ВЫСШИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ УАЙТХЕДА ДЛЯ МОМЕНТ-УГОЛ-КОМПЛЕКСОВ И ПОДСТАНОВКИ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

С. А. АБРАМЯН AND Т. Е. ПАНОВ

Посвящается 75-летию нашего Учителя Виктора Матвеевича Бухштабера

Аннотация. Мы изучаем вопрос реализуемости итерированных высших произведений Уайтхеда с данной формой вложенных скобок симплициальными комплексами, на основе конструкции момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. А именно, будем говорить, что симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ реализует итерированное высшее произведение Уайтхеда w, если w является нетривиальным элементом в гомотопической группе $\pi_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Комбинаторный подход к вопросу реализуемости использует операцию подстановки симплициальных комплексов: для любого итерированного высшего произведения w мы описываем симплициальный комплекс $\partial\Delta_w$, реализующий w. Более того, для специального вида вложенных скобок внутри w мы доказываем, что $\partial\Delta_w$ является наименьшим симплициальным комплексом, реализующим w. Мы также даём комбинаторный критерий нетривиальности произведения w. При доказательстве нетривиальности мы используем представителя образа w при гомоморфизме Гуревича в клеточных цепях момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и описание умножения в когомологиях $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Мы также используем алгебраический подход на основе коалгебраической версии комплексов Кошуля и Тейлор коалгебры граней симплициального комплекса $\mathcal{K}$ для описания канонических циклов, соответствующих итерованным высшим произведениям w. Тем самым получается другой критерий реализуемости w.

Содержание

Работа первого автора финансировалась в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100», а также поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-51-50005) и Фондом Саймонса в НМУ.

Работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 17-01-00671, 18-51-50005) и Фондом Саймонса в НМУ.

1. Введение

Высшие произведения Уайтхеда являются важными инвариантами нестабильного гомотопического типа. Они изучались с 1960-х годов в работах гомотопических топологов, таких как К. Харди [Ha], Дж. Портер [Po] и Ф. Уилльямс [Wi].

Появление момент-угол-комплексов и полиэдральных произведений в торической топологии в конце 1990-х открыло новые перспективы в теории высших гомотопических инвариантов, таких как высшие произведения Уайтхеда. Гомотопическое расслоение полиэдральных произведений

$$(D^2,S^1)^{\mathcal{K}}\to(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}\to(\mathbb{C}P^\infty)^m \tag{1.1}$$

было использовано в [PR] как универальная модель для изучения высших произведений Уайтхеда. Здесь $(D^2,S^1)^{\mathcal{K}}=\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — момент-угол-комплекс, а $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ — пространство, гомотопически эквивалентное пространству Дэвиса–Янушкевича [BP1, BP2]. Форма вложенных скобок в итерированном произведении Уайтхеда отражается в комбинаторике симплициального комплекса $\mathcal{K}$.

Существует два класса симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых момент-угол-комплексы обладают особенно хорошими свойствами. С точки зрения геометрии интересно рассматривать комплексы $\mathcal{K}$, для которых $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — многообразие. Такими являются, например, симплициальные разбиения сфер или границы симплициальных многогранников. Получаемые момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ часто обладают замечательными геометрическими свойствами [Pa]. С другой стороны, с точки зрения теории гомотопий важным является класс симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентен букету сфер. Мы обозначаем этот класс B_Δ. Сферы в букете обычно выражаются в терминах итерированных высших произведений Уайтхеда канонических двумерных сфер в полиэдральном произведении $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$. Будем обозначать W_Δ подкласс в B_Δ, состоящий из тех комплексов $\mathcal{K}$, для которых $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является букетом итерированных высших произведений Уайтхеда. Вопрос описания класса W_Δ изучался в [PR] и был явно сформулирован в [BP2, Problem 8.4.5]. Из результатов [PR] и [GPTW] следует, что $W_\Delta=B_\Delta$, если ограничиться рассмотрением *флаговых* симплициальных комплексов; при этом флаговый комплекс $\mathcal{K}$ принадлежит классу W_Δ в точности тогда, когда его одномерный остов является хордовым графом. Более того, известно, что W_Δ содержит направленные MF-комплексы [GT], сдвинутые (shifted) и полностью заполняемые (totally fillable) комплексы [IK1, IK2]. С другой стороны, недавно в работе [Ab] было показано, что класс W_Δ *строго* содержится в B_Δ. Важным представляется вопрос *реализуемости* итерированного высшего произведения Уайтхеда w с данной формой вложенных скобок: будем говорить, что симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *реализует* итерированное высшее произведение Уайтхеда w, если w является нетривиальным элементом в $\pi_*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ (см. определение 2.2). Например, граница симплекса $\mathcal{K}=\partial\Delta(1,\dots,m)$ реализует однократное (не итерированное) высшее произведение Уайтхеда $[\mu_1,\dots,\mu_m]$, которое отображает $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}=S^{2m-1}$ в толстый букет $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Мы предлагаем два подхода к обсуждаемым выше вопросам. Первый подход комбинаторный: используя операцию подстановки симплициальных комплексов (см. § 4), мы описываем симплициальный комплекс $\partial\Delta_w$, который реализует произвольное данное высшее произведение Уайтхеда w (теорема 5.1). Более того, для специального вида вложенных скобок внутри w мы доказываем в теореме 5.2 а), что $\partial\Delta_w$ — наименьший комплекс реализующий w. Также в теореме 5.2 б) мы приводим комбинаторный критерий нетривиальности произведения w. В доказательстве нетривиальности мы используем представителя образа w при гомоморфизме Гуревича в клеточных цепях момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и описание умножения в когомологиях $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ из [BP1].

Теоремы 5.1, 5.2 и набор примеров, не вошедших в текст данной работы, позволяют предположить, что $\partial\Delta_w$ является наименьшим комплексом, реализующим w, для любого итерированного высшего произведения Уайтхеда (см. вопрос 5.5).

Второй подход алгебраический: используя коалгебраические версии комплексов Кошуля и Тейлор коалгебры граней комплекса $\mathcal{K}$, мы описываем канонические циклы, соответствующие итерированным высшим произведениям Уайтхеда w. Это даёт нам другой критерий реализуемости произведения w в теореме 7.1.

2. Предварительные сведения

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]=\{1,\dots,m\}$ — набор подмножеств $I\subset[m]$, замкнутый относительно взятия любых подмножеств. Будем называть $I\in\mathcal{K}$ *симплексом* или *гранью* $\mathcal{K}$. Мы всегда предполагаем, что $\mathcal{K}$ содержит $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\}$, $i=1,\dots,m$. Мы отождествляем симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ и его геометрическую реализацию при обсуждении топологии и гомотопического типа $\mathcal{K}$.

Будем обозначать через Δ^{m-1} или $\Delta(1,\dots,m)$ полный симплекс на множестве $[m]$. Аналогично, мы обозначаем через $\Delta(I)$ симплекс на множестве вершин $I\subset[m]$ и обозначаем его границу через $\partial\Delta(I)$. *Недостающая грань* или *минимальная неграмь* $\mathcal{K}$ — такое подмножество $I\subset[m]$, что $I\notin\mathcal{K}$, но $\partial\Delta(I)\subset\mathcal{K}$.

Зафиксируем множество из m пар отмеченных клеточных комплексов

$$(\underline{X},\underline{A})=\{(X_1,A_1),\dots,(X_m,A_m)\}$$

где $A_i\subset X_i$. Для каждого симплекса $I\in\mathcal{K}$ положим

$$(\underline{X},\underline{A})^I=\{(x_1,\dots,x_m)\in X_1\times\dots\times X_m\mid x_j\in A_j \text{ для } j\notin I\}.$$

Полиэдральным произведением пар $(\underline{X},\underline{A})$, соответствующим $\mathcal{K}$, называется следующее подмножество в $X_1\times\dots\times X_m$:

$$(\underline{X},\underline{A})^{\mathcal{K}}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}(\underline{X},\underline{A})^I\qquad(\subset X_1\times\dots\times X_m).$$

В случае, когда $(X_i,A_i)=(D^2,S^1)$ для всех i, мы используем обозначение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ для $(D^2,S^1)^{\mathcal{K}}$ и называем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}=(D^2,S^1)^{\mathcal{K}}$ *момент-угол-комплексом*. Также, если $(X_i,A_i)=(X,pt)$ для всех i, где pt — отмеченная точка, мы используем сокращённое обозначение $X^{\mathcal{K}}$ для $(X,pt)^{\mathcal{K}}$.

Теорема 2.1 ([BP2, теорема 4.3.2])**.** *Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является гомотопическим слоем канонического включения $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}\hookrightarrow(\mathbb{C}P^\infty)^m$.*

Существует также более явное описание отображения вложения слоя $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\to(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ в (1.1). Рассмотрим отображение пар $(D^2,S^1)\to(\mathbb{C}P^\infty,pt)$, гомеоморфно отображающее внутренность диска на дополнение к отмеченной точке в $\mathbb{C}P^1$. Из функториальности получаем отображение полиэдральных произведений $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}=(D^2,S^1)^{\mathcal{K}}\to(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Общее определение высшего произведения Уайтхеда можно найти в статье [Ha]. Мы же опишем прозведения Уайтхеда в пространстве $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ и их поднятия в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Как следует из рассмотрения ниже, в этом случае за счёт канонического выбора продолжения отображений удаётся эффективно контролировать неоднозначность, возникающую в определении высшего произведения Уайтхеда.

Рассмотрим *i-ое координатное отображение*

$$\mu_i\colon(D^2,S^1)\to S^2\cong\mathbb{C}P^1\hookrightarrow(\mathbb{C}P^\infty)^{\vee m}\hookrightarrow(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}.$$

Здесь второе отображение — каноническое вложение $\mathbb{C}P^1$ в i-ое слагаемое букета, а третье индуцировано вложением m отдельные точек в $\mathcal{K}$. *Произведение Уайтхедал* (или *скобка Уайтхеда*) $[\mu_i, \mu_j]$ сфероидов μ_i и μ_j — гомотопический класс отображения

$$S^3 \cong \partial D^4 \cong \partial(D^2 \times D^2) \cong (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2) \xrightarrow{[\mu_i,\mu_j]} (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$$

где

$$[\mu_i, \mu_j](x, y) = \begin{cases} \mu_i(x) & \text{для } (x, y) \in D^2 \times S^1; \\ \mu_j(y) & \text{для } (x, y) \in S^1 \times D^2. \end{cases}$$

Любое произведение Уайтхеда $[\mu_i, \mu_j]$ становится тривиальным при композиции с вложением $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \hookrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^m \simeq K(\mathbb{Z}^m, 2)$. Отсюда следует, что $[\mu_i, \mu_j]\colon S^3 \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ поднимается до отображения в слой:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^m \\ & S^3 \arrow[u, "{[\mu_i,\mu_j]}"'] \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}$$

Мы будем использовать то же обозначение $[\mu_i, \mu_j]$ для поднятия $S^3 \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Сразу отметим, что поднятие может быть выбрано канонически как включение подкомплекса

$$[\mu_i, \mu_j]\colon S^3 \cong (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2) \hookrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$

Произведение Уайтхеда $[\mu_i, \mu_j]$ тривиально тогда и только тогда, когда отображение $[\mu_i, \mu_j]\colon S^3 \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ может быть продолжено на $D^4 \cong D^2_i \times D^2_j \hookrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Последнее равносильно тому, что $\Delta(i, j) = \{i, j\}$ является 1-симплексом $\mathcal{K}$.

Высшие произведения Уайтхеда определяются индуктивно следующим образом. Пусть $\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_n}$ — такой набор сфероидов, что для любого k высшее произведение $[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_k}}, \ldots, \mu_{i_n}]$ тривиально. Тогда для каждого $(n-1)$-кратного произведения существует *каноническое* продолжение $\overline{[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_k}}, \ldots, \mu_{i_n}]}$ отображения на $D^{2(n-1)}$, которое является композицией

$$\overline{[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_k}}, \ldots, \mu_{i_n}]}\colon D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_{k-1}} \times D^2_{i_{k+1}} \times \ldots \times D^2_{i_n} \hookrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}},$$

причём все эти продолжения согласованы. Определим n-кратное произведение сфероидов $\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_n}$ как класс отображения

$$S^{2n-1} \cong \partial(D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_n}) \cong \bigcup_{k=1}^{n} D^2_{i_1} \times \ldots \times S^1_{i_k} \times \ldots \times D^2_{i_n} \xrightarrow{[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_n}]} (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}},$$

задаваемого следующим образом:

$$[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_n}](x_1, \ldots, x_n) = \overline{[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu}_{i_k}, \ldots, \mu_{i_n}]}(x_1, \ldots, \widehat{x}_k, \ldots, x_n), \quad \text{если } x_k \in S^1_{i_k}.$$

В Предложении 3.3 ниже мы показываем, что высшее произведение $[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_p}]$ определено в $\pi_{2p-1}((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}})$ в точности тогда, когда $\partial\Delta(i_1, \ldots, i_p)$ — подкомплекс в $\mathcal{K}$, и $[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_p}]$ тривиально в точности тогда, когда $\Delta(i_1, \ldots, i_p)$ — симплекс $\mathcal{K}$.

Наряду с высшими произведениями Уайтхеда канонических сфероидов μ_i мы будем рассматривать *общие итерированные* высшие произведения Уайтхеда, т. е. высшие произведения, в которых в качестве любого аргумента может быть использовано высшее произведение, например,

$$\Big[\mu_1, \mu_2, [\mu_3, \mu_4, \mu_5], \big[\mu_6, \mu_{13}, [\mu_7, \mu_8, \mu_9], \mu_{10}\big], [\mu_{11}, \mu_{12}]\Big].$$

Среди общих итерированных произведений Уайтхеда мы выделяем *сгнездованные* произведения, которые имеют вид

$$w = \Big[\big[\ldots\big[[\mu_{i_{11}}, \ldots, \mu_{i_{1p_1}}], \mu_{i_{21}}, \ldots, \mu_{i_{2p_2}}\big], \ldots\big], \mu_{i_{n1}}, \ldots, \mu_{i_{np_n}}\Big]\colon S^{d(w)} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}.$$

Здесь $d(w)$ — размерность w. Иногда мы называем $[\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_p}]$ *однократным* (неитерированным) высшим произведением Уайтхеда.

Как и в случае обычных произведений Уайтхеда любое высшее произведение Уайтхеда поднимается до отображения $S^{d(w)}\to\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ из размерностных соображений.

Определение 2.2. Будем говорить, что симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *реализует* итерированное высшее произведение Уайтхеда w, если w — нетривиальный элемент в $\pi_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

Пример 2.3. Комплекс $\partial\Delta(i_1,\dots,i_p)$ реализует однократное произвдение Уайтхеда $[\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_p}]$.

Конструкция 2.4 (клеточная структура пространства $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$)**.** Следуя [BP2, §4.4], мы представляем D^2 в виде объединения 3 клеток: точка $1\in D^2$ — 0-клетка; дополнение до 1 на граничной окружности — 1-клетка, которую мы обозначаем S; и внутренность D^2 — 2-клетка, которую мы обозначаем D. Эти клетки канонически ориентированы как подмножества плоскости $\mathbb{R}^2$. Беря произведения, мы получаем клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$, в котором клетки соответствуют таким парам подмножеств $J,I\subset[m]$, что $J\cap I=\varnothing$: множество J соответствует S-клеткам в произведении, а I — D-клеткам. Клетку полидиска $(D^2)^m$, соответствующую паре J,I, будем обозначать через $\varkappa(J,I)$:

$$\begin{aligned}\varkappa(J,I)=\prod_{i\in I}D_i\times\prod_{j\in J}S_j=\\ =\big\{(x_1,\dots,x_m)\in(D^2)^m\mid\\ x_i\in D \text{ при } i\in I,\ x_j\in S \text{ при } j\in J \text{ и } x_l=1 \text{ при } l\notin J\cup I\big\}.\end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является клеточным подкомплексом в $(D^2)^m$; причём клетки $\varkappa(J,I)\subset\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ выделяются условием $I\in\mathcal{K}$.

Для данного подмножества $J\subset[m]$ обозначим через $\mathcal{K}_J$ *полный подкомплекс* $\mathcal{K}$ на вершинах J, т. е.

$$\mathcal{K}_J=\{I\in\mathcal{K}|\,I\subset J\}.$$

Пусть $C_{p-1}(\mathcal{K}_J)$ — группа $(p-1)$-мерных симплициальных цепей $\mathcal{K}_J$; её базис состоит из симплексов $L\in\mathcal{K}_J$, $|L|=p$. Мы также будем обозначать через $\mathcal{C}_q(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ группу q-мерных клеточных цепей $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ относительно клеточного разбиения, описанного выше.

Теорема 2.5 (см. [BP2, теоремы 4.5.7, 4.5.8])**.** *Гомоморфизмы*

$$C_{p-1}(\mathcal{K}_J)\longrightarrow\mathcal{C}_{p+|J|}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),\quad L\mapsto\operatorname{sign}(L,J)\varkappa(J\backslash L,L)$$

индуцируют инъективные гомоморфизмы

$$\widetilde{H}_{p-1}(\mathcal{K}_J)\hookrightarrow H_{p+|J|}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),$$

которые функториальны относительно включений подкомплексов. Здесь $L\in\mathcal{K}_J$ — симплекс, а $\operatorname{sign}(L,J)$ — знак перетасовки (L,J). Включения выше индуцируют изоморфизм абелевых групп

$$\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_*(\mathcal{K}_J)\xrightarrow{\cong}H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

В случае когомологий мы имеем изомофризм колец

$$\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_J)\xrightarrow{\cong}H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

Структура кольца в левой части задаётся отображениями

$$H^{k-|I|-1}(\mathcal{K}_I)\otimes H^{\ell-|J|-1}(\mathcal{K}_J)\to H^{k+\ell-|I|-|J|-1}(\mathcal{K}_{I\cup J}),$$

которые индуцированны каноническими симплициальными включениями $\mathcal{K}_{I\cup J} \to \mathcal{K}_I * \mathcal{K}_J$ *для* $I \cap J = \varnothing$ *и нулевые для* $I \cap J \neq \varnothing$.

3. Образ высших произведений Уайтхеда при гомоморфизме Гуревича

В этом параграфе мы рассматриваем гомоморфизм Гуревича $h\colon \pi_*(\mathcal{Z_K}) \to H_*(\mathcal{Z_K})$. Каноническая клеточная цепь, представляющая образ при гомоморфизме Гуревича $h(w) \in H_*(\mathcal{Z_K})$ *сгнездованного* высшего произведения Уайтхеда w была описана в [Ab].

Лемма 3.1 ([Ab, лемма 4.1])**.** *Образ при гомоморфизме Гуревича*

$$h\Big(\big[[\ldots[[\mu_{i_{11}},\ldots,\mu_{i_{1p_1}}],\mu_{i_{21}},\ldots,\mu_{i_{2p_2}}],\ldots],\mu_{i_{n1}},\ldots,\mu_{i_{np_n}}\big]\Big) \in H_{2(p_1+\cdots+p_n)-n}(\mathcal{Z_K})$$

представляется клеточной цепью

$$h_c(w) = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p_k} D_{i_{k1}}\cdots D_{i_{k(j-1)}} S_{i_{kj}} D_{i_{k(j+1)}}\cdots D_{i_{kp_k}}\right).$$

Обобщение этой леммы представлено ниже. Оно даёт простую индуктивную формулу, описывающую каноническую клеточную цепь $h_c(w)$, которая представляет образ *общего* итерированного произведения Уайтхеда $w \in \pi_*(\mathcal{Z_K})$ при гоморфизме Гуревича, обеспечивая тем самым эффективный способ определения нетривиальных произведений Уайтхеда в гомотопических группах момент-угол-комплекса $\mathcal{Z_K}$. Некоторые приложения приведены ниже.

Лемма 3.2. *Пусть* w *— общее итерированное произведение Уайтхеда*

$$w = [w_1,\ldots,w_q,\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_p}] \in \pi_*(\mathcal{Z_K}).$$

Здесь w_k *— (общие итерированные) высшие произведения Уайтхеда при* $k = 1,\ldots,q$. *Тогда образ при гоморфизме Гуревича* $h(w) \in H_*(\mathcal{Z_K})$ *представляется следующей канонической клеточной цепью:*

$$h_c(w) = h_c(w_1)\cdots h_c(w_q)\Big(\sum_{k=1}^{p} D_{i_1}\cdots D_{i_{k-1}} S_{i_k} D_{i_{k+1}}\cdots D_{i_p}\Big).$$

Будем называть $h_c(w)$ *канонической* клеточной цепью, соответствующей итерированному высшему произведению Уайтхеда w. В случае сгнездованных произведений лемма 3.2 сводится к лемме 3.1.

Доказательство леммы 3.2. Пусть $d, d_1,\ldots,d_q$ — размерности произведений w, $w_1,\ldots,w_q$, соответственно. Произведение Уайтхеда w представляется композицией

$$\begin{aligned}
(3.1)\quad S^d &\cong \partial(D^{d_1}\times\cdots\times D^{d_q}\times D^2_{i_1}\times\cdots\times D^2_{i_p}) \cong \\
&\cong \Big(D^{d_1}\times\cdots\times D^{d_q}\times\Big(\bigcup_{k=1}^{p} D^2_{i_1}\times\cdots\times S^1_{i_k}\times\cdots\times D^2_{i_p}\Big)\Big)\cup \\
&\cup\Big(\Big(\bigcup_{l=1}^{q} D^{d_1}\times\cdots\times S^{d_l-1}\times\cdots\times D^{d_q}\Big)\times D^2_{i_1}\times\cdots\times D^2_{i_p}\Big) \xrightarrow{\gamma} \\
&\xrightarrow{\gamma} \Big(S^{d_1}\times\cdots\times S^{d_q}\times\Big(\bigcup_{k=1}^{p} D^2_{i_1}\times\cdots\times S^1_{i_k}\times\cdots\times D^2_{i_p}\Big)\Big)\cup \\
&\cup\Big(\Big(\bigcup_{l=1}^{q} S^{d_1}\times\cdots\times pt\times\cdots\times S^{d_q}\Big)\times D^2_{i_1}\times\cdots\times D^2_{i_p}\Big) \to \mathcal{Z_K}.
\end{aligned}$$

Отображение γ стягивает границу каждого диска D^{d_l}, $l = 1,\ldots,q$. Заметим, что всё декартово произведение в последней строке имеет размерность строго меньше d, а значит, его образ при гомоморфизме Гуревича тривиален.

Используя то же рассуждение для сфер $S^{d_1}, \dots, S^{d_q}$, получаем, что w пропускается через отображение из S^d в объединение произведений дисков и окружностей, которое являются подкомплексом в $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. По предположению индукции, каждая сфера $S^{d_k}, k = 1, \dots, q$, отображается на подкомплекс в $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, соответствующий клеточной цепи $h_c(w_k)$. Следовательно, по формуле (3.1) образ при гомоморфизме Гуревича произведения w представляется подкомплексом, соответствующим произведению всех $h_c(w_1), \dots, h_c(w_q)$ и $\sum\limits_{k=1}^{p} D_{i_1} \cdots D_{i_{k-1}} S_{i_k} D_{i_{k+1}} \cdots D_{i_p}$. □

В качестве первого приложения мы получаем комбинаторный критерий нетривиальности однократного высшего произведения.

Предложение 3.3. *Однократное высшее произведение Уайтхеда* $[\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p}]$

а) *определено в* $\pi_{2p-1}((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})$ *(и поднимается в* $\pi_{2p-1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$*) тогда и только тогда, когда* $\partial\Delta(i_1, \dots, i_p)$ *— подкомплекс в* $\mathcal{K}$*;*

б) *тривиально тогда и только тогда, когда* $\Delta(i_1, \dots, i_p)$ *— симплекс в* $\mathcal{K}$*.*

Доказательство. Если произведение Уайтхеда $[\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p}]$ определено, то каждое $(p-1)$-кратное произведение $[\mu_{i_1}, \dots, \widehat{\mu}_{i_k} \dots, \mu_{i_p}]$ тривиально. По предположению индукции, это влечёт, что $\partial\Delta(i_1, \dots, i_p)$ — подкомплекс в $\mathcal{K}$.

Предположим теперь, что $\Delta(i_1, \dots, i_p)$ — не симплекс $\mathcal{K}$. Тогда по лемме 3.2 образ при гомоморфизме Гуревича $h([\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p}])$ определяет нетривиальный гомологический класс в $H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, соответствующий $[\partial\Delta(i_1, \dots, i_p)] \in \widetilde{H}_*(\mathcal{K}_{i_1,\dots,i_p})$ при изоморфизме из теоремы 2.5. Таким образом, $[\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p}]$ не тривиально. □

Это предложение будет обобщено на случай итерированных высших произведений в § 5.

Леммы 3.1, 3.2 и теорему 2.5 можно использовать для определения симплициальных комплексов, для которых $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — букет итерированных высших произведений Уайтхеда. Напомним следующее определение.

Определение 3.4. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ принедлежит классу W_Δ, если $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентно букету сфер, и каждая сфера в букете является поднятием линейной комбинации итерированных высших произведений Уайтхеда.

В качестве первого примера применения нашего метода выведем результаты Ирие и Кисимото: сдвинутые и вполне заполняемые комплексы принадлежат классу W_Δ.

Пример 3.5. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *сдвинутым* (shifted), если его вершины можно занумеровать так, чтобы было выполнено следующее условие: если $I \in \mathcal{K}$, $i \in I$ и $j > i$, то $(I - i) \cup j \in \mathcal{K}$.

Пусть $\mathrm{MF}_m(\mathcal{K})$ — множество недостающих граней $\mathcal{K}$, содержащих максимальную вершину m, т. е.

$$\mathrm{MF}_m(\mathcal{K}) = \{I \subset [m] \,|\, I \notin \mathcal{K},\ \partial\Delta(I) \subset \mathcal{K} \text{ и } m \in I\}.$$

Как было отмечено в [IK1], для сдвинутого комплекса $\mathcal{K}$ имеет место гомотопическая эквивалентность

$$\mathcal{K} \simeq \bigvee_{I \in \mathrm{MF}_m(\mathcal{K})} \partial\Delta(I) \tag{3.2}$$

(это вытекает из того, что фактопространство $\mathcal{K}/\operatorname{star}_m \mathcal{K}$ гомеоморфно букету в правой части формулы (3.2), по определению сдвинутого комплекса). Заметим, что полный подкомплекс сдвинутого комплекса — снова сдвинутый комплекс. Тогда теорема 2.5 вместе с (3.2) влечёт, что $H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободная абелева группа, порождённая классами гомологий клеточных цепей вида

$$\Big(\sum_{l=1}^{p} D_{i_1}\cdots D_{i_{l-1}}S_{i_l}D_{i_{l+1}}\cdots D_{i_p}\Big)S_{j_1}\cdots S_{j_q}, \tag{3.3}$$

где $I=\{i_1,\ldots,i_p\}\in \mathrm{MF}_m(\mathcal{K}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q})$. Из леммы 3.1 следует, что (3.3) — каноническая клеточная цепь для сгнездованного произведения Уайтхеда

$$w=\Big[\Big[\Big[\ldots[[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_p}],\mu_{j_1}],\ldots\Big],\mu_{j_{q-1}}\Big],\mu_{j_q}\Big].$$

Следовательно, букет произведений Уайтхеда

$$\bigvee_{J\subset[m]}\ \bigvee_{\substack{I=\{i_1,\ldots,i_p\}\in\mathrm{MF}_m(\mathcal{K}_J)\\ J\setminus I=\{j_1,\ldots,j_q\}}}\Big[\Big[\Big[\ldots[[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_p}],\mu_{j_1}],\ldots\Big],\mu_{j_{q-1}}\Big],\mu_{j_q}\Big]\colon \bigvee_{\substack{J\subset[m]\\ I\in\mathrm{MF}_m(\mathcal{K}_J)}} S^{d(w)}_{J,I}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$$

индуцирует изоморфизм в гомологиях, а значит является гомотопической эквивалентностью. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 3.6 ([IK1])**.** *Всякий сдвинутый комплекс $\mathcal{K}$ принадлежит классу W_Δ.*

Ниже приводится другой результат, который можно доказать с помощью леммы 3.2.

Пример 3.7. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *заполняемым*, если существует такой набор $\mathrm{MF}_{\mathrm{fill}}(\mathcal{K})$ недостающих граней $I_1,\ldots,I_k$, что объединение $\mathcal{K}\cup I_1\cup\cdots\cup I_k$ стягиваемо. Если любой полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ является заполняемым, то $\mathcal{K}$ называется *вполне заполняемым*.

Заметим, что гомологии любого полного подкомплекса $\mathcal{K}_J$ вполне заполняемого комплекса $\mathcal{K}$ порождены циклами $\partial\Delta(I)$ для $I\in\mathrm{MF}_{\mathrm{fill}}(\mathcal{K}_J)$. Как и в примере 3.5, $H_*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ — свободная абелева группа, порождённая классами клеточных цепей

$$\Big(\sum_{l=1}^{p} D_{i_1}\ldots D_{i_{l-1}}S_{i_l}D_{i_{l+1}}\ldots D_{i_p}\Big)S_{j_1}\ldots S_{j_q},$$

где $\Delta(i_1,\ldots,i_q)\in\mathrm{MF}_{\mathrm{fill}}(\mathcal{K}_{j_1,\ldots,j_p,i_1,\ldots,i_q})$. Как и раньше, отображение

$$\bigvee_{J\subset[m]}\ \bigvee_{\substack{I\in\mathrm{MF}_{\mathrm{fill}}(\mathcal{K}_J)\\ J\setminus I=\{j_1,\ldots,j_q\}}}\Big[\Big[\Big[\ldots[[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_p}],\mu_{j_1}],\ldots\Big],\mu_{j_{q-1}}\Big],\mu_{j_q}\Big]\colon \bigvee_{\substack{J\subset[m]\\ I\in\mathrm{MF}_{\mathrm{fill}}(\mathcal{K}_J)}} S^{d(w)}_{J,I}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$$

является гомотопической эквивалентностью. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.8 ([IK2])**.** *Всякий вполне заполняемый комплекс $\mathcal{K}$ принадлежит классу W_Δ.*

4. Подстановки симплициальных комплексов

Комбинаторные конструкции представленные ниже, схожи с описанными в [Ay1] и [BBCG], хотя получаемые комплексы отличаются. Аналогичная конструкция в случае производящих множеств была предложена Н. Ю. Ероховцом (см. [BP2, конструкция 1.5.19]).

Определение 4.1. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, и пусть $\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_m$ — набор из m симплициальных комплексов. Будем называть комплекс

$$\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_m)=\{I_{j_1}\sqcup\cdots\sqcup I_{j_k}\mid I_{j_l}\in\mathcal{K}_{j_l},\ l=1,\ldots,k\quad\text{и}\quad\{j_1,\ldots,j_k\}\in\mathcal{K}\} \tag{4.1}$$

подстановкой $\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_m$ в $\mathcal{K}$.

Множество недостающих граней $\mathrm{MF}(\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_m))$ подстановочного симплициального комплекса описывается следующим образом. Во-первых, всякая недостающая грань каждого $\mathcal{K}_i$ является недостающей гранью комплекса $\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)$. Во-вторых, для каждой недостающей грани $\Delta(i_1,\dots,i_k)$ комплекса $\mathcal{K}$ имеется следующее множество недостающих граней подстановочного комплекса:

$$\mathrm{MF}_{i_1,\dots,i_k}\bigl(\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)\bigr)=\bigl\{\Delta(j_1,\dots,j_k)\mid j_l\in\mathcal{K}_{i_l},\ l=1,\dots,k\bigr\}.$$

Ясно, что других недостающих граней в $\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)$ нет, так что мы имеем

$$\mathrm{MF}\bigl(\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)\bigr)=\mathrm{MF}(\mathcal{K}_1)\sqcup\dots\sqcup\mathrm{MF}(\mathcal{K}_m)\sqcup\bigsqcup_{\Delta(i_1,\dots,i_k)\in\mathrm{MF}(\mathcal{K})}\mathrm{MF}_{i_1,\dots,i_k}\bigl(\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)\bigr).$$

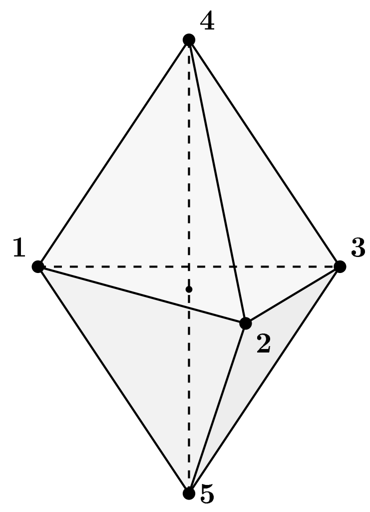

Рис. 1. Подстановочный комплекс $\partial\Delta(\partial\Delta(1,2,3),4,5)$

Пример 4.2. Если все $\mathcal{K}_i$ — точки $\{i\}$, то $\mathcal{K}(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m)=\mathcal{K}$. В частности, имеем $\partial\Delta^{m-1}(1,\dots,m)=\partial\Delta^{m-1}$. В случае подстановки в симплекс Δ^{m-1} или его границу $\partial\Delta^{m-1}$ мы будем опускать размерность, таким образом, $\partial\Delta(1,\dots,m)=\partial\Delta^{m-1}$, что согласуется с предыдущим обозначением.

Следующий пример — наша отправная точка к обобщениям.

Пример 4.3. Пусть $\mathcal{K}=\partial\Delta^{m-1}$ и все комплексы $\mathcal{K}_i$, кроме $\mathcal{K}_1$, — точки. Тогда имеем $\partial\Delta(\mathcal{K}_1,i_2,\dots,i_m)=\mathcal{J}_{m-2}(\mathcal{K}_1)$, где $\mathcal{J}_n(\mathcal{L})$ — операция, определённая в [Ab, теорема 5.2]. Согласно [Ab, теорема 6.1], подстановочный комплекс

$$\partial\Delta\bigl(\partial\Delta(j_1,\dots,j_q),i_1,\dots,i_p\bigr)$$

является наименьшим, реализующим высшее произведение Уайтхеда

$$\bigl[[\mu_{j_1},\dots,\mu_{j_q}],\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_p}\bigr].$$

Случай $q=3$, $p=2$ изображен на рис. 1.

Следующий пример будет использован в теореме 5.2.

Конструкция 4.4. Опишем индуктивно канонический симплициальный комплекс $\partial\Delta_w$, соответствующий общему итерированному произведению Уайтхеда w.

Начнём с того, что однократному произведению Уайтхеда $[\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_m}]$ соответствует $\partial\Delta(i_1,\dots,i_m)$. Запишем теперь общее итерированное произведение Уайтхеда в виде

$$w=[w_1,\dots,w_q,\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_p}]\in\pi_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),$$

где $w_1, \dots, w_q$ — нетривиальные общие итерированные произведения Уайтхеда, $q \geqslant 0$. Тогда сопоставим произведению w подстановочный комплекс

$$\partial\Delta_w \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Delta(\partial\Delta_{w_1}, \dots, \partial\Delta_{w_q}, i_1, \dots, i_p).$$

Определим также следующий подкомплекс в $\partial\Delta_w$:

$$\partial\Delta_w^{\text{sph}} = \partial\Delta_{w_1}^{\text{sph}} * \dots * \partial\Delta_{w_q}^{\text{sph}} * \partial\Delta(i_1, \dots, i_p).$$

По определению, $\partial\Delta_w^{\text{sph}}$ — джойн границ симплексов, следовательно, он гомеоморфен сфере. Более того, $\dim \partial\Delta_w^{\text{sph}} = \dim \partial\Delta_w$.

Будем называть подкомплекс $\partial\Delta_w^{\text{sph}}$ *максимальной сферой (комплекса)* $\partial\Delta_w$.

Например, максимальная сфера $\partial\Delta(\partial\Delta(1,2,3),4,5)$ получается удалением ребра $\Delta(4,5)$, см. рис. 1.

Предложение 4.5. *Комплекс $\partial\Delta_w$ гомотопически эквивалентен букету сфер, и максимальная сфера $\partial\Delta_w^{\text{sph}}$ представляет сумму сфер максимальной размерности.*

Доказательство. По построению, комплекс $\partial\Delta_w$ получается из максимальной сферы $\partial\Delta_w^{\text{sph}}$ приклеиванием симплексов размерности не больше $\dim \partial\Delta_w^{\text{sph}}$. Следовательно, все приклеивающие отображения нуль-гомотопны, что влечёт оба утверждения. □

5. Реализация высших произведений Уайтхеда

Мы покажем, что для данного итерированного высшего произведения Уайтхеда w подстановочный комплекс $\partial\Delta_w$ реализует w. Более того, для специального вида скобок внутри w мы докажем, что $\partial\Delta_w$ — наименьший комплекс, реализующий w. Также мы опишем комбинаторный критерий нетривиальности произведения w.

Напомним, что согласно предложению 3.3 однократное высшее произведение Уайтхеда $[\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p}]$ реализуется комплексом $\partial\Delta(i_1, \dots, i_p)$.

Теорема 5.1. *Пусть $w_1, \dots, w_q$ — нетривиальные итерированные высшие произведения Уайтхеда. Комплекс $\partial\Delta_w$, описанный в* конструкции 4.4*, реализует итерированное высшее произведение Уайтхеда*

$$w = [w_1, \dots, w_q, \mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p}]. \tag{5.1}$$

Доказательство. Чтобы доказать, что (5.1) определено в $\mathcal{Z}_{\partial\Delta_w}$ нам нужно построить соответствующее отображение $S^{d(w)} \to \mathcal{Z}_{\partial\Delta_w}$. Это делается дословно так же, как описано в доказательстве леммы 3.2. Более того, лемма 3.2 даёт клеточную цепь $h_c(w) \in \mathcal{C}_*(\mathcal{Z}_{\partial\Delta_w})$, представляющую образ при гомоморфизме Гуревича $h(w) \in H_*(\mathcal{Z}_{\partial\Delta_w})$. Клеточная цепь $h_c(w) \in \mathcal{C}_*(\mathcal{Z}_{\partial\Delta_w})$ соответствует симплициальной цепи $\partial\Delta_w^{\text{sph}} \in C_*(\partial\Delta_w)$ при изоморфизме из теоремы 2.5. Предложение 4.5 влечёт, что симплицильный гомологический класс $[\partial\Delta_w^{\text{sph}}] \in H_*(\partial\Delta_w)$ ненулевой. Таким образом, $h(w) \neq 0$ и произведение Уайтхеда w нетривиально. □

Для конфигураций вложенных скобок специального вида имеет место более точное утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть $w_j = [\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_{p_j}}]$, $j = 1, \dots, q$, — нетривиальные однократные высшие произведения Уайтхеда. Рассмотрим итерированное высшее произведение Уайтхеда*

$$w = [w_1, \dots, w_q, \mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p}].$$

Тогда произведение w

а) *определено в* $\pi_*(\mathcal{Z_K})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *содержит подкомплекс*

$$\partial\Delta_w = \partial\Delta\bigl(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q},i_1,\dots,i_p\bigr),$$

где $\partial\Delta_{w_j} = \partial\Delta(j_1,\dots,j_{p_j}), j = 1,\dots,q$;

б) *тривиально в* $\pi_*(\mathcal{Z_K})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *содержит подкомплекс*

$$\Delta\bigl(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q},i_1,\dots,i_p\bigr) = \partial\Delta_{w_1} * \dots * \partial\Delta_{w_q} * \Delta(i_1,\dots,i_p).$$

Отметим, что утверждение а) влечёт, что $\partial\Delta_w$ — наименьший комплекс, реализующий произведение Уайтхеда w.

Доказательство. Будем считать, что $q > 0$; иначе, теорема сводится к предложению 3.3. Мы рассмотрим три случая: $p = 0$; $p = 1$; $p > 1$.

Случай $p = 0$. Тогда $w = [w_1,\dots,w_q]$.

Докажем сначала утверждение б). Пусть $d_1,\dots,d_q$ и $d = d_1+\dots+d_q-1$ — размерности произведений Уайтхеда $w_1,\dots,w_q$ и $[w_1,\dots,w_q]$, соответственно. Тривиальность w влечёт существование пунктирной стрелки в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
S^d \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{FW}(S^{d_1},\dots,S^{d_q}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{Z_K} \\
D^{d+1} \arrow[r] & S^{d_1}\times\dots\times S^{d_q} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Здесь $\mathrm{FW}(S^{d_1},\dots,S^{d_q})$ обозначает толстый букет сфер $S^{d_1},\dots,S^{d_q}$, а верхняя левая стрелка — приклеивающее отображение клетки максимальной размерности.

Пусть $\sigma_j \in H^{d_j}(\mathcal{Z_K})$ — когомологический класс, двойственный сфере S^{d_j} в толстом букете $\mathrm{FW}(S^{d_1},\dots,S^{d_q})$, $j = 1,\dots,q$. По предположению, однократное произведение Уайтхеда w_j нетривиально, следовательно, $\sigma_j \neq 0$ (см. предложение 3.3). Класс $\sigma_j \in H^{d_j}(\mathcal{Z_K})$ соответствует симплициальному когомологическому классу $\bigl[\partial\Delta_{w_j}\bigr]^* \in \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_{\partial\Delta_{w_j}})$ при когомологической версии изоморфизма теоремы 2.5. Здесь $\mathcal{K}_{\partial\Delta_{w_j}}$ — полный подкомплекс $\partial\Delta_{w_j}$ в $\mathcal{K}$. Так как произведение Уайтхеда $[w_1,\dots,w_q]$ нетривиально, когомологическое произведение $\sigma_1\cdots\sigma_q$ нетривиально в $H^*(\mathcal{Z_K})$ (см. диаграмму выше). Используя описание когомологического произведения в теореме 2.5, получаем, что $\mathcal{K}$ содержит $\partial\Delta_1 * \dots * \partial\Delta_{w_q}$ в качестве полного подкомплекса, из чего следует утверждение б).

Чтобы доказать а), заметим, что существование произведения $[w_1,\dots,w_q]$ влечёт тривиальность всех произведений $[w_1,\dots,\widehat{w_j},\dots,w_q]$, $j = 1,\dots,q$. По утверждению б), комплекс $\mathcal{K}$ содержит объединение $\bigcup\limits_{j=1}^{q} \partial\Delta_{w_1}*\dots*\widehat{\partial\Delta_{w_j}}*\dots*\partial\Delta_{w_q}$, что есть в точности $\partial\Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q})$. Этим завершается доказательство случая $p = 0$.

Случай $p = 1$. Тогда $w = [w_1,\dots,w_q,\mu_{i_1}]$.

Сначала докажем утверждение б). Предположим, что $w = 0$. Это влечёт тривиальность произведения $[w_1,\dots,w_q]$. Из случая $p = 0$ мы знаем, что $\mathcal{K}$ содержит $\Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q})$ в качестве полного подкомплекса. Нам необходимо доказать, что $\mathcal{K}$ содержит $\Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q}) * \Delta(i_1)$, что является конусом с вершиной i_1. Из тривиальности произведения w следует, что образ при гомоморфизме Гуревича $h(w) \in H_*(\mathcal{Z_K})$ нулевой. Следовательно, клеточная цепь $h_c(w) = h_c(w_1)\cdots h_c(w_q)S_{i_1}$ является границей (см. лемму 3.2). Согласно теореме 2.5 из этого следует, что симплициальный цикл $\partial\Delta_{w_1} * \dots * \partial\Delta_{w_q}$ является границей в $\mathcal{K}_{\Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q})\cup\{i_1\}}$. Последнее возможно только если

$$\mathcal{K}_{\Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q})\cup\{i_1\}} = \Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q}) * \Delta(i_1),$$

что доказывает б).

Теперь докажем а). Из рассмотренных случаев получаем, что из существования произведения w следует, что комплекс $\mathcal{K}$ содержит подкомплексы $\Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q})$ и $\Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\widehat{\partial\Delta_{w_j}},\dots,\partial\Delta_{w_q},i_1)$ для $j=1,\dots,q$, объединение которых есть в точности $\partial\Delta(\partial\Delta_{w_1},\dots,\partial\Delta_{w_q},i_1)$.

<u>Случай $p>1$.</u>

Будем вести индукцию по $p+q$. Имеем $w=\bigl[w_1,\dots,w_q,\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_p}\bigr]$.

Чтобы доказать утверждение б), предположим, что $w=0$, но $\mathcal{K}$ не содержит подкомплекса $\partial\Delta_{w_1}*\dots*\partial\Delta_{w_q}*\Delta(i_1,\dots,i_p)$. Тогда клеточная цепь, соответствующая $\partial\Delta_{w_1}*\dots*\partial\Delta_{w_q}*\partial\Delta(i_1,\dots,i_p)$, при изоморфизме из теоремы 2.5 определяет нетривиальный класс гомологий в $H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, который совпадает с образом гомоморфизма Гуревича $h(w)$ по лемме 3.2. Таким образом, произведение Уайтхеда w нетривиально, что приводит к противоречию.

Утверждение а) доказывается аналогично случаю $p=1$. □

Замечание 5.3. В нашем подходе нетривиальность высшего произведения Уайтхеда w понимается в смысле его канонического представителя, построенного в § 2. Тем не менее, рассуждения, аналогичные приведённым в доказательстве случая $p=0$, показывают, что утверждение о нетривиальности высшего произведения Уайтхеда в теореме 5.2 остаётся верным, если нетривиальность понимать в классическом смысле, т. е. как отсутствие тривиального гомотопического класса во множестве всевозможных продолжений.

Пример 5.4. Рассмотрим произведение Уайтхеда $w=\bigl[[\mu_1,\mu_2,\mu_3],\mu_4,\mu_5\bigr]$ в момент-угол-комплексе $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, соответствующем симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на пяти вершинах. Для существования w необходимо, чтобы скобки $\bigl[[\mu_1,\mu_2,\mu_3],\mu_4\bigr]$, $\bigl[[\mu_1,\mu_2,\mu_3],\mu_5\bigr]$ и $[\mu_4,\mu_5]$ были нулевыми. По теореме 5.2 б), это значит, что $\mathcal{K}$ содержит подкомплексы $\partial\Delta(1,2,3)*\Delta(4)$, $\partial\Delta(1,2,3)*\Delta(5)$ и $\Delta(4,5)$. Другими словами, $\mathcal{K}$ содержит подкомплекс $\partial\Delta\bigl(\partial\Delta(1,2,3),4,5\bigr)$, изображённый на Рис. 1. Значит, $\partial\Delta\bigl(\partial\Delta(1,2,3),4,5\bigr)$ является наименьшим комплексом, реализующим скобку $w=\bigl[[\mu_1,\mu_2,\mu_3],\mu_4,\mu_5\bigr]$.

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ соответствующий $\mathcal{K}=\partial\Delta\bigl(\partial\Delta(1,2,3),4,5\bigr)$, гомотопически эквивалентен букету $(S^5)^{\vee 4}\vee(S^6)^{\vee 3}\vee S^7\vee S^8$, причём каждая сфера является произведением Уайтхеда, см. [Ab, пример 5.4]. Например, сфера S^7 реализуется произведением $w=\bigl[\bigl[[\mu_3,\mu_4,\mu_5],\mu_1\bigr],\mu_2\bigr]$, а сфера S^8 — произведением $w=\bigl[[\mu_1,\mu_2,\mu_3],\mu_4,\mu_5\bigr]$.

Мы ожидаем, что теорема 5.2 верна для произвольных итерированных высших произведений.

Вопрос 5.5. *Верно ли, что для любого итерированного высшего произведения Уайтхеда w подстановочный комплекс $\partial\Delta_w$ — наименьший, реализующий w?*

6. Резольвенты коалгебры граней

Исходно когомологии момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ были описаны в [BP1] как Tor-алгебра алгебры граней комплекса $\mathcal{K}$. Как было замечено в [BBP], комплекс Кошуля, вычисляющий Tor-алгебру, может быть отождествён с клеточным коцепным комплексом для $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для стандартной клеточной структуры. С другой стороны, Tor-алгебра и, следовательно, когомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ могут быть вычислены с помощью резольвенты Тейлор алгебры граней как модуля над кольцом многочленов, см. [WZ], [Ay2, §4]. Мы дуализуем оба подхода, отождествляя гомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ с Cotor-коалгеброй коалгебры граней комплекса $\mathcal{K}$ и используя коалгебраические резовенты Кошуля и Тейлор для описания циклов, соответствующих итерированным высшим произведениям Уайтхеда.

Пусть $\Bbbk$ — коммутативное кольцо с единицей. *Алгеброй граней* $\Bbbk[\mathcal{K}]$ симплициального комплекса $\mathcal{K}$ называется факторалгебра алгебры многочленов $\Bbbk[v_1,\dots,v_m]$ по идеалу, порождённому мономами без квадратов, соответствующими несимплексам $\mathcal{K}$:

$$\Bbbk[\mathcal{K}] = \Bbbk[v_1, \ldots, v_m]\big/\big(v_{j_1} \cdots v_{j_k} \mid \{j_1, \ldots, j_k\} \notin \mathcal{K}\big).$$

Определим градуировку равенством $\deg v_j = 2$. Для данного подмножества $J \subset [m]$, положим $v_J = \prod_{j \in J} v_j$. Заметим, что

$$\Bbbk[\mathcal{K}] = \Bbbk[v_1, \ldots, v_m]\big/\big(v_J \mid J \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})\big),$$

где $\mathrm{MF}(\mathcal{K})$ обозначает множество недостающих граней (минимальных неграней) комплекса $\mathcal{K}$. Алгебра граней $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ также известна как *кольцо граней* или *кольцо Стенли–Райснера* комплекса $\mathcal{K}$.

Будем использовать краткое обозначение $\Bbbk[m]$ для кольца многочленов $\Bbbk[v_1, \ldots, v_m]$. Пусть M и N — два $\Bbbk[m]$-модуля. Напомним, что n-й производный функтор для $\cdot \otimes_{\Bbbk[m]} N$ обозначается $\mathrm{Tor}_n^{\Bbbk[m]}(M, N)$ или $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-n}(M, N)$. (Последнее обозначение лучше приспособлено для топологических приложений спектральной последовательности Эйленберга–Мура, где Tor возникает как когомологии некоторых пространств.) А именно, для данной проективной резольвенты $R^\bullet \to M$ с модулями, занумерованными неотрицательными целыми числами, имеем

$$\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-n}(M, N) = H^{-n}(R^\bullet \otimes_{\Bbbk[m]} N).$$

Стандартное рассуждение, использующие бикомплексы и коммутативность тензорного произведения, даёт естественный изоморфизм

$$\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-n}(M, N) \cong \mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-n}(N, M).$$

Если M и N — градуированые $\Bbbk[m]$-модули, то $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-i}(M, N)$ наследует внутреннюю градуировку, и мы обозначаем соответствующие биградуированные компоненты через $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}^{-i,2j}(M, N)$.

Теорема 6.1 ([BP1, теорема 4.2.1])**.** *Имеет место изоморфизм $\Bbbk$-алгебр*

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \Bbbk) \cong \mathrm{Tor}_{\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]}\big(\Bbbk[\mathcal{K}], \Bbbk\big),$$

где Tor *рассматривваеться как градуированная полной степенью алгебра.*

Tor-алгебра $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[\mathcal{K}], \Bbbk)$ может быть вычислена либо при помощи резольвенты $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk$ и тензорного умножения на $\Bbbk[\mathcal{K}]$, либо при помощи резольвенты $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk[\mathcal{K}]$ и тензорного умножения на $\Bbbk$.

Для первого подхода существует стандартная резольвента $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk$ — *резольвента Кошуля*. Она определяется как ацикличная дифференциальная градуированная алгебра

$$\big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \Bbbk[v_1, \ldots, v_m], d_\Bbbk\big), \quad d_\Bbbk = \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes v_i.$$

Здесь $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ — внешняя алгебра с образующим u_i когомологической степени 1, или бистепени $(-1, 2)$. После тензорного умножения на $\Bbbk[\mathcal{K}]$ получаем *комплекс Кошуля* $\big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \Bbbk[\mathcal{K}], d_\Bbbk\big)$, когомологии которого — в точности $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[\mathcal{K}], \Bbbk)$.

Более того, согласно [BP1, лемма 4.2.5] мономы v_i^2 и $u_i v_i$ порождают ацикличный идеал в комплексе Кошуля. Для факторалгебры

$$R^*(\mathcal{K}) = \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \Bbbk[\mathcal{K}]\big/\big(v_i^2 = u_i v_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\big) \tag{6.1}$$

существует конечный $\Bbbk$-базис из мономов $u_J \otimes v_I$ с $J \subset [m]$, $I \in \mathcal{K}$ и $J \cap I = \varnothing$. Алгебра $R^*(\mathcal{K})$ — не что иное, как клеточный коцепной комплекс для момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ (см. конструкцию 2.4):

Теорема 6.2 ([BBP]). *Имеет место изоморфизм коцепных комплексов*

$$R^*(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), \quad u_J \otimes v_I \mapsto \varkappa(J, I)^*,$$

индуцирующий изоморфизм алгебр когомологий из теоремы 6.1.

Замечание 6.3. Изоморфизм коцепных комплексов из теоремы выше очевиден. Результат [BBP] состоит в том, что он индуцирует изоморфизм алгебр когомологий. Сам комплекс Кошуля $\big(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \Bbbk[\mathcal{K}], d_\Bbbk\big)$ может быть отождествлён с клеточными коцепями полиэдрального произведения $(S^\infty, S^1)^\mathcal{K}$, а факторизация по ацикличному идеалу в (6.1) соответствует деформационной ретракции $\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2, S^1)^\mathcal{K} \xrightarrow{\simeq} (S^\infty, S^1)^\mathcal{K}$. Детали можно найти в [BP2, § 4.5].

При втором подходе, $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[\mathcal{K}], \Bbbk)$ вычисляется с помощью $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk[\mathcal{K}]$ и тензорного умножения на $\Bbbk$. *Минимальная резольвента* имеет недостаток отсутствия мультипликативной структуры. Существует хорошая неминимальная резольвента, построенная Дианой Тейлор в её диссертации 1966 года. Эта *резольвента Тейлор* алгебры $\Bbbk[\mathcal{K}]$ имеет естественную мультипликативную структуру, индуцирующую изоморфизм алгебр из теоремы 6.1. Она определяется в терминах недостающих граней комплекса $\mathcal{K}$ и тем самым удобна для вычислений, связанных с высшими произведениями Уайтхеда. Ниже мы опишем эту резольвенту и её коалгебраическую версию.

Конструкция 6.4 (резольвента Тейлор). Пусть $(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t)$ — мономиальный идеал в кольце многочленов $\Bbbk[m]$. Мы определим свободную резольвенту $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk[m]/(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t)$.

Для всех $s = 0, \dots, t$ обозначим через F_s свободный $\Bbbk[m]$-модуль ранга $\binom{m}{s}$ с базисом $\{e_J\}$, занумерованным подмножествами $J \subset \{1, \dots, t\}$ мощности s. Определим морфизм $d\colon F_s \to F_{s-1}$ формулой

$$d(e_J) = \sum_{j \in J} \mathrm{sign}(j, J) \frac{\mathfrak{m}_J}{\mathfrak{m}_{J \setminus j}} e_{J \setminus j},$$

где $\mathfrak{m}_J = \mathrm{lcm}_{j \in J}(\mathfrak{m}_j)$ и $\mathrm{sign}(j, J) = (-1)^{n-1}$, если j — n-й элемент в упорядоченом множестве J. Легко проверить, что $d^2 = 0$. Таким образом, получаем комплекс

$$T(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t): \ 0 \to F_t \to F_{t-1} \to \dots \to F_1 \to F_0 \to 0.$$

По теореме Д. Тейлор, $T(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t)$ является свободной резольвентой $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk[m]/(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t)$. Для удобства читателей мы включили доказательство этого результата в приложение в качестве теоремы A.1.

Далее, мы опишем двойственные конструкции для коалгебр. Двойственной к алгебре $\Bbbk[v_1, \dots, v_m]$ является симметрическая коалгебра, которую мы будем обозначать через $\Bbbk\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ или $\Bbbk\langle m\rangle$. Она имеет $\Bbbk$-базис, состоящий из мономов $\mathfrak{m}$, с коумножением, определённым формулой

$$\Delta\mathfrak{m} = \sum_{\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}} \mathfrak{m}' \otimes \mathfrak{m}''. \tag{6.2}$$

Для данного множества мономов $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t$ определим подкоалгебру $C(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_t) \subset \Bbbk\langle x_1, \dots, x_m\rangle$ с $\Bbbk$-базисом из мономов $\mathfrak{m}$, которые не делятся ни на один из $\mathfrak{m}_i$, $i = 1, \dots, t$. *Коалгебра граней* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ определяется как

$$\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle = C\big(x_J \mid J \in \mathrm{MF}(\mathcal{K})\big).$$

Коалгебра $\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle$ имеет $\Bbbk$-базис из мономов $\mathfrak{m}$, носителями которых являются симплексы комплекса $\mathcal{K}$, с коумножением, определённым формулой (6.2).

Пусть Λ — коалгебра, пусть A — правый Λ-комодуль со структурным морфизмом $\nabla_A\colon A\to A\otimes\Lambda$, и пусть B — левый Λ-комодуль со структурным морфизмом $\nabla_B\colon B\to\Lambda\otimes B$. *Котензорное произведение* комодулей A и B определяется как $\Bbbk$-комодуль

$$A\boxtimes_\Lambda B=\ker\bigl(\nabla_A\otimes\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\otimes\nabla_B\colon A\otimes B\to A\otimes\Lambda\otimes B\bigr).$$

Если Λ кокоммутативна, то $A\boxtimes_\Lambda B$ является Λ-комодулем.

Мы будем обозначать n-й производный функтор для $\cdot\boxtimes_\Lambda B$ как $\mathrm{Cotor}^n_\Lambda(A,B)$ или $\mathrm{Cotor}^\Lambda_{-n}(A,B)$. А именно, для данной инъективной резольвенты $A\to I^\bullet$ с модулями, занумерованными неотрицательными целыми числами, имеем

$$\mathrm{Cotor}^\Lambda_{-n}(A,B)=\mathrm{Cotor}^n_\Lambda(A,B)=H^n(I^\bullet\boxtimes_\Lambda B).$$

Если $B\to J^\bullet$ — инъективная резольвента для B, то стандартное рассуждение, использующее бикомплекс, даёт изоморфизм

$$\mathrm{Cotor}^n_\Lambda(A,B)=H^n(I^\bullet\boxtimes_\Lambda B)\cong H^n(I^\bullet\boxtimes_\Lambda J^\bullet)\cong H^n(A\boxtimes_\Lambda J^\bullet). \tag{6.3}$$

Изоморфизм $H^n(I^\bullet\boxtimes_\Lambda B)\xrightarrow{\cong}H^n(A\boxtimes_\Lambda J^\bullet)$ можно описать явно следующим образом.

Конструкция 6.5. Пусть $\eta\in H^n(I^\bullet\boxtimes_\Lambda B)$ — гомологический класс, представленный циклом $\eta^{(0)}\in I^n\boxtimes_\Lambda B$. Опишем, как получить цикл $\eta^{(n+1)}\in A\boxtimes_\Lambda J^n$, представляющий тот же класс гомологий в $\mathrm{Cotor}^n_\Lambda(A,B)$. Рассмотрим бикомплекс

$$\begin{tikzcd}
A\boxtimes_\Lambda B \arrow[r] \arrow[d] & I^0\boxtimes_\Lambda B \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & I^n\boxtimes_\Lambda B \arrow[d, "\eta^{(0)}\mapsto\partial_B(\eta^{(0)})"] \\
A\boxtimes_\Lambda J^0 \arrow[r] \arrow[d] & I^0\boxtimes_\Lambda J^0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r, "\eta^{(1)}\mapsto\partial_A(\eta^{(1)})=\partial_B(\eta^{(0)})"] & I^n\boxtimes_\Lambda J^0 \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d, "\eta^{(n)}\mapsto\partial_B(\eta^{(n)})"] & \ddots & \vdots \\
A\boxtimes_\Lambda J^n \arrow[r, "\eta^{(n+1)}\mapsto\partial_A(\eta^{(n+1)})=\partial_B(\eta^{(n)})"] & I^0\boxtimes_\Lambda J^n \arrow[r] & \dots &
\end{tikzcd}$$

Из инъективности комодулей I^m и J^l следует, что строки и столбцы точны. Тогда $\partial_A\bigl(\partial_B\eta^{(0)}\bigr)=-\partial_B\bigl(\partial_A\eta^{(0)}\bigr)=0$. Значит, существует такой $\eta^{(1)}\in I^{n-1}\boxtimes_\Lambda J^0$, что $\partial_A\eta^{(1)}=\partial_B\eta^{(0)}$. Аналогично, существует такой $\eta^{(2)}\in I^{n-2}\boxtimes_\Lambda J^1$, что $\partial_A\eta^{(2)}=\partial_B\eta^{(1)}$. Продолжая таким образом, мы в итоге получим элемент $\eta^{(n+1)}\in A\boxtimes_\Lambda J^n$, который по построению представляет класс η.

Мы применим эту конструкцию в следующей ситуации. Начнём с двойственной версии теоремы 6.1.

Теорема 6.6. *Имеет место изоморфизм $\Bbbk$-коалгебр*

$$H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\Bbbk)\cong\mathrm{Cotor}^{\Bbbk\langle x_1,\dots,x_m\rangle}\bigl(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle,\Bbbk\bigr).$$

Коалгебра $\mathrm{Cotor}^{\Bbbk\langle m\rangle}(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle,\Bbbk)$ может быть вычислена с помощью двойственной версии резольвенты Кошуля.

Конструкция 6.7 (Комплекс Кошуля для коалгебры граней)**.** *Резольвента Кошуля* $\Bbbk\langle m\rangle$-комодуля $\Bbbk$ определяется как ацикличная дифференциальная градуированная коалгебра

$$\bigl(\Bbbk\langle x_1,\dots,x_m\rangle\otimes\Lambda\langle y_1,\dots,y_m\rangle,\partial_{\Bbbk}\bigr),\quad \partial_{\Bbbk}=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\otimes y_i.$$

Умножая котензорно на $\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle$, получаем *комплекс Кошуля* $\bigl(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle\otimes\Lambda\langle y_1,\dots,y_m\rangle,\partial_{\Bbbk}\bigr)$, гомологии которого суть $\operatorname{Cotor}^{\Bbbk\langle m\rangle}(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle,\Bbbk)$.

Соотношение между клеточным комплексом $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и комплексом Кошуля $\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle$ описывается следующей дуализацией теоремы 6.2.

Теорема 6.8. *Имеет место включение цепных комплексов*

$$\mathcal{C}_*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})\to\bigl(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle\otimes\Lambda\langle y_1,\dots,y_m\rangle,\partial_{\Bbbk}\bigr),\quad \varkappa(J,I)\mapsto x_I\otimes y_J,$$

индуцирующий изоморфизм в гомологиях:

$$H_*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\Bbbk)\cong H\bigl(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle\otimes\Lambda\langle y_1,\dots,y_m\rangle,\partial_{\Bbbk}\bigr)=\operatorname{Cotor}^{\Bbbk\langle x_1,\dots,x_m\rangle}\bigl(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle,\Bbbk\bigr).$$

С другой стороны, $\operatorname{Cotor}^{\Bbbk\langle m\rangle}(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle,\Bbbk)$ можно вычислить с помощью двойственной версии резольвенты Тейлор для $\Bbbk\langle m\rangle$-комодулей $\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle$.

Конструкция 6.9 (резольвента Тейлор для комодулей)**.** Для данного множества мономов $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t$ мы опишем косвободную резольвенту $\Bbbk\langle m\rangle$-комодуля $C(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$.

Для каждого $s=0,\dots,t$ обозначим через I^s косвободный $\Bbbk\langle m\rangle$-комодуль ранга $\binom{m}{s}$ с базисом $\{e^J\}$, занумерованным подмножествами $J\subset\{1,\dots,t\}$ мощности s. Дифференциал $\partial\colon I^s\to I^{s+1}$ определяется формулой

$$\partial(x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}e^J)=\sum_{j\notin J}\operatorname{sign}(j,J)\frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\mathfrak{m}_J}{\mathfrak{m}_{J\cup\{j\}}}e^{J\cup\{j\}}.$$

Здесь мы полагаем $\frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\mathfrak{m}_J}{\mathfrak{m}_{J\cup\{j\}}}$ нулём, если отношение не является мономом. Получаемый комплекс

$$T'(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t):\ 0\to I^0\to I^1\to\cdots\to I^t\to 0$$

называется *резольвентой Тейлор* $\Bbbk\langle m\rangle$-комодуля $C(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$. Доказательство того, что он действительно является резольвентой, дано в теореме A.1.

Конструкция 6.10 (комплекс Тейлор коалгебры граней)**.** Пусть $\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle=C\bigl(x_J\mid J\in\operatorname{MF}(\mathcal{K})\bigr)$ — коалгебра граней симплициального комплекса $\mathcal{K}$. В этом случае удобно рассматривать s-й член I^s в резольвенте Тейлор как косвободный $\Bbbk\langle m\rangle$-комодуль с базисом из внешних мономов $w_{J_1}\wedge\cdots\wedge w_{J_s}$, где $J_1,\dots,J_s$ — различные недостающие грани комплекса $\mathcal{K}$. При этом дифференциал имеет следующий вид

$$\partial_{\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle}(x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\cdot w_{J_1}\wedge\cdots\wedge w_{J_s})=\sum_{J\neq J_1,\dots,J_s}\frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}}{x_{(J_1\cup\cdots\cup J_s\cup J)\setminus(J_1\cup\cdots\cup J_s)}}\cdot w_J\wedge w_{J_1}\wedge\cdots\wedge w_{J_s}$$

(суммирование берётся по недостающим граням $J\in\operatorname{MF}(\mathcal{K})$, отличным от $J_1,\dots,J_s$).

После котензорного умножения на $\Bbbk$ над $\Bbbk\langle m\rangle$ мы получаем *комплекс Тейлор* $\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle$, вычисляющий $\operatorname{Cotor}^{\Bbbk\langle x_1,\dots,x_m\rangle}\bigl(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle,\Bbbk\bigr)$. Его $(-s)$-я градуированная компонента является $\Bbbk$-модулем с базисом из внешних мономов $w_{J_1}\wedge\cdots\wedge w_{J_s}$, где $J_1,\dots,J_s$ — различные недостающие грани комплекса $\mathcal{K}$. Дифференциал задаётся формулой

$$\partial_{\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle}(w_{J_1}\wedge\cdots\wedge w_{J_s})=\sum_{J\subset J_1\cup\cdots\cup J_s}w_J\wedge w_{J_1}\wedge\cdots\wedge w_{J_s}$$

(суммирование берётся по всем недостающим граням $J\subset J_1\cup\cdots\cup J_s$, отличным от $J_1,\dots,J_s$).

Тем самым, у нас есть два метода вычисления $H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathrm{Cotor}^{\Bbbk\langle x_1,\dots,x_m\rangle}\big(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle,\Bbbk\big)$: резольвента Кошуля для $\Bbbk$ или резольвента Тейлор для $\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle$. Связь между соответствующими комплексами описывается квазиизоморфизмами (6.3) и конструкцией 6.5.

Пример 6.11. Пусть $\mathcal{K}$ — подстановочный комплекс $\partial\Delta\big(\partial\Delta(1,2,3),4,5\big)$, см. рис. 1. После котензорного произведения резольвенты Тейлор для $\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle$ на $\mathbb{Z}$, получаем следующий комплекс:

$$\mathbb{Z}\xrightarrow[1\mapsto 0]{}\mathbb{Z}^4\xrightarrow[\begin{array}{l} w_{123}\mapsto 0\\ w_{145}\mapsto 0\\ w_{245}\mapsto 0\\ w_{345}\mapsto 0\end{array}]{}\mathbb{Z}^6\xrightarrow[\begin{array}{l} w_{123}\wedge w_{145}\mapsto \quad w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{245}+w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{345}\\ w_{123}\wedge w_{245}\mapsto -w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{245}+w_{123}\wedge w_{245}\wedge w_{345}\\ w_{123}\wedge w_{345}\mapsto -w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{345}-w_{123}\wedge w_{245}\wedge w_{345}\\ w_{145}\wedge w_{245}\mapsto 0\\ w_{145}\wedge w_{345}\mapsto 0\\ w_{245}\wedge w_{345}\mapsto 0\end{array}]{}\mathbb{Z}^4$$

$$\mathbb{Z}\xleftarrow[\begin{array}{r} -w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{245}\wedge w_{345}\leftarrow w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{245}\\ w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{245}\wedge w_{345}\leftarrow w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{345}\\ -w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{245}\wedge w_{345}\leftarrow w_{123}\wedge w_{245}\wedge w_{345}\\ w_{123}\wedge w_{145}\wedge w_{245}\wedge w_{345}\leftarrow w_{145}\wedge w_{245}\wedge w_{345}\end{array}]{}\mathbb{Z}^4$$

Отсюда видно, что гомологии этого комплекса совпадают с гомологиями букета $(S^5)^{\vee 4}\vee(S^6)^{\vee 3}\vee S^7\vee S^8$, в соответствии с примером 5.4.

7. Высшие произведения Уайтхеда и резольвента Тейлор

Лемма 3.2 описывает каноническую клеточную цепь, представляющую образ данного итерированного высшего произведения Уайтхеда w при гомоморфизме Гуревича. По теореме 6.8 эту клеточную цепь можно рассматривать как цикл в комплексе Кошуля, вычисляющем $\mathrm{Cotor}^{\Bbbk\langle m\rangle}\big(\Bbbk\langle\mathcal{K}\rangle,\Bbbk\big)$. Здесь мы используем конструкцию 6.5 для описания канонического цикла, представляющего итерированное высшее произведение Уайтхеда w в коалгебраической резольвенте Тейлор. Это даёт нам новый критерий реализуемости произведения w.

Теорема 7.1. *Пусть w — сгнездованное итерированное высшее произведение Уайтхеда*

$$w=\Big[\big[\dots\big[[\mu_{i_{11}},\dots,\mu_{i_{1p_1}}],\mu_{i_{21}},\dots,\mu_{i_{2p_2}}\big],\dots\big],\mu_{i_{n1}},\dots,\mu_{i_{np_n}}\Big]. \tag{7.1}$$

Тогда образ при гомоморфизме Гуревича $h(w)\in H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})=\mathrm{Cotor}^{\mathbb{Z}\langle m\rangle}(\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle,\mathbb{Z})$ представляется в комплексе Тейлор для $\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle$ следующим циклом

$$\bigwedge_{k=1}^{n}\Bigg(\sum_{\substack{J\in\mathrm{MF}(\mathcal{K})\\ J\setminus\big(\bigcup\limits_{j=1}^{n-k}I_j\big)=I_{n-k+1}}} w_J\Bigg), \tag{7.2}$$

где $I_k=\{i_{k1},\dots,i_{kp_k}\}$.

Доказательство. Для пары непересекающихся множеств $I=\{i_1,\dots,i_s\}$ и $J=\{j_1,\dots,j_t\}$ конструкция 2.4 определяет клетку

$$\varkappa(J,I)=D_{i_1}\cdots D_{i_s}S_{j_1}\cdots S_{j_t}.$$

Она лежит в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, если $I \in \mathcal{K}$. Используя эти обозначения, мы можем переписать каноническую клеточную цепь $h_c(w)$ из леммы 3.1 следующим образом:

$$h_c(w) = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{I \in \partial\Delta(I_k)} \varkappa\big(I_k \setminus I, I\big) \right). \tag{7.3}$$

Здесь и ниже суммирование происходит по всем максимальным симплексам $I \in \partial\Delta(I_k)$ (иначе правая часть была бы неоднородным элементом).

Применим конструкцию 6.5 к (7.3). Получаем следующий зигзаг из элементов бикомплекса связывающего, комплекс Кошуля (с дифференциалом $\partial_{\mathbb{Z}}$) с комплексом Тейлор (с дифференциалом $\partial_{\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle}$):

$$\begin{tikzcd}
\varkappa(\varnothing, I_1) \prod\limits_{k=2}^{n} \Big(\sum\limits_{I \in \partial\Delta(I_k)} \varkappa\big(I_k \setminus I, I\big) \Big) \arrow[r, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle}"] & \prod\limits_{k=1}^{n} \Big(\sum\limits_{I \in \partial\Delta(I_k)} \varkappa\big(I_k \setminus I, I\big) \Big) \\
\varkappa(\varnothing, I_2) \prod\limits_{k=3}^{n} \Big(\sum\limits_{I \in \partial\Delta(I_k)} \varkappa\big(I_k \setminus I, I\big) \Big) w_{I_1} \arrow[r, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle}"] & \prod\limits_{k=2}^{n} \Big(\sum\limits_{I \in \partial\Delta(I_k)} \varkappa\big(I_k \setminus I, I\big) \Big) w_{I_1} \\
\cdots \arrow[r, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}}"] & \prod\limits_{k=3}^{n} \Big(\sum\limits_{I \in \partial\Delta(I_k)} \varkappa\big(I_k \setminus I, I\big) \Big) \Big(\sum\limits_{(J \setminus I_1) = I_2} w_J \Big) \wedge w_{I_1}
\end{tikzcd}$$

Этот зигзаг заканчивается в точности элементом (7.2) в комплексе Тейлор. $\square$

Пример 7.2. Рассмотрим снова комплекс $\mathcal{K} = \partial\Delta(\partial\Delta(1,2,3),4,5)$, показанный на рис. 1. В этом случае мы имеем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq (S^5)^{\vee 4} \vee (S^6)^{\vee 3} \vee S^7 \vee S^8$, и каждая сфера реализуется произведением Уайтхеда, см. [Ab, пример 5.4]. Для каждой сферы в таблице 1 показаны произведения Уайтхеда вместе с представляющими циклами в комплексах Кошуля и Тейлор.

Произведение Уайтхеда	Цикл Кошуля (клеточный)	Цикл Тейлор
$[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$	$D_1D_2S_3 + D_1S_2D_3 + S_1D_2D_3$	w_{123}
$[\mu_1, \mu_4, \mu_5]$	$D_1D_4S_5 + D_1S_4D_5 + S_1D_4D_5$	w_{145}
$[\mu_2, \mu_4, \mu_5]$	$D_2D_4S_5 + D_2S_4D_5 + S_2D_4D_5$	w_{245}
$[\mu_3, \mu_4, \mu_5]$	$D_3D_4S_5 + D_3S_4D_5 + S_3D_4D_5$	w_{345}
$\big[[\mu_1, \mu_4, \mu_5], \mu_2\big]$	$(D_1D_4S_5 + D_1S_4D_5 + S_1D_4D_5)S_2$	$w_{245} \wedge w_{145}$
$\big[[\mu_1, \mu_4, \mu_5], \mu_3\big]$	$(D_1D_4S_5 + D_1S_4D_5 + S_1D_4D_5)S_3$	$w_{345} \wedge w_{145}$
$\big[[\mu_2, \mu_4, \mu_5], \mu_3\big]$	$(D_2D_4S_5 + D_2S_4D_5 + S_2D_4D_5)S_3$	$w_{345} \wedge w_{245}$
$\big[\big[[\mu_1, \mu_4, \mu_5], \mu_2\big] \mu_3\big]$	$(D_1D_4S_5 + D_1S_4D_5 + S_1D_4D_5)S_2S_3$	$(w_{123} + w_{345}) \wedge w_{245} \wedge w_{145}$
$\big[[\mu_1, \mu_2, \mu_3], \mu_4, \mu_5\big]$	$(D_1D_2S_3 + D_1S_2D_3 + S_1D_2D_3)(D_4S_5 + S_4D_5)$	$(w_{145} + w_{245} + w_{345}) \wedge w_{123}$

Таблица 1. Циклы в резольвентах Кошуля и Тейлор, представляющие скобки Уайтхеда

Важной особенностью цикла в резольвенте Тейлор (7.2) является то, что он имеет вид произведения сумм образующих w_J, соответствующих недостающим граням, и крайний справа сомножитель состоит из *одной* образующая w_{I_1}. Это видно в правом столбце таблицы 1. Ниже мы приведём пример цикла в резольвенте Тейлор, который *не* имеет такого вида. Он соответствует сфере, которая *не* реализуется произведением Уайтхеда, хотя соответствующий момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является букетом сфер. Этот пример был построен в [Ab, § 7].

Пример 7.3. Рассмотрим симплициальный комплекс

$$\mathcal{K} = \partial\Delta\big(\partial\Delta(1,2,3),4,5,6\big) \cup \Delta(1,2,3) = \\ = \big(\partial\Delta(1,2,3) * \partial\Delta(4,5,6)\big) \cup \Delta(1,2,3) \cup \Delta(4,5,6).$$

В этом случае $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq (S^7)^{\vee 6} \vee (S^8)^{\vee 6} \vee (S^9)^{\vee 2} \vee S^{10}$, см. [Ab, предложение 7.1]. Ниже представлена зигзагообразная диаграмма из конструкции 6.5 для цикла, соответствующего сфере S^{10}:

$$\begin{tikzcd}
& (D_1D_2S_3 + D_1S_2D_3 + S_1D_2D_3)(D_4D_5S_6 + D_4S_5D_6 + S_4D_5D_6) \\
D_1D_2D_3(D_4D_5S_6 + D_4S_5D_6 + S_4D_5D_6) \arrow[ur, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle}"] & \\
& (D_5S_6 + S_5D_6)w_{1234} + (D_4S_6 + S_4D_6)w_{1235} + (D_4S_5 + S_4D_5)w_{1236} \\
D_5D_6w_{1234} + D_4D_6w_{1235} + D_4D_5w_{1236} \arrow[ur, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, mapsto, "\partial_{\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle}"] & \\
& -(w_{1234} + w_{1235} + w_{1236}) \wedge (w_{1456} + w_{2456} + w_{3456})
\end{tikzcd}$$

Мы видим, что цикл из резольвенты Тейлор не имеет сомножителя состоящего одной образующей w_J. Таким образом, сфера S^{10} в букете не реализуется итерированным произведением Уайтхеда, что иллюстрирует [Ab, предложение 7.2].

Используя то же рассуждение, что и в доказательстве теоремы 7.1, мы можем записать цикл в комплексе Тейлор, представляющий образ при гомоморфизме Гуревича *произвольного* итерированного высшего произведения Уайтхеда, а не только сгнездованного. Однако общая формула для ответа весьма гроздкая. Вместо выписывания общей формулы, мы проиллюстрируем её на примере.

Пример 7.4. Рассмотрим подстановочный комплекс

$$\mathcal{K} = \partial\Delta\big(\partial\Delta(1,2,3), \partial\Delta(4,5,6), 7, 8\big).$$

По теореме 5.1 он реализует скобку $w = \big[[\mu_1,\mu_2,\mu_3],[\mu_4,\mu_5,\mu_6],\mu_7,\mu_8\big]$. Из описания недостающих граней в определении 4.1 получаем

$$\mathrm{MF}(\mathcal{K}) = \big\{\Delta(1,2,3), \Delta(4,5,6), \Delta(1,4,7,8), \Delta(1,5,7,8), \Delta(1,6,7,8), \\ \Delta(2,4,7,8), \Delta(2,5,7,8), \Delta(2,6,7,8), \Delta(3,4,7,8), \Delta(3,5,7,8), \Delta(3,6,7,8)\big\}.$$

Применяя конструкцию 6.5 к канонической клеточной цепи

$$h_c(w) = (D_1D_2S_3 + D_1S_2D_3 + S_1D_2D_3)(D_4D_5S_6 + D_4S_5D_6 + S_4D_5D_6)(D_7S_8 + S_7D_8),$$

получаем соответствующий цикл в комплексе Тейлор:

$$(w_{1478}+w_{1578}+w_{1678}+w_{2478}+w_{2578}+w_{2678}+w_{3478}+w_{3578}+w_{3678})\wedge w_{456}\wedge w_{123}.$$

Приложение A. Доказательство теоремы Тейлор

Здесь мы доказываем, что комплекс $T(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$, описанный в конструкции 6.4 — свободная резольвента, а комплекс $T'(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$ из Конструкции 6.9 — косвободная резольвента. В случае модулей набросок доказательства содержится в [Ei, упражнение 17.11] (см. также [HH, теорема 7.1.1]). Случай комодулей получается дуализацией.

Теорема A.1.

а) $T(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$ *— свободная резольвента* $\Bbbk[m]$*-модуля* $\Bbbk[m]/(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$.

б) $T'(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$ *— косвободная резольвента* $\Bbbk\langle m\rangle$*-комодуля* $C(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{n}_i=\frac{\mathfrak{m}_i}{\gcd(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_t)}$. Тогда имеем[1] $(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_{t-1}:\mathfrak{m}_t)=(\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_{t-1})$.

В случае модулей существует короткая точная последовательность

$$0\to\Bbbk[m]/(\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_{t-1})\xrightarrow{\cdot\mathfrak{m}_t}\Bbbk[m]/(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_{t-1})\to\Bbbk[m]/(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)\to 0.$$

Предположим по индукции, что $T(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_{t-1})$ является резольвентой. Рассмотрим инъективный морфизм

$$\varphi\colon\Bbbk[m]/(\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_{t-1})\xrightarrow{\cdot\mathfrak{m}_t}\Bbbk[m]/(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_{t-1})$$

и индуцированный морфизм резольвент

$$\widetilde{\varphi}\colon T(\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_{t-1})\to T(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_{t-1}).$$

Доказательство состоит из трёх лемм, доказанных по отдельности ниже. Согласно лемме A.4, комплекс $T(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$ может быть отождествлён с конусом морфизма $\widetilde{\varphi}$. Тогда лемма A.2 влечёт, что $T(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$ является резольвентой для модуля $\Bbbk[m]/(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)$.

Аналогично, в случае комодулей мы рассматриваем короткую точную последовательность комодулей

$$0\to C(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_t)\to C(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_{t-1})\xrightarrow{\cdot\frac{1}{\mathfrak{m}_t}}C(\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_{t-1})\to 0,$$

применяем индукцию и леммы ниже. □

Лемма A.2.

а) Пусть $\varphi\colon\bar V\to V$ *— инъективный морфизм модулей. Пусть* $\bar U_\bullet\to\bar V$ *и* $U_\bullet\to V$ *— резольвенты. Тогда конус* $C(\widetilde{\varphi})$ *индуцированного морфизма резольвент* $\widetilde{\varphi}\colon\bar U_\bullet\to U_\bullet$ *является резольвентой для* $V/\varphi(\bar V)$.

б) Пусть $\varphi'\colon A\to\bar A$ *— сюръективный морфизм комодулей. Пусть* $A\to B^\bullet$ *и* $\bar A\to\bar B^\bullet$ *— резольвенты. Тогда коконус* $C'(\widetilde{\varphi}')$ *индуцированного морфизма резольвент* $\widetilde{\varphi}'\colon B^\bullet\to\bar B^\bullet$ *является резольвентой для* $\ker(\varphi'\colon A\to\bar A)$.

Доказательство. Рассмотрим длинную точную последовательность гомологий, ассоциированную с конусом $C(\widetilde{\varphi})$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}\cdots\longrightarrow & H_1(U_\bullet) & \longrightarrow & H_1(C(\widetilde{\varphi})) & \longrightarrow & H_0(\bar U_\bullet) & \longrightarrow & H_0(U_\bullet) & \longrightarrow & H_0(C(\widetilde{\varphi})) & \to 0\\ & \| & & & & \| & & \| & & \| & \\ & 0 & & & & \bar V & \xrightarrow{\varphi} & V & \longrightarrow & V/\varphi(\bar V) & \to 0\end{array}$$

[1] Частное идеалов $\mathcal{I},\mathcal{J}$ в коммутативном кольце R определяется как $(\mathcal{I}:\mathcal{J})=\{f\in R\mid f\mathcal{J}\subset\mathcal{I}\}$.

Из инъективности морфизма $\varphi\colon \bar V \to V$ следует, что $H_1(C(\widetilde\varphi)) = 0$. Тривиальность старших групп гомологий $H_i\big(C(\widetilde\varphi)\big)$, $i > 1$, следует из точности. Таким образом, $C(\widetilde\varphi)$ является резольвентой для $H_0(C(\widetilde\varphi)) \cong V/\varphi(\bar V)$.

Случай комодулей доказывается обращением стрелок. $\square$

Лемма A.3.

а) *Морфизм* $\widetilde\varphi\colon T(\mathfrak n_1,\dots,\mathfrak n_{t-1}) \to T(\mathfrak m_1,\dots,\mathfrak m_{t-1})$ *определяется формулой*

$$\widetilde\varphi(\bar e_J) = \frac{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}}{\mathfrak m_J} e_J, \qquad J \subset \{1,\dots,t-1\}.$$

б) *Морфизм* $\widetilde\varphi'\colon T'(\mathfrak m_1,\dots,\mathfrak m_{t-1}) \to T'(\mathfrak n_1,\dots,\mathfrak n_{t-1})$ *определяется формулой*

$$\widetilde\varphi'(x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m} e^J) = \frac{\mathfrak m_J}{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}} x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m} \bar e^J, \qquad J \subset \{1,\dots,t-1\}.$$

Доказательство. Необходимо только проверить, что описанные выше отображения коммутируют с дифференциалами.

Для а), обозначим $T(\mathfrak n_1,\dots,\mathfrak n_{t-1}) = \{\bar F_\bullet, \bar d\}$ и $T(\mathfrak m_1,\dots,\mathfrak m_{t-1}) = \{F_\bullet, d\}$. Напомним, что базис в $F_\bullet$ состоит из элементов $\{e^J\}$, занумерованных подмножествами $J \subset \{1,\dots,t-1\}$. Будем обозначать соответствующие базисные элементы комплекса $\bar F_\bullet$ через $\bar e^J$. Требуемое свойство следует из рассмотрения следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\bar F_s \arrow[rrr, "\bar d"] \arrow[dddd, "\widetilde\varphi"'] & & & \bar F_{s-1} \arrow[dddd, "\widetilde\varphi"] \\
& \bar e_J \arrow[r, mapsto, "\bar d"] \arrow[dd, mapsto, "\widetilde\varphi"] & \sum\limits_{j\in J} \operatorname{sign}(j,J)\frac{\mathfrak n_J}{\mathfrak n_{J\setminus\{j\}}}\bar e_{J\setminus\{j\}} \arrow[d, mapsto, "\widetilde\varphi"] & \\
& & \sum\limits_{j\in J} \operatorname{sign}(j,J)\frac{\mathfrak n_J}{\mathfrak n_{J\setminus\{j\}}}\frac{\mathfrak m_{(J\setminus\{j\})\cup\{t\}}}{\mathfrak m_{J\setminus\{j\}}} e_{J\setminus\{j\}} \arrow[d, equal] & \\
& \frac{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}}{\mathfrak m_J} e_J \arrow[r, mapsto, "d"] & \sum\limits_{j\in J} \operatorname{sign}(j,J)\frac{\mathfrak m_J}{\mathfrak m_{J\setminus\{j\}}}\frac{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}}{\mathfrak m_J} e_{J\setminus\{j\}} & \\
F_s \arrow[rrr, "d"] & & & F_{s-1}.
\end{tikzcd}$$

Здесь мы используем тождество

$$\frac{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}}{\mathfrak m_{(J\setminus\{j\})\cup\{t\}}} = \frac{\mathfrak n_J}{\mathfrak n_{J\setminus\{j\}}},$$

которое следует из определения монома $\mathfrak n_i$.

Утверждение б) доказывается дуализацией. $\square$

Лемма A.4. *С точностью до знака дифференциалов*

а) *конус* $C(\widetilde\varphi)$ *изоморфен* $T(\mathfrak m_1,\dots,\mathfrak m_t)$;

б) *коконус* $C'(\widetilde\varphi')$ *изоморфен* $T'(\mathfrak m_1,\dots,\mathfrak m_t)$.

Доказательство. Для а), обозначим $T(\mathfrak n_1,\dots,\mathfrak n_{t-1}) = \{\bar F_\bullet, \bar d\}$, $T(\mathfrak m_1,\dots,\mathfrak m_{t-1}) = \{F_\bullet, d\}$ и $T(\mathfrak m_1,\dots,\mathfrak m_t) = \{\widetilde F_\bullet, \widetilde d\}$.

Определим морфизм $\psi\colon C(\widetilde\varphi) \to T(\mathfrak m_1,\dots,\mathfrak m_t)$, т. е. морфизм модулей $\psi\colon \bar F_s \oplus F_{s+1} \to \widetilde F_{s+1}$, коммутирующий с дифференциалами. Так как $F_\bullet$ — подкомплекс и в $C(\widetilde\varphi)$, и в $\widetilde F_\bullet$, определим ψ на $e_J \in F_{s+1}$ равенством $\psi(e_J) = \widetilde e_J$. Теперь определим ψ на $\bar e_J \in \bar F_s$

формулой $\psi(\bar e_J) = \widetilde e_{J\cup\{t\}}$. Диаграмма ниже показывает, что получаемое отображение ψ коммутирует с дифференциалами:

$$\begin{tikzcd}
\bar F_s \oplus F_{s+1} \arrow[rrr, "d_{C(\widetilde\varphi)}"] \arrow[ddd, "\psi"] & & & \bar F_{s-1} \oplus F_s \arrow[ddd, "\psi"] \\
& \bar e_J \arrow[r, mapsto, "\widetilde\varphi - \bar d"] \arrow[d, mapsto, "\psi"] & \frac{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}}{\mathfrak m_J} e_J - \sum\limits_{j\in J} \operatorname{sign}(j,J) \frac{\mathfrak n_J}{\mathfrak n_{J\setminus\{j\}}} \bar e_{J\setminus\{j\}} \arrow[d, mapsto, "\psi"] & \\
& \pm\widetilde e_{J\cup\{t\}} \arrow[r, mapsto, "\widetilde d"] & \frac{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}}{\mathfrak m_J} \widetilde e_J \pm \sum\limits_{j\in J} \operatorname{sign}(j,J) \frac{\mathfrak n_J}{\mathfrak n_{J\setminus\{j\}}} \widetilde e_{(J\setminus\{j\})\cup\{t\}} & \\
\widetilde F_{s+1} \arrow[rrr, "\widetilde d"] & & & \widetilde F_s.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, ψ является морфизмом $C(\widetilde\varphi) \to T(\mathfrak m_1, \ldots, \mathfrak m_t)$, который, очевидно, является изоморфизмом.

Чтобы доказать утверждение б), введём обозначения $T'(\mathfrak n_1, \ldots, \mathfrak n_{t-1}) = \{\bar I^\bullet, \bar\partial\}$, $T'(\mathfrak m_1, \ldots, \mathfrak m_{t-1}) = \{I^\bullet, \partial\}$ и $T'(\mathfrak m_1, \ldots, \mathfrak m_t) = \{\widetilde I^\bullet, \widetilde\partial\}$.

Определим $\psi'\colon T'(\mathfrak m_1, \ldots, \mathfrak m_t) \to C'(\widetilde\varphi)$, т. е. $\psi'\colon \widetilde I^s \to I^s \oplus \bar I^{s-1}$ формулой

$$\psi'(x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\widetilde e^J) = \begin{cases} (-1^{|J|-1} x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m} \bar e^{J\setminus\{t\}} & \text{при } t \in J, \\ (-1)^{|J|} x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m} e^J & \text{при } t \notin J. \end{cases}$$

Остаётся проверить, что ψ' коммутирует с дифференциалами. Для $t \in J$ имеем

$$\begin{tikzcd}
x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\widetilde e^J \arrow[r, mapsto, "\widetilde\partial"] \arrow[d, mapsto, "\psi'"] & \sum\limits_{j\notin J} \operatorname{sign}(j,J) \frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\mathfrak m_J}{\mathfrak m_{J\cup\{j\}}} \widetilde e^{J\cup\{j\}} \arrow[d, mapsto, "-\psi'"] \\
(-1)^{|J|-1} x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\bar e^{J\setminus\{t\}} \arrow[r, mapsto, "\bar\partial"] & (-1)^{|J|-1} \sum\limits_{j\notin J} \operatorname{sign}(j,J) \frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\mathfrak n_J}{\mathfrak n_{J\cup\{j\}}} \bar e^{J\cup\{j\}\setminus\{t\}}.
\end{tikzcd}$$

Для $t \notin J$ имеем

$$\begin{tikzcd}
x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\widetilde e^J \arrow[r, mapsto, "\widetilde\partial"] \arrow[d, mapsto, "\psi'"] & \sum\limits_{j\notin J,\, j\ne t} \operatorname{sign}(j,J) \frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\mathfrak m_J}{\mathfrak m_{J\cup\{j\}}} \widetilde e^{J\cup\{j\}} + (-1)^{|J|} \frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\mathfrak m_J}{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}} \widetilde e^{J\cup\{t\}} \arrow[d, mapsto, "\psi'"] \\
x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m} e^J \arrow[r, mapsto, "-\partial+\widetilde\varphi'"] & -\sum\limits_{j\notin J,\, j\ne t} \operatorname{sign}(j,J) \frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\mathfrak m_J}{\mathfrak m_{J\cup\{j\}}} e^{J\cup\{j\}} + \frac{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\mathfrak m_J}{\mathfrak m_{J\cup\{t\}}} \bar e^J;
\end{tikzcd}$$

Тем самым получаем искомый морфизм $\psi'\colon T'(\mathfrak m_1, \ldots, \mathfrak m_t) \to C'(\widetilde\varphi)$. □

Список литературы

[Ab] Абрамян С. А. *Итерированные высшие произведения Уайтхеда в топологии момент-угол-комплексов.* Сиб. мат. ж. 60:2 (2019), 243–256.

[Ay1] Айзенберг А. А. *Подстановки многогранников, симплициальных комплексов и мультиградуированные числа Бетти.* Тр. ММО, 74:2 (2013), 211–245.

[Ay2] Ayzenberg, Anton A. *Buchstaber invariant, minimal non-simplices and related.* Osaka J. Math. 53 (2016), no. 2, 377–395.

[BBCG] Bahri, Anthony; Bendersky, Martin; Cohen, Frederick R.; Gitler, Samuel. *Operations on polyhedral products and a new topological construction of infinite families of toric manifolds.* arXiv:1011.0094.

[BBP] Баскаков И. В., Бухштабер В. М., Панов Т. Е. *Алгебры клеточных коцепей и действия торов.* УМН, 59:3(357) (2004), 159–160.

[BP1] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра.* УМН, 55:5(335) (2000), 3–106.

[BP2] Buchstaber, Victor M.; Panov, Taras E. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[Ei] Eisenbud, David. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995. [Русский перевод: Айзенбад Д., *Коммутативная алгебра с прицелом на алгебраическую геометрию,* МЦНМО, Москва, 2017.]

[GPTW] Grbić, Jelena; Panov, Taras; Theriault, Stephen; Wu, Jie. *The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 9, 6663–6682.

[GT] Грбич Е., Терио С. *Теория гомотопий в торической топологии.* УМН, 71:2(428) (2016), 3–80.

[Ha] Hardie, Keith A. *Higher Whitehead products.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 12 (1961), 241–249.

[HH] Herzog, Jürgen; Hibi, Takayuki. *Monomial Ideals.* Graduate Texts in Mathematics, 260. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011

[IK1] Iriye, Kouyemon; Kishimoto, Daisuke. *Polyhedral products for shifted complexes and higher Whitehead products.* arXiv:1505.04892.

[IK2] Iriye, Kouyemon; Kishimoto, Daisuke. *Whitehead products in moment-angle complexes.* arXiv:1807.00087.

[Pa] Панов Т. Е. *Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях.* УМН, 68:3(411) (2013), 111–186.

[PR] Panov, Taras; Ray, Nigel. *Categorical aspects of toric topology.* In: *Toric Topology*, M. Harada *et al.*, eds. Contemp. Math., 460. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322.

[Po] Porter, Gerald J. *Higher-order Whitehead products.* Topology 3 (1965), 123–135.

[WZ] Wang, Xiangjun; Zheng, Qibing. *The homology of simplicial complements and the cohomology of polyhedral products.* Forum Math. 27 (2015), no. 4, 2267–2299.

[Wi] Williams, Frank D. *Higher Samelson products.* J. Pure Appl. Algebra 2 (1972), 249–260.

Лаборатория алгебраической геометрии, НИУ ВШЭ, ул. Усачёва, д. 6, Москва, Россия, 119048

Email address: `semyon.abramyan@gmail.com`

Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Ленинские горы, Москва, РФ, 119991

Институт теоретической и экспериментальной физики имени А. И. Алиханова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Москва, Россия

Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

Email address: `tpanov@mech.math.msu.su`

URL: `http://higeom.math.msu.su/people/taras/`