О многообразиях, задаваемых 4-раскрасками простых 3-многогранников

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов

Пусть $\mathscr{P}$ – класс комбинаторных простых трехмерных многогранников P, отличных от тетраэдра $\varDelta^3$, без 3- и 4-поясов из граней. Согласно [1], [2] многогранник P допускает реализацию в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ с прямыми двугранными углами тогда и только тогда, когда $P \in \mathscr{P}$. Рассматриваются два семейства гладких многообразий, задаваемых правильными раскрасками многогранников $P \in \mathscr{P}$ в 4 цвета: шестимерные квазиторические многообразия над P и трехмерные малые накрытия над P, которые также являются трехмерными гиперболическими многообразиями типа Лёбелля [3]. Мы доказываем, что два многообразия из этих семейств диффеоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие раскраски эквивалентны.

Квазиторическим многообразием (соответственно *малым накрытием*) над простым n-многогранником P называется $2n$-мерное (n-мерное) многообразие M с локально стандартным действием тора T^n (группы $\mathbb{Z}_2^n$) и проекцией $M \to P$, слоями которой являются орбиты действия (см. [4], [5]).

Пусть $\mathscr{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ – множество граней 3-многогранника P. *Характеристической функцией* над $\mathbb{Z}$ (над $\mathbb{Z}_2$) называется отображение $\lambda\colon \mathscr{F} \to \mathbb{Z}^3$ ($\lambda\colon \mathscr{F} \to \mathbb{Z}_2^3$) такое, что если $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$ – вершина, то $\lambda(F_{i_1}), \lambda(F_{i_2}), \lambda(F_{i_3})$ – базис в $\mathbb{Z}^3$ (в $\mathbb{Z}_2^3$). Характеристические функции λ и λ' *эквивалентны* ($\lambda \sim \lambda'$), если одна получается из другой заменой базиса в $\mathbb{Z}^3$ и изменением направлений некоторых векторов $\lambda(F_i)$ (заменой базиса в $\mathbb{Z}_2^3$). *Характеристические пары* (P, λ) и (P', λ') *эквивалентны* ($(P, \lambda) \sim (P', \lambda')$), если P и P' комбинаторно эквивалентны ($P \simeq P'$) и $\lambda \sim \lambda'$.

Квазиторическое многообразие или малое накрытие M над P задается парой (P, λ); при этом два таких многообразия $M = M(P, \lambda)$, $M' = M'(P', \lambda')$ эквивариантно гомеоморфны тогда и только тогда, когда $(P, \lambda) \sim (P', \lambda')$ (см. [4], [5; утверждение 7.3.11]). Вообще говоря, существуют неэквивалентные пары (P, λ), (P', λ'), для которых соответствующие многообразия M, M' (неэквивариантно) диффеоморфны.

Правильной 4-*раскраской* P называют отображение $\chi\colon \mathscr{F} \to \{1, 2, 3, 4\}$ со свойством $\chi(F_i) \ne \chi(F_j)$, если $F_i \cap F_j \ne \varnothing$. Существование 4-раскраски обеспечивается теоремой о 4 красках. Раскраски χ и χ' *эквивалентны* ($\chi \sim \chi'$), если $\chi' = \sigma\chi$ для некоторой перестановки $\sigma \in S_4$.

Пусть χ – 4-раскраска, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ – базис в $\mathbb{Z}^3$ и $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$. По этим данным зададим характеристическую функцию $\lambda = \lambda(\chi, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ по правилу: $\lambda(F) = \boldsymbol{a}_i$, если $\chi(F) = i$, $i = 1, 2, 3$, и $\lambda(F) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \boldsymbol{a}_i$, если $\chi(F) = 4$. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ – стандартный базис $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ в $\mathbb{Z}^3$ или $\mathbb{Z}_2^3$.

Предложение 1. *Имеем* $\lambda(\chi, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \sim \lambda(\chi, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, 1, 1, 1)$.

Доказательство. Имеем $\lambda(\chi, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \sim \lambda(\chi, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \sim \lambda(\chi, \varepsilon_1\boldsymbol{e}_1, \varepsilon_2\boldsymbol{e}_2, \varepsilon_3\boldsymbol{e}_3, 1, 1, 1) \sim \lambda(\chi, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, 1, 1, 1)$, где первая и третья эквивалентности получаются заменой базиса в $\mathbb{Z}^3$, а вторая – изменением направления векторов.

Отметим, что классы эквивалентности характеристических функций суть орбиты действия группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ или $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}_2)$, а классы эквивалентности раскрасок суть орбиты действия группы перестановок S_4. Тем не менее имеет место

Предложение 2. $\chi \sim \chi' \Leftrightarrow \lambda_\chi \sim \lambda_{\chi'}$, *где* $\lambda_\chi := \lambda(\chi, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, 1, 1, 1)$.

Доказательство. Пусть $\chi' = \sigma\chi$, $\sigma \in S_4$. Если $\boldsymbol{e}_4 := \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, то $\boldsymbol{e}_{\sigma(4)} = \varepsilon_1\boldsymbol{e}_{\sigma(1)} + \varepsilon_2\boldsymbol{e}_{\sigma(2)} + \varepsilon_3\boldsymbol{e}_{\sigma(3)}$ для некоторых $\varepsilon_i = \pm 1$. Тогда $\lambda_{\chi'} = \lambda(\chi', \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, 1, 1, 1) = \lambda(\chi, \boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(3)}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \sim \lambda_\chi$, где эквивалентность следует из предложения 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00537, 16-51-55017-ГФЕН_а.).

DOI: 10.4213/rm9738

Обратно, пусть $\lambda_\chi \sim \lambda_{\chi'}$. Тогда, по определению эквивалентности характеристических функций, $\lambda_{\chi'} = \lambda(\chi, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ для некоторого базиса $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ и $\varepsilon_i = \pm 1$. Образ $\lambda_{\chi'}$ есть множество $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\}$, а образ $\lambda(\chi, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ есть множество $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ \varepsilon_1\boldsymbol{a}_1 + \varepsilon_2\boldsymbol{a}_2 + \varepsilon_3\boldsymbol{a}_3\}$. Следовательно, эти два множества из четырех векторов совпадают, т. е. $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_{\sigma(1)}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_{\sigma(3)}$ и $\varepsilon_1\boldsymbol{a}_1 + \varepsilon_2\boldsymbol{a}_2 + \varepsilon_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_{\sigma(4)}$ для некоторой $\sigma \in S_4$. Это означает, что $\chi' = \sigma\chi$, т. е. $\chi \sim \chi'$.

Теорема 1 [6]. *Пусть $M = M(P, \lambda)$ и $M' = M'(P', \lambda')$ – квазиторические многообразия (или малые накрытия), причем $P \in \mathscr{P}$. Тогда M и M' диффеоморфны в том и только том случае, когда $(P, \lambda) \simeq (P', \lambda')$.*

Теорема 2 (основной результат). *Пусть даны простые многогранники P и P' с 4-раскрасками χ и χ', причем $P \in \mathscr{P}$. Тогда 6-мерные квазиторические многообразия или 3-мерные малые накрытия (гиперболические многообразия) $M = M(P, \lambda_\chi)$ и $M' = M'(P', \lambda_{\chi'})$ диффеоморфны в том и только том случае, когда $P \simeq P'$ и $\chi \sim \chi'$.*

Доказательство. Если $P \simeq P'$ и $\chi \sim \chi'$, то $\lambda_\chi \sim \lambda_{\chi'}$ по предложению 2. Тогда пары (P, λ_χ) и $(P', \lambda_{\chi'})$ эквивалентны, а значит, многообразия M и M' диффеоморфны.

Обратно, если M и M' диффеоморфны, то $P \simeq P'$ и $\lambda_\chi \sim \lambda_{\chi'}$ согласно теореме 1. Следовательно, $\chi \sim \chi'$ согласно предложению 2.

Говорят, что характеристическая функция $\lambda\colon \mathscr{F} \to \mathbb{Z}^3$ *задается* 4-*раскраской* χ, если $\lambda(F) = \lambda(F')$ при условии $\chi(F) = \chi(F')$. Образ такой характеристической функции состоит из 4 векторов. Примеры: $\lambda(\chi, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ и λ_χ. Правильная 4-раскраска простого 3-многогранника называется *полной*, если для любого набора из 3 разных цветов 4-раскраски существует вершина многогранника, у которой прилегающие к ней грани окрашены в эти цвета.

Предложение 3. *Пусть χ – полная 4-раскраска. Тогда любая характеристическая функция $\lambda\colon \mathscr{F} \to \mathbb{Z}^3$, задаваемая раскраской χ, эквивалентна λ_χ.*

Доказательство. Из условия полноты раскраски и определения характеристической функции вытекает, что любые три из четырех векторов $\lambda(\mathscr{F})$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^3$. Отсюда легко следует, что $\lambda = \lambda(\chi, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, т. е. $\lambda \sim \lambda_\chi$.

Отметим, что условие полноты раскраски необходимо. Пусть, например, комбинация цветов $\{1, 2, 4\}$ не реализуется ни в какой вершине для раскраски χ. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим характеристическую функцию $\lambda_{\chi,k}$, заданную по правилу: $\lambda_{\chi,k}(F) = \boldsymbol{e}_i$, если $\chi(F) = i$, $i = 1, 2, 3$, и $\lambda(F) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + k\boldsymbol{e}_3$, если $\chi(F) = 4$. Тогда $\lambda_{\chi,k} \not\sim \lambda_\chi$ при $k \neq \pm 1$ (над $\mathbb{Z}_2$ имеем $\lambda_{\chi,0} \not\sim \lambda_{\chi,1} = \lambda_\chi$).

Класс $\mathscr{P}$ очень широк, он содержит *фуллерены* [7], т. е. простые 3-многогранники, имеющие лишь 5- и 6-угольные грани. Если фуллерен имеет 2 соседних 5-угольника, то уже в их вершинах реализуются все 4 комбинации из 3 цветов, так что любая 4-раскраска такого фуллерена полна. Для фуллеренов без соседних 5-угольников (*IPR-фуллеренов*) имеются неполные раскраски χ. Легко видеть, что соответствующие гиперболические 3-многообразия $M(P, \lambda_{\chi,0})$ неориентируемы, в отличие от $M(P, \lambda_\chi)$.

Список литературы

[1] А. В. Погорелов, *Матем. заметки*, **1**:1 (1967), 3–8. **[2]** Е. М. Андреев, *Матем. сб.*, **81**:3 (1970), 445–478. **[3]** А. Ю. Веснин, *Сиб. матем. журн.*, **28**:5 (1987), 50–53. **[4]** M. W. Davis, T. Januszkiewicz, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451. **[5]** V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Amer. Math. Soc., Providence, 2015. **[6]** V. Buchstaber, N. Erokhovets, M. Masuda, T. Panov, S. Park, arXiv: 1610.07575. **[7]** V. Buchstaber, N. Erokhovets, arXiv: 1609.02949.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Т. Е. Панов (T. E. Panov)
МГУ; ИППИ; ИТЭФ
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
20.09.2016