ТОРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

В. М. БУХШТАБЕР, Т. Е. ПАНОВ

Аннотация. В обзоре излагаются методы и основные результаты новой активно развивающейся области исследований — *торической топологии*. В этих исследованиях активное участие принимают сотрудники, аспиранты и студенты кафедры высшей геометрии и топологии мехмата МГУ.

1. Введение в предмет исследования

Теория действий тора имеет длинную историю развития и образует важную область алгебраической топологии. За последние 15 лет на стыке эквивариантной топологии, алгебраической и симплектической геометрии, комбинаторики, коммутативной и гомологической алгебры возникла новая область исследований — *торическая топология*, которая быстро привлекла внимание большого числа исследователей и активно развивается в настоящее время.

В центре внимания торической топологии находятся действия тора, пространства орбит которых несут богатую комбинаторную структуру. В ней решаются задачи на основе изучения алгебраических, комбинаторных и топологических свойств таких действий, естественно возникающих в различных направлениях исследований. Благодаря торической топологии фундаментальные результаты ряда областей математики получили новое развитие и нашли неожиданные замечательные приложения.

Первоначальный импульс этому развитию придала *торическая геометрия* — теория *торических многообразий* в алгебраической геометрии. Эта теория устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными алгебраическими многообразиями с действием комплексного тора, имеющим плотную орбиту, и комбинаторными объектами, называемыми *веерами*. При помощи вееров алгебро-геометрические свойства торических многообразий полностью переводятся на язык комбинаторики. Торическая геометрия предоставляет богатый источник явных примеров алгебраических многообразий и имеет яркие приложения в таких областях, как теория особенностей и математическая физика. Пространство орбит $2n$-мерного неособого проективного торического многообразия по действию компактного тора T^n представляет собой выпуклый n-мерный простой многогранник P.

В симплектической геометрии, после появления теоремы выпуклости Атьи–Гиллёмина–Стернберга [At82] и формулы Дуистермаата–Хекмана [DH82] в начале 1980-х годов, активно изучались гамильтоновы действия групп. В работе Делзанта [De88] было показано, что в случае действия тора размерности, равной половине размерности многообразия, образ отображения моментов определяет многообразие с точностью до эквивариантного симплектоморфизма. В симплектической геометрии, как и в торической геометрии, различные геометрические конструкции имеют комбинаторную интерпретацию в терминах многогранников.

Имеется тесная взаимосвязь между алгебраическими и симплектическими многообразиями с действием тора: проективное вложение неособого торического многообразия определяет симплектическую форму и отображение моментов. Образом отображения моментов является многогранник, двойственный к вееру. Как в алгебраической, так и в симплектической ситуации, действие компактного тора локально изоморфно стандартному действию тора T^n на $\mathbb{C}^n$ покоординатными вращениями. Факторпространство многообразия по такому действию тора представляет собой многообразие с углами, которое несёт комбинаторную структуру, отражающую структуру частично упорядоченного множества стационарных подгрупп. Это позволяет полностью восстановить многообразие и действие. Замечательно, что такой подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространства с действием тора удаётся интерпретировать и доказывать весьма тонкие комбинаторные результаты топологически. Оказалось, что данная специфика алгебраических торических многообразий имеет чисто топологическую природу, что вызвало глубокое проникновение идей и методов торической и симплектической геометрии в алгебраическую топологию с начала 1990-х годов.

Дальнейшие исследования выявили ряд важных классов многообразий с действием тора, происхождение которых восходит к торическим или симплектическим многообразиям. Эти более общие многообразия как правило не являются алгебраическими или симплектическими, но в то же время обладают важнейшими топологическими свойствами их алгебраических или симплектических предшественников. Таким образом, была существенно расширена область приложений методов торической топологии в комбинаторике и коммутативной алгебре. Опишем некоторые из этих классов.

Подход Дэвиса–Янушкиевича [DJ91] к изучению торических многообразий топологическими методами привёл к появлению *квазиторических многообразий*. Этот класс многообразий определяется двумя условиями: действие тора локально выглядит как стандартное представление T^n в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником. Оба условия выполнены для действия тора на неособом проективном торическом многообразии. Работы Бухштабера–Рэя [БР98], [BR01] показали, что квазиторические многообразия играют важную роль в теории комплексных кобордизмов — классической области алгебраической топологии [St68]. В отличие от торических многообразий, квазиторические многообразия могут быть не комплексными и даже не почти комплексными, однако они всегда допускают стабильно комплексную структуру, которая определяется в чисто комбинаторных терминах — при помощи так называемой *характеристической функции*, сопоставляющей каждой гиперграни многогранника некоторый примитивный вектор целочисленной решётки. Характеристическая функция играет роль веера, сопоставляемого торическому многообразию в алгебраической геометрии.

Комбинаторный подход к изучению гамильтоновых действий тора привёл к понятию *ГКМ-многообразий*. Согласно [GZ99], компактное $2n$-мерное многообразие M с эффективным действием тора T^k, $k \leqslant n$, называется ГКМ-многообразием, если множество неподвижных точек конечно, M обладает инвариантной почти комплексной структурой, и веса представлений тора T^k в касательных пространствах к неподвижным точкам попарно линейно независимы. Эти многообразия были названы в честь Горески, Коттвица и Макферсона, которые впервые ввели их в [GKM98]. Там же было показано, что «1-остов» такого многообразия M, т.е. множество точек, имеющих стационарную подгруппу коразмерности не больше 1, может быть описано при помощи графа с метками (Γ, α). Этот граф, называемый *графом весов* (или *ГКМ-графом*), позволяет вычислять важные топологические инварианты многообразия M, такие как его числа Бетти или кольцо эквивариантных когомологий. Изучение таких графов приобрело самостоятельный комбинаторный интерес благодаря работам Гиллёмина–Зары [GZ99] и других. Отметим, что в топологии идея сопоставления графа с метками многообразию с действием окружности использовалась начиная с 1970-х годов, см., например, работу Мусина [Му80].

Стенли был одним из первых, кто осознал большой потенциал торических действий для комбинаторных приложений, использовав их для доказательства *гипотезы Макмюллена* о числах граней симплициальных многогранников и *гипотезы о верхней границе* для триангуляций сфер. Его результаты и методы легли в основу известной монографии [St96] и предопределили дальнейшие приложения коммутативной алгебры и гомологических методов в комбинаторной геометрии.

Многие идеи Стенли нашли топологические применения; так оказалось, что *кольцо граней* (или *кольцо Стенли–Риснера*) $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ симплициального комплекса $\mathcal{K}$ является важной составляющей в вычислении кольца когомологий квазиторического многообразия M. В [DJ91] показано, что *эквивариантные когомологии* многообразия M изоморфны кольцу граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}_P]$ симплициального комплекса $\mathcal{K}_P$, двойственного к границе простого многогранника P. Кольцо обычных когомологий $H^*(M)$ получается из $\mathbb{Z}[\mathcal{K}_P]$ факторизацией по идеалу, порождённому некоторыми линейными формами, в точности как и в случае торических многообразий.

С появлением кольца граней стало ясно, что многие тонкие комбинаторные свойства комплексов $\mathcal{K}$ можно интерпретировать алгебраически. Изучение колец граней получило самостоятельное развитие и привело к новому классу *колец Коэна–Маколея*, имеющих геометрическую природу. В частности, возникло новое топологическое понятие *симплициального комплекса Коэна–Маколея* $\mathcal{K}$, для которого $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ является кольцом Коэна–Маколея. Подробное изложение этих понятий можно найти в монографии [BH98], где также подчёркивается важность гомологического подхода. Например, в [St96] и [BH98] рассматриваются размерности биградуированных компонент векторных пространств $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k})$, называемые *алгебраическими числам Бетти* кольца $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, для любого поля $\mathbf{k}$. Эти числа являются весьма тонкими инвариантами: они зависят от комбинаторики $\mathcal{K}$, а не только от топологии его реализации $|\mathcal{K}|$, и полностью определяют «обычные» топологические числа Бетти для $|\mathcal{K}|$. Теорема Хохстера [Ho77] выражает алгебраические числа Бетти через когомологии полных подкомплексов в $\mathcal{K}$.

Более подробно ознакомиться с основными этапами развития торической топологии можно по монографии [БП04] и недавнему обзору Бухштабера–Рэя [BR08]. Среди других работ по торической топологии сотрудников и аспирантов кафедры высшей геометрии и топологии выделим [Ба03], [ББП04], [До01], [Ер08].

2. Торические и квазиторические многообразия

Рассмотрим выпуклый n-мерный многогранник с m гипергранями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданный как пересечение m полупространств:

$$P = \bigl\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}) + b_i \geqslant 0 \quad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant m\bigr\}, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$ — некоторые векторы и $b_i \in \mathbb{R}$. Многогранник P называется *простым*, если ограничивающие его гиперплоскости находятся в общем положении в каждой его вершине; далее мы будем рассматривать лишь простые многогранники.

Многогранник (2.1) можно задать одним матричным неравенством

$$A_P\boldsymbol{x} + b_P \geqslant 0,$$

где A_P — матрица размера $m \times n$ со строками $\boldsymbol{a}_i$, а b_P — столбец из чисел b_i; неравенство считается покоординатным. Тогда аффинное отображение

$$i_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad \boldsymbol{x} \mapsto A_P\boldsymbol{x} + b_P$$

отождествляет P с пересечением *положительного ортанта* $\mathbb{R}^m_\geqslant$ и n-мерной плоскости $i_P(\mathbb{R}^n)$. Ортант $\mathbb{R}^m_\geqslant$ является пространством орбит *стандартного* (покоординатного) действия тора T^m на комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$; в качестве проекции на пространство орбит возьмем отображение

$$\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m_\geqslant; \quad (z_1, \dots, z_m) \mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2).$$

Теперь определим пространство $\mathcal{Z}_P$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu} \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m_\geqslant. \end{array} \tag{2.2}$$

По построению, $\mathcal{Z}_P$ является T^m-инвариантным подмножеством в $\mathbb{C}^m$ с пространством орбит P, а i_Z является T^m-эквивариантным вложением.

Теорема 2.1. *Пространство $\mathcal{Z}_P$ является T^m-инвариантным гладким вещественным $(m+n)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^m$ с тривиальным нормальным расслоением.*

Выбрав вещественную $(m-n) \times m$-матрицу $D = (d_{ki})$ ранга $(m-n)$, такую что $DA_P = 0$, можно задать $\mathcal{Z}_P$ как полное пересечение вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$:

$$\sum_{i=1}^m d_{ki}(|z_i|^2 - b_i) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-n.$$

Мы называем $\mathcal{Z}_P$ *момент-угол многообразием* многогранника P (название связано с тем, что $\mathcal{Z}_P$ является поверхностью уровня для *отображения моментов* в симплектической конструкции торических многообразий [БП04, §9.2]).

Действие тора T^m на $\mathcal{Z}_P$ не является свободным: вершины многогранника имеют максимальные (n-мерные) стационарные подгруппы. Во многих случаях удаётся найти $(m-n)$-мерную подгруппу в T^m, действующую на $\mathcal{Z}_P$ свободно. Важнейшие примеры возникают, когда многогранник P является *целочисленным*, т.е. имеет вершины в точках целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае векторы $\boldsymbol{a}_i$ в (2.1) можно выбрать целочисленными и примитивными; тогда отображение A_P происходит из эпиморфизма решёток $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, который задаёт эпиморфизм торов $T^m \to T^n$. Обозначим его ядро через $K(P)$.

Лемма 2.2. *Пусть для каждой вершины многогранника P набор из n векторов $\boldsymbol{a}_i$, ортогональных к гиперграням, содержащим эту вершину, образует базис целочисленной решётки. Тогда $K(P)$ является $(m-n)$-мерным тором, действующим на $\mathcal{Z}_P$ свободно.*

Соответствующее фактор-многообразие $V_P = \mathcal{Z}_P/K(P)$ (размерности $2n$) называется *торическим многообразием*, соответствующим целочисленному многограннику P. Оно является неособым проективным алгебраическим многообразием с действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^n$, имеющим плотную орбиту [Да78], [Fu93]. Компактный тор $T^n = T^m/K(P)$ является максимальной компактной подгруппой в $(\mathbb{C}^\times)^n$.

Торические подгруппы в T^m, действующие на $\mathcal{Z}_P$ свободно, можно также получать из следующей более общей конструкции. Пусть Λ — целочисленная $m \times n$-матрица, строки которой удовлетворяют условию на векторы $\boldsymbol{a}_i$ из леммы 2.2. Тогда ядро $K(\Lambda)$ соответствующего отображения торов $T^m \to T^n$ также действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно. Фактор-многообразие $M = M(P,\Lambda) = \mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ называется *квазиторическим многообразием*, задаваемым данными (P,Λ). Торические многообразия получаются как частный случай при $\Lambda = A_P$. Действие тора $T^n = T^m/K(\Lambda)$ на M обладает двумя свойствами, которые привели Дэвиса и Янушкевича к понятию квазиторического многообразия (см. Введение). Можно доказать, что любое многообразие с действием тора T^n, удовлетворяющим этим условиям, получается из предыдущей конструкции как фактор-пространство момент-угол многообразия.

Следующая конструкция показывает, что на каждом квазиторическом многообразии имеется *стабильно комплексная структура.*

Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — гиперграни многогранника P и $\pi\colon M \to P$ — проекция на пространство орбит квазиторического многообразия. Тогда $M_i = \pi^{-1}(F_i)$ является ориентируемым подмногообразием в M коразмерности два, называемым *характеристическим подмногообразием.* Тем самым определено вещественное 2-мерное ориентируемое расслоение ρ_i над M, ограничение которого на M_i совпадает с нормальным расслоением вложения $M_i \subset M$.

Теорема 2.3 ([DJ91, BR01])**.** *Имеет место изоморфизм вещественных $2m$-мерных расслоений*

$$\mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^{2(m-n)} \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m,$$

где $\mathcal{T}M$ — касательное расслоение, а $\mathbb{R}^{2(m-n)}$ — тривиальное $2(m-n)$-мерное расслоение над M.

Так как выбор ориентации в вещественном 2-мерном расслоении эквивалентен заданию на нём комплексной структуры, стабильное касательное расслоение к M допускает комплексную структуру. Выбор этой структуры становится однозначным, если зафиксировать ориентацию самого M и всех характеристических подмногообразий M_i. Такой набор ориентаций называется *полиориентацией.* Для каждого полиориентированного квазиторического многообразия M определён его класс $[M] \in \Omega_U$ в кольце комплексных кобордизмов.

Теорема 2.4 ([BPR07])**.** *Каждый класс комплексных кобордизмов размерности > 2 содержит квазиторическое многообразие (непременно связное), стабильно комплексная структура которого задаётся некоторой полиориентацией, а следовательно согласована с действием тора.*

Данный результат можно рассматривать как решение квазиторического аналога известной проблемы Хирцебруха о классах кобордизма, представляемых связными неособыми алгебраическими многообразиях.

Следствие 2.5. *Каждый класс комплексных кобордизмов размерности > 2 представляется фактор-пространством полного пересечения вещественных квадрик по свободному действию тора.*

3. Момент-угол комплексы и многообразия

Теория момент-угол комплексов является одним из основных инструментов приложений торической топологии и объединяет методы комбинаторной геометрии, гомологической алгебры и эквивариантной топологии.

В предыдущем разделе мы сопоставили каждому геометрическому простому многограннику (2.1) гладкое момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ с действием тора T^m, получаемое как полное пересечение вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m$. Можно показать, что $\mathcal{Z}_P$ отождествляется с факторпространством $P\times T^m/\sim$ по некоторому отношению эквивалентности, откуда вытекает, что топологический тип многообразия $\mathcal{Z}_P$ определяется лишь комбинаторной структурой многогранника P. Эта последняя конструкция многообразия $\mathcal{Z}_P$ впервые появилась в [DJ91] и была мотивирована конструкциями Винберга [Ви71] для групп Кокстера. Также в [DJ91] было получено обобщение конструкции $\mathcal{Z}_P$ на произвольные конечные симплициальные комплексы $\mathcal{K}$ с m вершинами (при этом простой многогранник P соответствует симплициальному комплексу $\mathcal{K}_P$ — границе двойственного многогранника). Получаемые пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ мы и называем *момент-угол комплексами*. В [DJ91] им отводилась лишь вспомогательная роль при изучении квазиторических многообразий, но вскоре стало ясно, что момент-угол комплексы имеют самостоятельное большое значение.

Пусть $\mathcal{K}$ — конечный абстрактный симплициальный комплекс на множестве $[m]=\{1,\dots,m\}$. В [БП99] нами была предложена другая конструкция момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Рассмотрим единичный комплексный полидиск

$$(\mathbb{D}^2)^m=\bigl\{(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{C}^m\colon |z_i|^2\leqslant 1,\quad i=1,\dots,m\bigr\}.$$

С каждым симплексом $\sigma\in\mathcal{K}$ свяжем подмножество

$$B_\sigma=\bigl\{(z_1,\dots,z_m)\in(\mathbb{D}^2)^m\colon |z_i|^2=1 \text{ при } i\notin\sigma\bigr\}$$

и определим *момент-угол комплекс*

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K}=\bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}}B_\sigma\subset(\mathbb{D}^2)^m,$$

где объединение берётся в полидиске $(\mathbb{D}^2)^m$. По построению, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является T^m-инвариантным подпространством, содержащим стандартный тор $\mathbb{T}^m\subset(\mathbb{D}^2)^m$.

Пример 3.1. Если $\mathcal{K}=\partial(\Delta^{m-1})$ — граница $(m-1)$-мерного симплекса, то $\mathcal{Z}_\mathcal{K}=\partial((\mathbb{D}^2)^m)\cong S^{2m-1}$.

Предложение 3.2.

1. *Пусть $\mathcal{K}=\mathcal{K}_P$ — граница симплициального многогранника, двойственного к простому многограннику P. Тогда соответствующий момент-угол комплекс T^m-эквивариантно гомеоморфен момент-угол многообразию $\mathcal{Z}_P$.*
2. *Если $\mathcal{K}$ является симплициальным разбиением $(n-1)$-мерной сферы, то $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является (замкнутым) T^m-многообразием.*
3. *Если $\mathcal{K}$ является симплициальным разбиением $(n-1)$-мерного многообразия, то дополнение $\mathcal{Z}_\mathcal{K}\setminus\mathbb{T}^m$ до стандартного тора $\mathbb{T}^m\subset(\mathbb{D}^2)^m$ является открытым T^m-многообразием.*

Предложение 3.3. *Сопоставление $\mathcal{K}\mapsto\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ задаёт функтор из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений.*

Одним из наших основных результатов о момент-угол комплексах является вычисление их колец когомологий в терминах комбинаторики симплициальных комплексов. Напомним, что *кольцом граней* (или *кольцом Стенли–Риснера*) симплициального комплекса $\mathcal{K}$ называется градуированное факторкольцо

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}]=\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/\mathcal{I},$$

где $\deg v_i = 2$, а идеал $\mathcal{I}$ порождён мономами $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}$.

Теорема 3.4. *Имеют место функториальные по $\mathcal{K}$ изоморфизмы градуированных алгебр*

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathrm{Tor}^*_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}\bigl(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}\bigr) \cong H\bigl[\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\bigr].$$

Здесь последняя часть формулы обозначает алгебру когомологий дифференциальной градуированной алгебры $\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$, где образующие u_i внешней алгебры имеют степень 1, а дифференциал задан на образующих следующим образом: $du_i = v_i$, $dv_i = 0$.

Второй изоморфизм в предыдущей теореме основан на стандартном вычислении Tor-алгебры при помощи комплекса Кошуля. Доказательство изоморфизма между когомологиями момент-угол комплекса и Tor-алгеброй основан на построении клеточного разбиения пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ (при котором каждый диск $\mathbb{D}^2$ разбивается на три клетки) и анализе умножения в клеточных коцепях при помощи специальной клеточной аппроксимации диагонального отображения $\Delta\colon \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K} \times \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, функториальной относительно отображений симплициальных комплексов. При этом показано, что биградуировка в Tor-модулях имеет явную геометрическую реализацию, обусловленную введённой в $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ биградуированной клеточной структурой. Детали см. в [БП04, §8.1].

Теорема 3.4 даёт достаточно эффективное описание кольца $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ и легко применяется для конкретных вычислений с симплициальными комплексами. В случае комплексов с большим числом вершин для вычисления размерностей биградуированных компонент Tor-модулей можно привлечь известные пакеты компьютерных программ (Macaulay2, Bistellar и др.). Кроме того, применение теоремы Хохстера позволяет свести вычисление к когомологиям полных подкомплексов в $\mathcal{K}$:

Теорема 3.5. *Имеют место изоморфизмы групп*

$$H^k(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{\omega \subset [m]} \widetilde{H}^{k-|\omega|-1}(\mathcal{K}_\omega),$$

где $\mathcal{K}_\omega$ — полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ (ограничение $\mathcal{K}$ на подмножество $\omega \subset [m]$).

Тем самым конструкция момент-угол комплексов позволила применить методы эквивариантной топологии для изучения комбинаторики симплициальных комплексов и алгебраических свойств их колец граней, придавая новое, геометрическое, измерение «комбинаторной коммутативной алгебре». В частности, вычисление когомологий момент-угол комплексов позволило топологически интерпретировать гомологические инварианты колец граней, такие как Tor-алгебры и алгебраические числа Бетти.

Несмотря на простоту конструкций момент-угол комплексов и многообразий, их топология достаточно сложна. Это видно уже из вычислений (на основе теоремы 3.4) когомологий момент-угол комплексов, соответствующих комплексам $\mathcal{K}$ с небольшим числом вершин. Оказалось, что в алгебрах рациональных когомологий момент-угол комплексов существуют нетривиальные произведения Масси [Ба03]. В некоторых случаях (например, для границ многоугольников или остовов симплексов) удаётся явно описать топологический тип пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ (см. пример 3.7), но всяких раз такое описание использует весьма тонкий анализ различных конструкций момент-угол комплексов.

Важным аспектом теории момент-угол комплексов является их тесная взаимосвязь с конфигурациями координатных подпространств и их дополнениями. Эти пространства играют важную роль в алгебраической геометрии, теории особенностей и теории шарнирных механизмов.

Координатное подпространство $\mathbb{C}^m$ можно задать в виде

$$L_\omega = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\}, \tag{3.1}$$

где $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$.

Для каждого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ рассмотрим *конфигурацию комплексных координатных подпространств* $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \{L_\omega \colon \omega \notin \mathcal{K}\}$ и её *дополнение* в $\mathbb{C}^m$:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\omega \notin \mathcal{K}} L_\omega.$$

Сопоставление $\mathcal{K} \mapsto U(\mathcal{K})$ определяет взаимно однозначное соответствие между симплициальными комплексами на множестве $[m]$ и дополнениями координатных конфигураций в $\mathbb{C}^m$, сохраняющее отношение вложения.

Теорема 3.6. *Для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ имеется T^m-эквивариантная деформационная ретракция*

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \hookrightarrow U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Z}_\mathcal{K}.$$

Наличие гомотопической эквивалентности $U(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ позволяет применять наши результаты о момент-угол комплексах в теории конфигураций. В частности, мы получаем решение известной задачи об описании кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Отметим, что другие известные результаты о когомологиях дополнений конфигураций координатных подпространств не описывают мультипликативной структуры (как общая теорема Горески–Макферсона [GM88]), либо дают лишь описание произведения двух данных коциклов в комбинаторных терминах (как результат де Лонгвилле [dL00]). Наш результат о момент-угол комплексах даёт исчерпывающее глобальное описание кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Результаты Горески–Макферсона (в части координатных конфигураций) и де Лонгвилле сводятся к частным случаям нашего результата при помощи двойственности Александера.

Пример 3.7. Пусть $\mathcal{K}$ представляет собой набор из m точек. Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентно дополнению

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \{z_i = z_j = 0\}$$

всех координатных плоскостей коразмерности два. Кольцо граней имеет вид

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/(v_i v_j,\ i \neq j).$$

Пространство коциклов в алгебре $\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ имеет базис из мономов

$$v_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \cdots u_{i_k}, \quad k \geqslant 1 \text{ и } i_p \neq i_q \text{ при } p \neq q.$$

Пространство $(k+1)$-мерных кограниц порождено элементами вида $d(u_{i_1} \cdots u_{i_k})$. Вычисляя размерности этих пространств, получаем

$$\begin{aligned} &\dim H^0(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = 1, \quad \dim H^1(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H^2(U(K)) = 0,\\ &\dim H^{k+1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = mC_{m-1}^{k-1} - C_m^k = (k-1)C_m^k, \quad 2 \leqslant k \leqslant m, \end{aligned}$$

а умножение в когомологиях дополнения $U(\mathcal{K})$ тривиально.

В частности, при $m = 3$ получаем

$$H^*(U(\mathcal{K})) \cong H^*(S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4),$$

и можно показать, что этот изоморфизм колец когомологий индуцирован гомотопической эквивалентностью пространств. Более того, дополнение $U(\mathcal{K})$ из этого примера гомотопически эквивалентно букету сфер для любого m [ГТ04].

4. Новые области приложений

Момент-угол комплексы нашли приложения в теории действий алгебраических групп, а именно, при построении *множеств типа Кемпфа–Несс* для действий алгебраического тора на квазиаффинных многообразиях. В классической ситуации действий алгебраических групп на аффинных многообразиях понятие множества Кемпфа–Несс позволяет заменить категорный фактор на факторпространство по действию максимальной компактной подгруппы. В [Па08] показано, что момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ играет роль множества Кемпфа–Несс для класса действий алгебраического тора на квазиафинных многообразиях (дополнениях конфигураций координатных подпространств), возникающих в подходе Батырева–Кокса к торическим многообразиям на основе геометрической теории инвариантов. Таким образом, наши результаты о момент-угол комплексах применимы и к вычислению когомологий этих «торических» множеств Кемпфа–Несс. В случае неособых проективных торических многообразий соответствующие множества Кемпфа–Несс могут быть описаны как полные пересечения вещественных квадрик в комплексном пространстве.

Возвращаясь к нашему описанию момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$ как полному пересечению вещественных квадрик, отметим область приложений, открытую в [BM06]. В этой работе был рассмотрен достаточно общий класс полных пересечений вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m$, называемых *линками* (условия, накладываемые на уравнения квадрик обеспечивают неособость их пересечения). В [BM06] показано, что все линки допускают структуру некэлеровых комплексных многообразий (в случае линков нечётных размерностей необходимо взять произведение с окружностью), тем самым обобщая известные серии некэлеровых многообразий Хопфа и Калаби–Экмана. Можно показать, что класс линков совпадает с классом момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$, соответствующих простым многогранникам. Тем самым открываются новые взаимосвязи между торической топологией и комплексной геометрией.

За последние 10 лет появились различные конструкции широкого класса простых многогранников, обобщающих замечательные серии пермутоэдров, ассоциэдров (многограников Сташефа), циклоэдров (многограников Бота–Таубса). Например, каждому связному простому графу (т.е. графу без петель и кратных ребер) с $(n+1)$ вершиной сопоставляется простой n-мерный многогранник, так что пермутоэдру соответствует полный граф, ассоциэдру — путь, а циклоэдру — цикл (см. например, [PRW07]).

Благодаря конструкции момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ и квазиторического многообразия в виде $M^{2n} = \mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ эти результаты позволили ввести явные примеры новых классов многообразий и бесспорно будут способствовать развитию взаимосвязей между комбинаторикой, теорией графов и алгебраической топологией (см. [Bu08]).

Список литературы

[Ба03] И. В. Баскаков. *Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов.* Успехи мат. наук **58** (2003), вып. 5, 199–200.

[ББП04] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Алгебры клеточных коцепей и действия торов.* Успехи мат. наук **59** (2004), вып. 3, 159–160.

[БП99] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора и комбинаторика многогранников.* Труды МИРАН им. Стеклова, **225**, 1999, 96–131.

[БП04] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004.

[БР98] В. М. Бухштабер, Н. Рэй. *Торические многообразия и комплексные кобордизмы.* Успехи мат. наук **53** (1998), вып. 2, с. 139–140.

[Ви71] Э. Б. Винберг. *Дискретные линейные группы, порождённые отражениями.* Известия АН СССР, сер. матем. **35** (1971), 1072–1112.

[ГТ04] Е. Грбич, С. Терио. *Гомотопический тип дополнения конфигурации координатных подпространств коразмерности два.* Успехи мат. наук **59** (2004), вып. 6, 203–204.

[Да78] В. И. Данилов. *Геометрия торических многообразий.* Успехи мат. наук **33** (1978), вып. 2, 85–134.

[До01] Н. Э. Добринская. *Проблема классификации квазиторических многообразий над заданным простым многогранником.* Функ. ан. и его прил. **35** (2001), вып. 2, 3–11.

[Ер08] Н. Ю. Ероховец. *Инвариант Бухштабера простых многогранников.* Успехи мат. наук **63** (2008), вып. 5, 187–188.

[Му80] О. Р. Мусин. *О действиях окружности на гомотопических проективных пространствах.* Мат. заметки **28** (1980), вып. 1, 139–152.

[Па08] Т. Е. Панов. *Торические множества типа Кемпфа–Несс.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова **263** (2008), 159–172.

[At82] M. F. Atiyah. *Convexity and commuting Hamiltonians.* Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.

[BM06] F. Bosio, L. Meersseman. *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes.* Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127.

[BH98] W. Bruns, J. Herzog. *Cohen–Macaulay Rings*, revised edition. Cambridge Studies in Adv. Math., vol. **39**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[BP02] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics.* University Lecture Series **24**. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 2002.

[BPR07] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds.* Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2, 219–242.

[BR01] V. M. Buchstaber, N. Ray. *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes.* Internat. Math. Res. Notices **4** (2001), 193–219.

[BR08] V. M. Buchstaber, N. Ray. *An invitation to toric topology: vertex four of a remarkable tetrahedron*, in: "Toric Topology" (M. Harada *et al*, eds.). Contemp. Math., vol. **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 1–27.

[Bu08] V. M. Buchstaber. *Lectures on Toric Topology.* Trends in Mathematics, Information Center for Mathematical Sciences, vol. **11**, 2008, no. 1, pp. 1–55.

[DJ91] M. W. Davis, T. Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.

[dL00] M. de Longueville. *The ring structure on the cohomology of coordinate subspace arrangements.* Math. Z. **233** (2000), no. 3, 553–577.

[De88] T. Delzant. *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment.* Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 315–339.

[DH82] J. Duistermaat, G. Heckman. *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space.* Invent. Math. **69** (1982), no. 2, 259–268.

[Fu93] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties.* Ann. of Math. Studies **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

[GKM98] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localisation theorem.* Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.

[GM88] M. Goresky, R. MacPherson. *Stratified Morse Theory.* Springer-Verlag, Berlin–New York, 1988. [Русский перевод: М. Горески, Р. Макферсон, *Стратифицированная теория Морса,* М.: Мир, 1991.]

[GZ99] V. W. Guillemin, C. Zara. *Equivariant de Rham theory and graphs.* Asian J. Math. **3** (1999), no. 1, 49–76.

[Ho77] M. Hochster. *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in *Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference).* B. R. McDonald and R. Morris, eds., Dekker, New York, 1977, pp. 171–223.

[PRW07] A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams. *Faces of generalized permutohedra.* Preprint arXiv:math/0609184.

[St96] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition. Progr. in Math. **41**. Birkhäuser, Boston, 1996.

[St68] R. E. Stong. *Notes on Cobordism Theory.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1968. [Русский перевод: Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов (с приложением В. М. Бухштабера),* М.: Мир, 1973.]

Механико-математический факультет МГУ

E-mail address: buchstab@mi.ras.ru

E-mail address: tpanov@mech.math.msu.su