widehat{P}(n) = \{\omega = (i_1, \ldots, i_k)\colon i_1 + \ldots + i_k = n, \quad \omega \neq (n), (1, n-1).\}$$

Для каждого $\omega=(i_1,\ldots,i_k)$ определён мультиномиальный коэффициент $C_n^\omega=\frac{n!}{i_1!\cdots i_k!}$. Положим

$$\alpha(\omega)=C_n^\omega(i_1+1)^{i_1}\cdots(i_k+1)^{i_k}. \tag{12.1}$$

Лемма 12.1. *Для любого $\omega\in\widehat{P}(n)$ имеет место равенство*

$$s_{n-1}(N_\omega)=-\alpha(\omega).$$

Доказательство. Кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P^\omega=\mathbb{C}P^{i_1}\times\ldots\times\mathbb{C}P^{i_k}$ задается изоморфизмом

$$H^*(\mathbb{C}P^\omega;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[u_1,\ldots,u_k]/(u_1^{i_1+1},\ldots,u_k^{i_k+1}),$$

где $u_1:=v_1=\ldots=v_{i_1+1}$, $u_2:=v_{i_1+2}=\ldots=v_{i_1+i_2+2}$, $\ldots$, $u_k:=v_{i_1+\ldots+i_{k-1}+k}=\ldots=v_{i_1+\cdots+i_k+k}=v_m$. Поскольку $\omega\in\widehat{P}(n)$, мы имеем $v_i^{n-1}=0$ в кольце $H^*(\mathbb{C}P^\omega;\mathbb{Z})$ для любого i. Формула из леммы 11.2 дает

$$s_{n-1}(N_\omega)=-\langle(v_1+\ldots+v_m)^n,[\mathbb{C}P^\omega]\rangle=-\langle((i_1+1)u_1+\ldots+(i_k+1)u_k)^n,[\mathbb{C}P^\omega]\rangle.$$

Значение на фундаментальном классе $[\mathbb{C}P^\omega]$ равно коэффициенту при мономе $u_1^{i_1}\cdots u_k^{i_k}$, откуда следует доказываемое утверждение. □

Лемма 12.2 ([**30**, Лемма 2.3]). *При $n\geqslant 3$ имеет место соотношение*

$$\underset{\omega\in\widehat{P}(n)}{\text{н.о.д.}}\ \alpha(\omega)=g(n),$$

в котором числа $g(n)$ и $\alpha(\omega)$ задаются по формулам (7.2) *и* (12.1) *соответственно.*

Доказательство этой леммы использует результаты Мосли [**36**] о делимости мультиномиальных коэффициентов.

Теорема 12.3. *Классы SU-бордизмов гиперповерхностей Калаби–Яу N_ω в торических многообразиях $\mathbb{C}P^{i_1}\times\ldots\times\mathbb{C}P^{i_k}$ с $\omega\in\widehat{P}(n)$, $n\geqslant 3$, мультипликативно порождают кольцо SU-бордизмов $\Omega^{SU}[\frac12]$.*

Доказательство. Для любого $n\geqslant 3$ леммы 12.1 и 12.2 дают нам линейную комбинацию классов бордизмов $[N_\omega]\in\Omega^{SU}_{2n-2}$, характеристическое s-число которой равно $g(n)$. Такая линейная комбинация даёт полиномиальную образующую y_{n-1} в кольце $\Omega^{SU}[\frac12]$, описанную в теореме 7.1. □

На самом деле, мы доказали *целочисленный* результат: элементы $y_i\in\Omega^{SU}$, описанные в теореме 7.1, могут быть представлены целочисленными линейными комбинациями классов бордизмов многобразий Калаби–Яу N_ω. Элемент y_i является частью базиса абелевой группы Ω^{SU}_{2i}. Возникает следующий вопрос.

Вопрос 12.4. *Какие классы бордизмов из Ω^{SU} могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу?*

Этот вопрос является SU-аналогом следующей хорошо известной проблемы Хирцебруха: какие классы бордизмов в Ω^U содержат связные (то есть, неприводимые) неособые алгебраические многообразия? Если опустить условие связности, то всякий класс U-бордизма положительной размерности представим алгебраическим многообразием. Поскольку произведение и линейная комбинация с положительными коэффициентами алгебраических классов суть алгебраические классы (возможно, несвязные), необходимо лишь найти в каждой размерности i алгебраические многообразия M и N с $s_i(M)=m_i$ и $s_i(N)=-m_i$, см. Теорему 1.5. Соответствующее рассуждение, принадлежащее Милнору, приводится в [**50**, p. 130]. Отметим, что оно использует гиперповерхности в $\mathbb{C}P^n$, а также вычисление, аналогичное лемме 11.2. Для SU-бордизмов, ситуация оказывается иной: если класс $a\in\Omega^{SU}$ может быть представлен многообразием Калаби–Яу, то класс $-a$ не обязательно обладает этим свойством.

Таким образом, следующим шагом на пути к ответу на поставленный выше вопрос является нахождение условия, при котором y_i и $-y_i$ одновременно могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу. Мы рассматриваем этот вопрос в следующем разделе.

13. Маломерные образующие в кольце SU-бордизмов

Здесь мы опишем геометрические представители Калаби–Яу для образующих y_i кольца SU-бордизмов (см. Теорему 7.1) в комплексной размерности $i \leqslant 4$. Заметим, что для $i \geqslant 5$, каждая образующая $y_i \in \Omega_{2i}^{SU}$ может быть задана квазиторическим многообразием в силу теоремы 10.8. С другой стороны, каждое квазиторическое SU-многообразие вещественной размерности $\leqslant 8$ бордантно нулю по теореме 9.3.

Напомним из раздела 7, что имеют место соотношения

$$\Omega_4^{SU} = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle, \quad \Omega_6^{SU} = \mathbb{Z}\langle y_3\rangle, \quad \Omega_8^{SU} = \mathbb{Z}\langle \tfrac{1}{4}y_2^2, y_4\rangle,$$

где значения s-чисел образующих задаются формулами

$$s_2(y_2) = -48, \quad s_3(y_3) = m_3 m_2 = 6, \quad s_4(y_4) = 2m_4 m_3 = 20.$$

Пример 13.1. Рассмотрим гиперповерхность Калаби–Яу $N_{(3)} \subset \mathbb{C}P^3$, соответствующую разбиению $\omega = (3)$. Имеем $c_1(\mathbb{C}P^3) = 4u$, где $u \in H^2(\mathbb{C}P^3;\mathbb{Z})$ есть каноническая образующая, двойственная гиперплоскому сечению. Таким образом, $N_{(3)}$ может быть задано общим уравнением четвертой степени в однородных координатах на $\mathbb{C}P^3$. Стандартный пример — квартика, заданная уравнением $z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0$, которая является $K3$-поверхностью. Лемма 11.2 дает

$$s_3(N_{(3)}) = \langle 4u^2 \cdot 4u - (4u)^3, [\mathbb{C}P^3]\rangle = -48,$$

так что $N_{(3)}$ представляет образующую $y_2 \in \Omega_4^{SU}$.

Заметим, что теорема 12.3 дает нам другое многообразие, представляющее ту же образующую y_2. А именно, единственное разбиение числа $n = 3$, принадлежащее $\widehat{P}(n)$, есть $(1,1,1)$. Соответствующая ему поверхность Калаби–Яу есть $N_{(1,1,1)} \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Имеем

$$c_1(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1) = 2u_1 + 2u_2 + 2u_3,$$

так что $N_{(1,1,1)}$ — поверхность мультистепени $(2,2,2)$ в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Лемма 12.1 дает $s_3(N_{(1,1,1)}) = -\alpha(1,1,1) = -48$, поэтому $N_{(1,1,1)}$ также представляет y_2.

С другой стороны, аддитивная образующая $-y_2 \in \Omega_4^{SU}$ не может быть представлена компактной комплексной поверхностью. Этот результат был получен в [**37**, Теорема 3.2.5], используя классификацию комплексных поверхностей. Легко видеть, что комплексная поверхность S с $H^1(S;\mathbb{Z}) = 0$ (что имеет место для поверхностей Калаби–Яу, получающихся из торических многообразий Фано) не может представлять класс $-y_2$. В самом деле, такая поверхность S имеет эйлерову характеристику $c_2(S) = \chi(S) \geqslant 2$, в то время как $s_2(-y_2) = 48 = -2c_2(-y_2)$, а потому характеристическое число $c_2(-y_2) = -24$ отрицательно.

Пример 13.2. Сфера S^6 имеет T^2-инвариантную почти комплексную структуру, происходящую из представления сферы в виде однородного пространства $G_2/SU(3)$ исключительной группы Ли G_2, см. [**7**, §13]. Поэтому, S^6 является SU-многообразием с $s_3[S^6] = 3c_3[S^6] = 6$. Таким образом, класс SU-бордизма $[S^6]$ можно взять в качестве y_3.

Пример 13.3. Здесь мы покажем, что образующая $-y_4 \in \Omega_8^{SU}$ представляется грассманианом $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ двумерных плоскостей $\mathbb{C}^4$ с подправленной стабильно комплексной структурой.

Пусть γ — тавтологическое двумерное расслоение над $Gr_2(\mathbb{C}^4)$, и пусть $\gamma^\perp$ — расслоение ортогональных двумерных плоскостей. Тогда мы имеем $\mathcal{T}Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ и

$$\mathcal{T}Gr_2(\mathbb{C}^4) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma,\gamma) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}}^4) \cong \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma}.$$

Таким образом, стандартная комплексная структура на $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ задаётся изоморфизмом стабильных расслоений

$$\mathcal{T}Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong 4\overline{\gamma} - \overline{\gamma}\gamma,$$

где мы обозначили $4\overline{\gamma} = \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}\gamma = \overline{\gamma} \otimes \gamma = \mathrm{Hom}(\gamma,\gamma)$. Мы изменим стабильно комплексную структуру на следующую:

$$\mathcal{T}Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong 2\overline{\gamma} + 2\gamma - \overline{\gamma}\gamma$$

и обозначим полученное стабильно комплексное многообразие через $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$. Заметим, что $c_1(\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)) = 0$, так что $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ является SU-многообразием. Оно имеет то же кольцо когомологий, что и грассманиан,

$$H^*(Gr_2(\mathbb{C}^4)) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2]/(c_1^3 = 2c_1c_2,\, c_2^2 = c_1^2c_2),$$

где $c_i = c_i(\gamma)$. Старшая группа когомологий $H^8(Gr_2(\mathbb{C}^4)) \cong \mathbb{Z}$ порождена классом $c_1^2c_2$.

Теперь вычислим класс $s_4(\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)) = 2s_4(\overline{\gamma}) + 2s_4(\gamma) - s_4(\overline{\gamma}\gamma)$. Мы имеем

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4,$$

откуда

$$s_4(\overline{\gamma}) = s_4(\gamma) = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 2c_2^2 = 2c_1^2c_2 - 4c_1^2c_2 + 2c_1^2c_2 = 0.$$

Остаётся вычислить $s_4(\overline{\gamma}\gamma)$. Используя принцип расщепления, запишем $\gamma = \eta_1 + \eta_2$ для некоторых линейных расслоений η_1, η_2 и вычислим

$$\begin{aligned}
c(\overline{\gamma}\gamma) &= c((\overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2)(\eta_1 + \eta_2)) = c(\overline{\eta}_1\eta_2 + \overline{\eta}_2\eta_1) = c(\overline{\eta}_1\eta_2)c(\overline{\eta_2}\eta_1)\\
&= (1 - c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2))(1 - c_1(\eta_2) + c_1(\eta_1)) = 1 - c_1(\eta_1)^2 - c_1(\eta_2)^2 + 2c_1(\eta_1)c_1(\eta_2)\\
&= 1 - (c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2))^2 + 4c_1(\eta_1)c_1(\eta_2) = 1 - c_1(\gamma)^2 + 4c_2(\gamma).
\end{aligned}$$

Следовательно, $c_1(\overline{\gamma}\gamma) = c_3(\overline{\gamma}\gamma) = c_4(\overline{\gamma}\gamma) = 0$ и

$$s_4(\overline{\gamma}\gamma) = 2c_2(\overline{\gamma}\gamma)^2 = 2(4c_2 - c_1^2)^2 = 2(16c_2^2 - 8c_1^2c_2 + c_1^4) = 20c_1^2c_2.$$

Отсюда получаем $s_4[\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)] = -20$ и $[\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)] = -y_4 \in \Omega_8^{SU}$.

Пример 13.4. Теорема 12.3 дает следующие представители для образующих $y_3 \in \Omega_6^{SU}$ и $y_4 \in \Omega_8^{SU}$:

$$y_3 = 15N_{(2,2)} - 19N_{(1,1,1,1)}, \quad y_4 = 56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)}.$$

В отличие от ситуации в комплексной размерности 2, как y_3, так и $-y_3$ могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу. Это же верно и в комплексной размерности 4, как показывает следующая теорема.

Теорема 13.5. *Имеют место следующие утверждения.*

a) *В комплексной размерности 2, класс $-y_2 \in \Omega_4^{SU}$ может быть представлен поверхностью Калаби–Яу M. В качестве M можно взять любую $K3$-поверхность, отличную от тора; она имеет эйлерову характеристику $\chi(M) = 24$ и*

$$h^{1,1}(M) = 20.$$

Класс $y_2 \in \Omega_4^{SU}$ не может быть представлен никакой поверхностью Калаби–Яу.

б) *В комплексной размерности 3, оба класса SU-бордизмов y_3 и $-y_3$ могут быть представлены трёхмерными многообразиями Калаби–Яу. Эти многообразия M можно получить, используя конструкцию Батырева, из торических многообразий Фано над 4-мерными рефлексивными многогранниками. Такое M представляет класс $y_3 \in \Omega_6^{SU}$, если $\chi(M) = 2$ или, эквивалентно,*

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) = 1.$$

Аналогично, M представляет класс $-y_3 \in \Omega_6^{SU}$, если $\chi(M) = -2$ или, эквивалентно,

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) = -1.$$

в) *В комплексной размерности 4, оба класса SU-бордизмов y_4 и $-y_4$ могут быть представлены четырёхмерными многообразиями Калаби–Яу. Эти многообразия M можно получить, используя конструкцию Батырева, из торических многообразий Фано над 5-мерными рефлексивными многогранниками. Такое M представляет класс $y_4 \in \Omega_8^{SU}$, если $\chi(M) = 282$ или, эквивалентно,*

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) + h^{3,1}(M) = 39.$$

Аналогично, M представляет класс $-y_4 \in \Omega_8^{SU}$, если $\chi(M) = 294$ или, эквивалентно,

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) + h^{3,1}(M) = 41.$$

Доказательство. На протяжении всего доказательства мы обозначаем и характеристические классы Чженя и характеристические числа Чженя многообразия M через c_i, числа Ходжа через $h^{i,j}$, а (вещественные) числа Бетти через b^i, при $i = 0, \dots, \dim_{\mathbb{C}} M$. Для кэлерова n-мерного многообразия M мы имеем $h^{p,q} = h^{q,p}$ (двойственность Ходжа), $b^i = \sum_{p+q=i} h^{p,q}$ и $\chi(M) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i b^i = \sum_{p,q=0}^{n}(-1)^{p+q}h^{p,q}$. Кроме того, многообразие Калаби–Яу M, получаемое из конструкции Батырева, является проективным алгебраическим, а потому удовлетворяет соотношениям $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$ (двойственность Серра). Наконец, группой голономии такого многообразия Калаби–Яу M является вся группа $SU(n)$, и значит, $h^{n,0} = 1$ и $h^{i,0} = 0$ при $0 < i < n$ (см. [**6**, теорема 4.1.9]).

В утверждении а) сведены результаты из примера 13.1.

Докажем б). Для образующей $y_3 \in \Omega_6^{SU}$ имеем $6 = s_3(y_3) = 3c_3(y_3)$, поэтому эйлерова характеристика комплексного SU-многообразия M, представляющего y_3, удовлетворяет равенству $\chi(N) = c_3(N) = 2$. Для трёхмерного многообразия Калаби–Яу M, получаемого из конструкции Батырева, мы имеем

$$b^1 = 2h^{1,0} = 0, \quad b^2 = 2h^{2,0} + h^{1,1} = h^{1,1}, \quad b^3 = 2h^{3,0} + 2h^{2,1} = 2 + 2h^{2,1},$$

а также

$$\chi(M) = 2b^0 - 2b^1 + 2b^2 - b^3 = 2(h^{1,1} - h^{2,1}).$$

Отсюда следует, что M представляет класс y_3 тогда и только тогда, когда $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$. Аналогично, M представляет класс $-y_3$ тогда и только тогда, когда $h^{1,1} - h^{2,1} = -1$.

Тот факт, что требуемое многообразие M существует, следует из анализа базы данных [**28**] (см. также [**1**]) рефлексивных многогранников и гиперповерхностей Калаби–Яу в соответствующих торических многообразиях Фано. Эта база данных содержит сведения обо всех 473 800 776 рефлексивных многогранниках в размерности 4, а также список чисел Ходжа соответствующих трёхмерных многообразий Калаби–Яу. Из нее можно получить, что для каждого числа $h^{1,1}$, удовлетворяющего условиям $16 \leqslant h^{1,1} \leqslant 90$, существует рефлексивный 4-мерный многогранник с соответствующим трехмерным многообразием Калаби–Яу, удовлетворяющим $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$. Если же $h^{1,1}$ не лежит в указанном выше интервале, то не существует трехмерного многообразия Калаби–Яу с $h^{1,1} - h^{2,1} = 1$, получающегося из торического многообразия

Фано. В случае соотношения $h^{1,1} - h^{2,1} = -1$, допустимый интервал для числа $h^{1,1}$ есть $15 \leqslant h^{1,1} \leqslant 89$.

Отметим, что трёхмерные многообразия Калаби–Яу M и M^*, представляющие классы y_3 и $-y_3$, могут быть выбраны зеркально-двойственными в смысле [**6**], т. е., удовлетворяющими соотношениям $h^{1,1}(M) = h^{2,1}(M^*)$ и $h^{2,1}(M) = h^{1,1}(M^*)$.

Докажем в). Удобно использовать следующие частичные эйлеровы характеристики $\chi_k = \sum_{i=0}^{4}(-1)^i h^{i,k}$, при $0 \leqslant k \leqslant 4$. В частности, χ_0 есть род Тодда комплексного многообразия. Для четырёхмерного многообразия Калаби–Яу M, получаемого из конструкции Батырева, мы получаем равенства

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= h^{0,0} - h^{1,0} + h^{2,0} - h^{3,0} + h^{4,0} = 2;\\
\chi_1 &= h^{0,1} - h^{1,1} + h^{2,1} - h^{3,1} + h^{4,1} = -h^{1,1} + h^{2,1} - h^{3,1};\\
\chi_2 &= h^{0,2} - h^{1,2} + h^{2,2} - h^{3,2} + h^{4,2} = -2h^{2,1} + h^{2,2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\chi(M) = \chi_0 - \chi_1 + \chi_2 - \chi_3 + \chi_4 = 2\chi_0 - 2\chi_1 + \chi_2 = 2(2 + h^{1,1} - 2h^{2,1} + h^{3,1}) + h^{2,2}. \tag{13.1}$$

С другой стороны, теорема Римана–Роха–Хирцебруха [**27**, теорема 21.1.1] даёт следующие соотношения в терминах чисел Чженя многообразия M:

$$720\chi_0 = -c_4 + 3c_2^2, \quad 180\chi_1 = -31c_4 + 3c_2^2, \quad 120\chi_2 = 79c_4 + 3c_2^2.$$

Для образующей $y_4 \in \Omega_8^{SU}$ имеем $s_4 = 2c_2^2 - 4c_4 = 20$. Поскольку $\chi_0 = 2$, равенство $2c_2^2 - 4c_4 = 20$ равносильно каждому из нижеследующих равенств:

$$\chi(M) = c_4 = 282 \quad \text{или} \quad -\chi_1 = h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) + h^{3,1}(M) = 39,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, для образующей $-y_4$ условие $s_4 = 2c_2^2 - 4c_4 = -20$ равносильно

$$\chi(M) = c_4 = 294 \quad \text{или} \quad -\chi_1 = h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) + h^{3,1}(M) = 41.$$

Существование многообразия M следует из рассмотрения базы данных [**28**], как и в утверждении б). В частности, существуют четырёхмерные многообразия Калаби–Яу, имеющие числа Ходжа $h^{1,1} = 16$, $h^{2,1} = 30$, $h^{3,1} = 53$, представляющие класс y_4, а также четырёхмерные многообразия Калаби–Яу, имеющие числа Ходжа $h^{1,1} = 17$, $h^{2,1} = 45$, $h^{3,1} = 69$, представляющие класс $-y_4$. $\square$

Класс $-y_4 \in \Omega_8^{SU}$ может быть также представлен многообразиями Калаби–Яу вида Z_S типа Борк–Вуазен, построенными в работе [**20**] как крепантные разрешения особенностей в факторпространствах гиперкэлеровых многообразий по несимплектическим инволюциям. Это следует из сопоставления формулы из теоремы 13.5 (c) с вычислением чисел Ходжа в [**20**, §5.2].

Образующая $\frac14 y_2^2 = x_1^4 = w_4$ группы $\Omega_8^{SU} = \mathbb{Z}\langle \frac14 y_2^2, y_4\rangle$ не может быть представлена четырёхмерным многообразием Калаби–Яу с полной группой голономий $SU(4)$. В самом деле, как уже было отмечено в конце раздела 7,

$$\tfrac14 y_2^2 = x_1^4 = \bigl(9[\mathbb{C}P^1] \times [\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\bigr) \times \bigl(9[\mathbb{C}P^1] \times [\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\bigr),$$

так что род Тодда $\frac14 y_2^2$ равен 1. С другой стороны, четырёхмерное многообразие Калаби–Яу с полной группой голономий $SU(4)$ имеет $h^{0,1} = h^{0,2} = h^{0,3} = 0$, и его род Тодда равен $h^{0,0} + h^{0,4} = 2$.

Список литературы

[1] Altman, Ross; Gray, James; He, Yang-Hui; Jejjala, Vishnu; Nelson, Brent D. A. *Calabi–Yau database: threefolds constructed from the Kreuzer–Skarke list.* J. High Energy Phys. 2015 (2015), no. 2, 158.

[2] Anderson, D. W.; Brown, E. H., Jr.; Peterson, F. P. *SU-cobordism, KO-characteristic numbers, and the Kervaire invariant.* Ann. of Math. (2) 83 (1966), 54–67.

[3] Atiyah, Michael F. *Bordism and cobordism.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 57 (1961) 200–208.

[4] Авербух Б. Г. *Алгебраическое строение групп внутренних гомологии.* ДАН СССР, 125 (1959), 11–14.
[5] Baas, Nils A. *On the convergence of the Adams spectral sequences.* Math. Scand. 27 (1970), 145–150.
[6] Batyrev, Victor V. *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties.* J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 3, 493–535.
[7] Borel, Armand; Hirzebruch, Friedrich. *Characteristic classes and homogeneous spaces. I.* Amer. J. Math. 81 (1958), 458–538.
[8] Ботвинник Б. И. *Структура кольца MSU_*.* Матем. сб., 181:4 (1990), 540–555.
[9] Botvinnik, Boris I. *Manifolds with singularities and the Adams–Novikov spectral sequence.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 170. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
[10] Ботвинник Б. И., Бухштабер В. М., Новиков С. П., Юзвинский С. А. *Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах.* УМН, 55:4(334) (2000), 5–24.
[11] Бухштабер В. М. *Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией.* УМН, 27:6(168) (1972). 231–232.
[12] Бухштабер В. М. *Кобордизмы в задачах алгебраической топологии.* Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 13, ВИНИТИ, М., 1975, 231–271.
[13] Бухштабер В. М. *Комплексные кобордизмы и формальные группы.* УМН, 67:5(407) (2012), 111–174.
[14] Бухштабер В. М. *Кобордизмы, многообразия с действием тора и функциональные уравнения.* Тр. МИАН, 302 (2018), 57–97.
[15] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric topology.* Math. Surv. and Monogr., 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
[16] Buchstaber, Victor; Panov, Taras; Ray, Nigel. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds.* Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2, 219–242.
[17] Buchstaber, Victor; Panov, Taras; Ray, Nigel. *Toric genera.* Internat. Math. Res. Notices 2010, no. 16, 3207–3262.
[18] Бухштабер В. М., Рэй Н. *Торические многообразия и комплексные кобордизмы.* УМН, 53:2(320) (1998), 139–140.
[19] Бухштабер В. М., Устинов А. В. *Кольца коэффициентов формальных групп.* Матем. сб., 206:11 (2015), 19–60.
[20] Camere, Chiara; Garbagnati, Alice; Mongardi, Giovanni. *Calabi–Yau quotients of hyperkähler fourfolds.* Canad. J. Math., to appear; arXiv:1607.02416.
[21] Conner, Pierre E.; Floyd, Edwin E. *Differentiable Periodic Maps.* Academic Press Inc., New York, 1964. [Русский перевод: Коннер П., Флойд Э., *Гладкие периодические отображения,* «Мир», Москва, 1969.]
[22] Conner, Pierre E.; Floyd, Edwin E. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60, 1966.
[23] Cox, David A.; Little, John B.; Schenck, Henry K. *Toric varieties.* Graduate Studies in Mathematics, 124. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
[24] Данилов В. И. *Геометрия торических многообразий.* УМН, 33:2(200) (1978), 85–134.
[25] Davis, Michael W.; Januszkiewicz, Tadeusz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451.
[26] Fulton, William. *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
[27] Hirzebruch, Friedrich. *Topological Methods in Algebraic Geometry.* Third edition. Springer, Berlin–Heidelberg, 1966. [Русский перевод: Хирцебрух Ф., *Топологические методы в алгебраической геометрии,* «Мир», Москва, 1973.]
[28] Kreuzer, Maximilian; Skarke, Harald. *Calabi–Yau data,* `http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/CY/`
[29] Landweber, Peter S. *Cobordism operations and Hopf algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 94–110.
[30] Лимонченко И. Ю., Лю Ж., Панов Т. Е. *Гиперповерхности Калаби–Яу и SU-бордизмы.* Тр. МИАН, 302 (2018), 287–295.
[31] Lü, Zhi; Panov, Taras. *On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings.* Algebr. Geom. Topol 16 (2016), no. 5, 2865–2893.
[32] Lü, Zhi; Wang, Wei. *Examples of quasitoric manifolds as special unitary manifolds.* Math. Res. Lett. 23 (2016), no. 5, 1453–1468.
[33] Milnor, John. *On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I.* Amer. J. Math. 82 (1960), 505–521.
[34] Миронов О. К. *Существование мультипликативных структур в теориях кобордизмов с особенностями.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 39:5 (1975), 1065–1092.
[35] Мищенко А. С. *Спектральные последовательности типа Адамса.* Матем. заметки, 1:3 (1967), 339–346.
[36] Mosley, John. E. *The greatest common divisor of multinomial coefficients.* arXiv:1411.0706.

[37] Mosley, John. E. *In search of a class of representatives for SU-bordism using the Witten genus.* Thesis (Ph.D.)–University of Kentucky, 2016.

[38] Новиков С. П. *О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома.* ДАН СССР, 132:5 (1960), 1031–1034.

[39] Новиков С. П. *Гомотопические свойства комплексов Тома.* Матем. сб., 57(99):4 (1962), 407–442.

[40] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

[41] Ошанин С. Д. *Сигнатура SU-многообразий.* Матем. заметки, 13:1 (1973), 97–102.

[42] Oda, Tadao. *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An introduction to the theory of toric varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 15. Springer, New York, 1988.

[43] Понтрягин Л. С. *Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.* Тр. МИАН СССР, 45 (1955), 3–139.

[44] Quillen, Daniel. *Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations.* Advances in Math. 7 (1971), 29–56.

[45] Ravenel, Douglas C. *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres.* Pure and Applied Mathematics, 121. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.

[46] Рохлин В. А. *Новые результаты теории четырехмерных многообразий.* ДАН СССР, 84 (1952), 221–224.

[47] Рохлин В. А. *Теория внутренних гомологий.* УМН, 14:4(88) (1959), 3–20.

[48] Rudyak, Yuli B. *On Thom spectra, orientability, and cobordism.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[49] Соломадин Г. Д., Устиновский Ю. М. *Проективные торические полиномиальные образующие в кольце комплексных кобордизмов.* Матем. сб., 207:11 (2016), 127–152.

[50] Stong, Robert. *Notes on Cobordism Theory.* Math. Notes, 7. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1968. [Русский перевод: Стонг Р., *Заметки по теории кобордизмов,* «Мир», Москва, 1973.]

[51] Thom, René. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17–86. [Русский перевод: сб. «Расслоенные пространства и их приложения», ИЛ, Москва, 1958, стр. 293–351.]

[52] Vershinin, Vladimir V. *Cobordisms and spectral sequences.* Translations of Mathematical Monographs, 130. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[53] Wall, C. T. C. *Determination of the cobordism ring.* Ann. of Math. (2) **72** (1960), 292–311.

[54] Wall, C. T. C. *Addendum to a paper of Conner and Floyd.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), 171–175.

[55] Wilfong, Andrew. Smooth projective toric variety representatives in complex cobordism. Proc. Steklov Inst. Math. 286 (2014), 324–344.

[56] Wilfong, Andrew. *Toric polynomial generators of complex cobordism.* Algebr. Geom. Topol. 16 (2016), no. 3, 1473–1491.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

Email address: iylim@mail.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет;

Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова, Москва;

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва

Email address: tpanov@mech.math.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

Email address: aaa057721@gmail.com