Математический институт В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 514.84, 512.77, 517.938

Талалаев
Дмитрий Валерьевич

Квантовый метод спектральной кривой

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности геометрия и топология (01.01.04)

Москва 2010 г.

Содержание

Введение

Главные результаты и основная идея работы имеют непосредственное отношение к двум важнейшим направлениям развития геометрии и топологии 20-го века, связанным с приложениями теории интегрируемых систем и приложениями квантовой физики. Наиболее ярким результатом первого направления является решение проблемы Шоттки [1], основанное на гипотезе С.П. Новикова. Задача характеризации Якобианов среди прочих главно-поляризованных абелевых многообразий была решена в терминах нелинейных уравнений: соответствующее θ-функциональное выражение удовлетворяет уравнению КП тогда и только тогда, когда абелево многообразие является Якобианом некоторой кривой. Развитием этой деятельности явилось доказательство гипотезы Вельтерса [2], характеризующей Якобианы кривых в терминах тройных секущих соответствующих многообразий Куммера. Второй существенный пласт результатов связан с приложениями квантовой теории поля в задаче построения топологических инвариантов, в том числе в маломерной топологии. Теория инвариантов Джонса-Виттена, или более общо - квантовая топологическая теория поля, обобщает традиционные инварианты узлов: полином Александера и полином Джонса. Собственно инварианты строятся как корелляционные функции некоторой квантовой теории поля [3]. Также с идеями квантовой теории поля связана теория инвариантов Дональдсона [4] и ее развитие Зайбергом и Виттеном. Данный подход оказался исключительно эффективным и привел к таким важным результатам как доказательство гипотезы Тома о степени гладкого вложения кривой в $\mathbb{C}P^2$ [5]. Данное направление развития математики поднимают проблему нахождения эффективных методов решения квантовых задач.

Настоящая работа посвящена построению квантовых аналогов алгебро-геометрических методов, применимых при анализе и решении классических интегрируемых систем. Эти методы основаны на конструкции спектральной кривой и соответствующего отображения Абеля. Кроме приложений в топологии, явное описание решений квантовых интегрируемых систем непосредственно связано с такими геометрическими задачами, как вычисление когомологий θ-дивизора абелева многообразия [6], вычисление когомологий и характеристических классов пространств модулей стабильных голоморфных расслоений [7, 8], а также пространств модулей флагов голоморфных расслоений, в случае базы $\mathbb{C}P^1$ называемых пространствами Ломона [9].

Следует также отметить связь метода спектральной кривой и теории интегрируемых систем в целом с Эрлангенской программой Ф. Клейна [10], согласно которой исследование геометрических свойств эквивалентно исследованию соответствующих групп симметрий. Теория интегрируемых систем позволяет расширить понятие симметрии с „главной группы“ до пучка алгебр Ли на некоторой алгебраической кривой, тем самым обогащая геометрические конструкции комплексной алгебраической геометрией и теорией специальных функций не групповой природы.

В работе строится квантовый аналог метода спектральной кривой для рациональной и эллиптической системы Годена [11]. В классификации Хитчина эти случае отвечают роду 0 и 1 базовой кривой. Главная задача работы, родственная нахождению топологических инвариантов квантово-полевого типа, а также тесно связанная с исследованием геометрических свойств пространств модулей, состоит в описании спектров рассматриваемых квантовых интегрируемых систем. Полученные результаты, в том числе методологический подход построения квантовой спектральной кривой, позволили описать явно дискретную группу симметрии спектра рассматриваемых интегрируемых систем. Квантование системы Хитчина на кривой произвольного рода и решение соответствующей квантовой задачи потребует использования иной техники, однако, найденная в рассматриваемых случаях геометрическая аналогия может оказаться эффективной и в ситуации общего рода.

Классические интегрируемые системы.

Существуют многочисленные исключительно важные примеры интегрируемых систем, описывающие специальные семейства физических процессов, к которым относятся многие уравнения гидродинамики [12], спиновые цепочки, интегрируемые волчки (в частности случаи Лагранжа, Эйлера, Ковалевской [13]). Тем не менее, в основе данной работы лежит структурная теория интегрируемых систем, опирающаяся на алгебраическую геометрию и теорию алгебр Ли.

Связь теории интегрируемых систем и алгебраической геометрии проявилась довольно рано, и имеет своей причиной определенную концепцию конечномерности в обоих случаях. Пионерской работой, устанавливающей связь между данными областями математики, можно считать работу К. Якоби [14], в которой решение задачи о геодезических на эллипсоиде было дано в терминах преобразования Абеля для некоторой алгебраической кривой. Связь в более полном смысле, а именно в виде описания фазового пространства интегрируемой системы как расслоения Якобианов, была понята в 70-х годах прошлого века в работах школы С.П. Новикова [12, 15]. В последствии в работе Н. Хитчина [16] было найдено универсальное геометрическое описание фазового пространства широкого класса конечномерных интегрируемых систем как кокасательного расслоения к некоторому пространству модулей расслоений на алгебраической кривой.

Параллельно развивался алгебраический взгляд на интегрируемые системы, в основе которого лежат принципы Гамильтоновой динамики и Пуассоновой геометрии, позволяющие описывать динамику в терминах структуры алгебры Ли на пространстве функций на рассматриваемом многообразии. Существенный прогресс в теории классических интегрируемых систем был связан с открытием метода обратной задачи в 60-х годах прошлого века начиная с работы [18]. Оказалось, что исключительно эффективным с точки зрения решения динамических систем является так называемое изоспектральное представление динамики, или представление Лакса [19]. Данное представление устанавливает связь Гамильтоновых потоков с присоединенным действием соответствующей алгебры Ли, которая является конечномерной для широкого класса примеров. Заметим, что как и в отношении с алгебраической геометрией, специфичность интегрируемых систем на Гамильтоновом уровне характеризуется определенной конечномерностью: бесконечномерная алгебра Ли функций на многообразии описывается в терминах конечномерной алгебры Ли, в частном случае - алгебры Ли матриц фиксированного размера. Именно представление Лакса позволяет ввести понятие спектральной кривой и использовать методы алгебраической геометрии для построения явных решений [20], решать динамические системы в алгебраических терминах методом проекции [21] или с помощью более общей конструкции грассманиана Сато и τ-функции [22].

Далее под методом спектральной кривой будем понимать метод решения интегрируемых систем, допускающих представление Лакса, в терминах отображения Абеля для кривой, определенной характеристическим полиномом оператора Лакса.

Первая часть работы посвящена построению обобщений описания типа Хитчина интегрируемых систем на случай кривых с особенностями и отмеченными точками. Важность этого обобщения в рамках данной работы связана с возможностью интерпретации системы Годена с алгебро-геометрической точки зрения. Актуальность задачи построения замкнутого формализма типа Хитчина на кривых с особенностями объясняется тем, что большая часть известных интегрируемых систем имеют именно такую природу. Кроме того, граничные точки пространства модулей кривых, представленные кривыми с особенностями, получаемыми обобщением особенности типа „двойная точка“ при склейке схемных точек, допускают явное описание как самих фазовых пространств, так и решений соответствующих моделей. К моделям, допускающим описание типа Хитчина на кривых с особенностями относятся многие известные примеры теории интегрируемых систем типа Годена, Калоджеро-Мозера для разных типов взаимодействий. В первой части работы строится согласованный формализм систем типа Хитчина на кривых с особенностями, поясняется, каким образом система Годена получается в рамках этого формализма, а также описывается классический сюжет разделения переменных в этом случае.

Квантование.

Квантовые интегрируемые модели, также как и классические, часто связаны с важными физическими феноменами. Обсуждаемые здесь примеры спиновых цепочек имеют самостоятельное физическое значение, как квантово-механические системы, описывающие одномерные магнетики. В ряду наиболее актуальных физических приложений полученных здесь результатов можно считать область квантовых вычислений.

Тем не менее, основным акцентом работы является исследование структурной роли интегрируемых систем в том числе на квантовом уровне, на котором также проявляется роль интегрируемых моделей, как симметрий более сложных объектов. В частности, спиновые цепочки, описывающие исключительно одномерные физические системы, оказываются связанными с двумерными задачами статистической физики с помощью метода трансфер-матрицы [11]. Основной метод квантовых интегрируемых систем, называемый квантовым методом обратной задачи (КМОЗ) был создан в 70-х годах 20-го века школой Л. Д. Фаддеева [23]. Во многом данный метод полагается на классический метод обратной задачи, в особенности в части гамильтонового описания. С помощью квантового метода обратной задачи были построены в частности следующие модели: квантовое нелинейное уравнение Шредингера, магнетик Гейзенберга и модель синус-Гордон (эта модель эквивалентна массивной модели Тирринга). Для этих моделей были найдены асимптотики корреляционных функций [49]. Многие из полученных в рамках КМОЗ результатов относительно асимптотик были известны ранее в рамкам метода анзаца Бете, открытым в 1931 году в работе [24].

КМОЗ был в значительной степени обобщен теорией квантовых групп, введенной Дринфельдом [25]. Язык алгебр Хопфа оказывается исключительно удобным для обобщения алгебраических структур, фигурирующих в теории квантовых интегрируемых систем, главным образом для обобщения пространства инвариантных полиномов на группе. Можно считать, что с помощью КМОЗ находится квантовый аналог алгебраической составляющей в теории интегрируемых систем. Вместе с этим, роль спектральной кривой и методов алгебраической геометрии в КМОЗ оставалась непонятой. Именно этой задаче в основном посвящена настоящая работа. Во второй части работы строится квантовый метод спектральной кривой, центральной конструкцией которого, является квантовый характеристический полином для квантового оператора Лакса. Он построен для систем типа Хитчина, соответствующих случаю базовой кривой рода 0 и 1 и набору отмеченных точек. Системы этого типа включают $\mathfrak{sl}_n$ систему Годена с рациональным и эллиптическим видом зависимости от параметров, эллиптическую систему Калоджеро-Мозера со спином. Квантовый характеристический полином представляет собой производящую функцию для квантовых гамильтонианов системы. В основе конструкции лежат методы теории квантовых групп, в частности используются результаты построения коммутативных подалгебр в Янгиане и динамической эллиптической квантовой алгебре Фельдера. Также в разделе 2 описана роль квантового характеристического полинома в задаче нахождения квантовых разделенных переменных.

Как было отмечено выше, методы КМОЗ не позволили существенно продвинуться в задаче описания спектров квантовых интегрируемых систем на конечном масштабе. Напомним, что именно эта задача является ключевой в программе унификации методов интегрируемых систем и квантовой теории поля с целью нахождения новых топологических инвариантов. Несмотря на то, что в некоторых моделях были найдены разделенные переменные, аналога отображения Абеля, как перехода от дивизора линейного расслоения к точке Якобиана, в квантовом случае найдено не было. В части 3 работы строится семейство геометрических симметрий решений квантовой задачи, описание которых также существенно использует конструкцию квантового характеристического полинома модели. Для построения этих симметрий используется традиционный метод анзаца Бете в альтернативной формулировке, а именно в терминах семейства специальных Фуксовых операторов с ограниченной монодромией. В свою очередь данные операторы возникают как скалярный аналог квантового характеристического многочлена. Такое описание квантовой задачи позволяет реализовать симметрии в терминах известных в теории изомонодромных деформаций преобразований Шлезингера [26] и применять известные решения уравнений изомонодромных деформаций, типа уравнений Пенлеве, для описания вариаций спектров квантовых систем при изменении параметров. В определенном смысле построенное семейство симметрий представляет собой аналог отображения Абеля.

Квантовый метод спектральной кривой и другие направления современной математики.
Исследования квантового характеристического полинома для моделей типа Годена позволили систематизировать и существенно повысить эффективность методов решения квантовых интегрируемых систем. Построенные дискретные симметрии спектров рассматриваемых систем выполняют роль обобщенных угловых операторов, то есть позволяют рекурентно строить семейства собственных векторов модели. Практическая значимость результатов в геометрии и топологии обусловлена возможностью обобщения данной техники на полевые модели, возникающие в топологических квантовых теориях поля, и в теориях поля, используемых при построении инвариантов Дональдсона и Зайберга-Виттена. Кроме этого, полученные результаты в проблеме решения квантовых систем имеют непосредственные приложения в задаче описания колец когомологий пространств модулей голоморфных расслоений, пространств Ломона, а также аффинных Якобианов.

В работе были выявлены многочисленные связи и приложения данного подхода в других областях современной математики и математической физики. В теории представлений полупростых алгебр Ли роль полученных результатов заключается в возможности эффективизации таких классических задач, как формула кратностей. Приложения такого типа возникают благодаря наличию специальных пределов системы Годена, образующие коммутативной подалгебры для которых интерпретируются как центральные элементы некоторых подалгебр в $U(\mathfrak{sl}_n)^{\otimes N}$ [27]. К этой же области приложений относится результат явного описания центра универсальной обертывающей аффинной алгебры на критическом уровне для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ изложенный в разделе 4. Также следует отметить важность метода квантовой спектральной кривой в геометрическом обобщении соответствия Ленглендса над $\mathbb{C}$ [28], в бурно развивающейся области некоммутативной геометрии, а также в математической физике и теории конденсированных сред. К области некоммутативной геометрии относятся изложенные в разделе 4 результаты, в том числе тождество Гамильтона-Кэли для квантовых операторов Лакса системы Годена, полученные в [29].

Благодарности Автор глубоко признателен коллективу кафедры Высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова за плодотворную атмосферу и ценные замечания при подготовке диссертации. Автор благодарен сотрудникам групп 170 и 197 Института теоретической и экспериментальной физики за стимулирующее общение. Особую благодарность автор выражает О. Бабелону, В.М. Бухштаберу, А.П. Веселову, А.М. Левину, С.А. Локтеву, М.А. Ольшанецкому, Т.Е. Панову, В.Н. Рубцову, А.В. Силантьеву, А.В. Червову, Г.И. Шарыгину. Данная работа выполнена при частичной поддержке фонда „Династия“, гранта РФФИ 09-01-00239 и гранта НШ-5413.2010.1.

1 Классический метод спектральной кривой

1.1 Представление Лакса

В данном разделе описывается классический метод спектральной кривой для конечномерных интегрируемых систем. Изложение начинается с представления Лакса [19], которое привело к становлению метода обратной задачи в теории интегрируемых систем. Оказывается, что достаточно широкий класс интегрируемых систем имеет так называемое представление Лакса

$$\dot{L}(z) = [M(z), L(z)] \tag{1.1}$$

где $M(z), L(z)$ являются матричнозначными функциями формальной переменной z, матричные элементы которых в свою очередь являются функциями на фазовом пространстве системы. Иными словами, фазовое пространство системы может быть вложено в некоторое пространство матричнозначных функций, на котором динамика представляется уравнением Лакса (1.1). Локально данное свойство выполняется для любой интегрируемой системы в силу наличия локальных переменных „действие-угол“ ([30], 2.4 Example 1). Глобально таким представлением обладают: гармонический осциллятор, интегрируемые волчки, модель Ньюмана, задача геодезических на эллипсоиде, открытая и замкнутая цепочки Тоды, система Калоджеро-Мозера для всех типов потенциалов и систем корней, система Годена, нелинейные иерархии КдФ, КП, Тоды, а также их известные матричные обобщения. Представление Лакса демонстрирует, что динамика, то есть Гамильтоново векторное поле $\dot{L} = \{H, L\}$ для матричнозначной функции L на фазовом пространстве представляется с помощью другой структуры алгебры Ли, а именно, с помощью структуры алгебры Ли на пространстве матричнозначных функций относительно операции коммутирования. Данное свойство лежит в основе многих алгебраических методов анализа интегрируемых систем, r-матричной техники и задачи разложения [31].

Представление Лакса в частности означает, что характеристический полином оператора Лакса является интегралом движения. Спектральная кривая определяется уравнением

$$det(L(z) - \lambda) = 0. \tag{1.2}$$

Оказывается, что решение уравнений, допускающих представление Лакса, упрощается с помощью вспомогательной линейной задачи

$$L(z)\Psi(z) = \lambda\Psi(z). \tag{1.3}$$

Уравнение Лакса эквивалентно условию совместности следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda\Psi(z) &= L(z)\Psi(z), \\ \dot{\Psi}(z) &= M(z)\Psi(z). \end{aligned}$$

Если теперь интерпретировать вспомогательную линейную задачу как способ задания линейного расслоения на спектральной кривой, то решение системы описывается в терминах линейных координат на пространстве модулей линейных расслоений на кривой, отождествляемом с ассоциированным Якобианом.

Далее излагается схема Хитчина и некоторые ее обобщения, которые претендуют на классификационное описание в теории конечномерных интегрируемых систем. Также определяется система Годена, подробно рассматривается классический метод спектральной кривой для этой системы и вводится аппарат разделенных переменных, существенным образом используемый в дальнейшем в разделе, посвященном квантованию.

1.2 Описание Хитчина

Пусть Σ_0 алгебраическая кривая, рассмотрим $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{r,d}(\Sigma_0)$ пространство модулей голоморфных стабильных расслоений над Σ_0 ранга r и степени d [32]. Рассмотрим каноническую голоморфную симплектическую структуру на кокасательном расслоении к данному пространству модулей $T^*\mathcal{M}$. Теория деформаций [33] позволяет явно описать слой кокасательного расслоения. Касательный вектор к пространству модулей в точке E, оответствующий инфинитезимальной деформации расслоения в представлении коциклом Чеха, может быть реализован элементом линейного пространства $H^1(\mathrm{End}(E))$. В свою очередь кокасательный вектор в точке E пространства модулей $\mathcal{M}$ благодаря двойственности Серра может быть представлен элементом пространства когомологий $\Phi \in H^0(\mathrm{End}(E) \otimes \mathcal{K})$, здесь $\mathcal{K}$ обозначает канонический класс Σ_0. В таком описании на кокасательном расслоении $T^*\mathcal{M}$ может быть определено семейство функций

$$h_i : T^*\mathcal{M} \to H^0(\mathcal{K}^{\otimes i}); \qquad h_i(E, \Phi) = \frac{1}{i} tr \Phi^i. \tag{1.4}$$

Прямая сумма семейства отображений h_i

$$h : T^*\mathcal{M} \longrightarrow \oplus_{i=1}^r H^0(\mathcal{K}^{\otimes i})$$

называется отображением Хитчина [16] и задает лагранжево слоение фазового пространства, определяя тем самым интегрируемую систему.

1.2.1 Спектральная кривая

Метод спектральной кривой предполагает явное решение системы в терминах естественных объектов некоторой алгебраической кривой. Рассмотрим (нелинейное) отображение расслоений

$$char(\Phi) : \mathcal{K} \to \mathcal{K}^{\otimes r}, \tag{1.5}$$

определенное с помощью выражения

$$char(\Phi)(\mu) = det(\Phi - \mu * Id) \tag{1.6}$$

где μ определяет точку слоя $\mathcal{K}$, а выражение Id - тождественное сечение расслоения $\mathrm{End}(E)$. Спектральная кривая определяется как прообраз нулевого сечения $\mathcal{K}^{\otimes r}$. Прообраз определяет алгебраическую кривую Σ в проективизации тотального пространства канонического расслоения $\mathcal{K}$.

1.2.2 Линейное расслоение

Непосредственно решение интегрируемых систем (нахождение переменных "действие-угол") в описании Хитчина может быть построено в терминах следующего линейного расслоения. Рассмотрим отображение проекции π соответствующее каноническому расслоению $\mathcal{K}$

$$\pi : \mathcal{K} \to \Sigma_0$$

и отображение обратных образов

$$\pi^* E \stackrel{\Phi - \tilde{\mu} * Id}{\longrightarrow} \pi^*(E \otimes \mathcal{K}),$$

здесь $\tilde{\mu}$ - тавтологическое сечение $\pi^*\mathcal{K}$. Рассмотрим также фактор-пучок $\mathcal{F}$, отвечающий этому вложению

$$0 \longrightarrow \pi^* E \stackrel{\Phi - \mu * Id}{\longrightarrow} \pi^*(E \otimes \mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0. \tag{1.7}$$

Носитель $\mathcal{F}$ совпадает с определенной выше спектральной кривой модели Σ, по причине того, что решение задачи на собственный вектор линейного оператора существует тогда и только тогда, когда соответствующий скаляр является собственным числом. Ограничим точную последовательность (1.7) на Σ

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \pi^* E|_\Sigma \xrightarrow{\Phi - \mu * Id} \pi^*(E \otimes \mathcal{K})|_\Sigma \longrightarrow \mathcal{F}|_\Sigma \longrightarrow 0.$$

Оказывается, что $\mathcal{L}$ определяет линейное расслоение на спектральной кривой, ассоциированное с собственным вектором поля Хиггса.

Определим отображение Абеля следующим образом: пусть $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ базис в $H_1(\Sigma_0, \mathbb{Z})$ с индексом пересечения $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$, пусть $\{\omega_i\}$ базис голоморфных дифференциалов $H^0(\mathcal{K})$, нормированный условием $\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$, и пусть $B_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j$ - матрица b-периодов. Тогда определим решетку Λ в $\mathbb{C}^g$ порожденную целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^g$ и решеткой с базисом, состоящим из строк матрицы B. Зафиксируем точку кривой $P_0 \in \Sigma$. Отображение Абеля может быть определено следующей формулой

$$A : \Sigma \to Jac_\Sigma = \mathbb{C}^g/\Lambda; \qquad A(P) = \begin{pmatrix} \int_{P_0}^P \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{P_0}^P \omega_g \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Данное определение не зависит от пути интегрирования благодаря рассмотрению факторпространства. Оно обобщается до отображения дивизоров и позволяет явно параметризовать пространство модулей линейных голоморфных расслоений на алгебраических кривых.

Теорема 1.1 ([16]). *Линейные координаты на Якобиане $Jac(\Sigma)$ взятые от образа преобразования Абеля $A(\mathcal{L})$ являются переменными типа*

„угол“ для системы Хитчина.

1.3 Система Хитчина на особых кривых

1.3.1 Обобщения

Конструкция Хитчина может быть обобщена на случай особых кривых и кривых с отмеченными точками [34], [35]. Это обобщение позволяет строить явные параметризации широкого класса интегрируемых систем, сохраняя при этом аналогию с геометрическими объектами классической системы Хитчина.

- Отмеченные точки: Может быть рассмотрено пространство модулей голоморфных расслоений на алгебраических кривых с дополнительными данными, а именно с тривиализациями в отмеченными точками. Такое пространство модулей получается факторизацией пространства функций переклейки по таким заменам тривиализаций в атласе открытых множеств, которые не меняют тривиализацию в отмеченных точках. Обозначим данное пространство модулей символом $\mathcal{M}_{r,d}(z_1, \ldots, z_k)$. Касательный вектор к пространству $\mathcal{M}_{r,d}(z_1, \ldots, z_k)$ в точке E является элементом пространства

  $$T_E\mathcal{M}_{r,d}(z_1, \ldots, z_k) \simeq H^1(\mathrm{End}(E) \otimes \mathcal{O}(-\sum_{i=1}^{k} z_i))$$

  Кокасательный вектор может быть представлен сечением следующего расслоения

  $$\Phi \in H^0(\mathrm{End}(E) \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{O}(\sum_{i=1}^{k} z_i))$$

- Особые точки: Пространство модулей расслоений может быть рассмотрено на кривых с особенностями типа „двойная точка“, „касп“ или так называемая „схемная двойная точка“. В этой ситуации также может быть построен содержательный формализм системы Хитчина, приводящий к большому количеству важных примеров интегрируемых систем. При этом алгебраическое описание дуализирующего пучка и пространства модулей расслоений оказывается более явным, чем в случае неособой кривой того же алгебраического рода.

1.3.2 Схемные точки

Опишем подробнее формализм системы Хитчина на кривых с двойными схемными точками. В работах [35] были построены обобщения ингредиентов системы Хитчина для особых кривых данного типа, а именно, была найдена алгебраическая интерпретация для пространства модулей голоморфных расслоений, касательного вектора к пространству модулей, сечений дуализирующего пучка, а также для канонической симплектической формы на кокасательном расслоении, была доказана интегрируемость.

Класс особенностей Рассмотрим кривую Σ^{proj} получающуюся склейкой 2 произвольных подсхем $A(\epsilon), B(\epsilon)$ на $\mathbb{C}P^1$ в одну точку (т.е. кривую, получающуюся добавлением одной гладкой точки ∞ к аффинной кривой $\Sigma^{aff} = Spec\{f \in \mathbb{C}[z] : \ f(A(\epsilon)) = f(B(\epsilon))\}$, где $\epsilon^N = 0$). Далее вычисляется алгебраический род таких кривых (т.е. $dim H^1(\mathcal{O})$). Основные рассматриваемые примеры предоставляются следующими ситуациями:

- Нильпотентные элементы: $A(\epsilon) = \epsilon, B(\epsilon) = 0$, в этом случае род равен $N - 1$.

- Корни из единицы: $A(\epsilon) = \epsilon, B(\epsilon) = \alpha\epsilon$, где $\alpha^k = 1$. В этом случае род равен $N - 1 - [(N-1)/k]$. Более общий случай корней из единицы реализуется подсхемами с соотношениями: $A(\epsilon) = \epsilon$ и $B(\epsilon)$ такая, что

$$\underbrace{B(B(B...(B}_{\text{k times}}(\epsilon))) = \epsilon \mod \epsilon^{N-1}.$$

  Род в этом случае также равен $N - 1 - [(N-1)/k]$.

- Геометрически отличные точки:

$$A(\epsilon) = a_0 + a_1\epsilon + ... + a_{N-1}\epsilon^{N-1}, \quad B(\epsilon) = b_0 + b_1\epsilon + ... + b_{N-1}\epsilon^{N-1},$$

  так что $a_0 \neq b_0$. Род равен N.

Расслоения Описание пространства модулей голоморфных расслоений для особых кривых производится на алгебраическом языке, а именно, используется соответствие между расслоениями и пучками их сечений, которые являются пучками локально-свободных, а следовательно и проективных модулей над структурным пучком рассматриваемой алгебраической кривой. Геометрическая характеризация проективного модуля осуществляется в аффинной карте нормализации, содержащей склеиваемые подсхемы. Модуль M_Λ ранга r над аффинной картой без бесконечности определяется подпространством в тривиальном модуле векторнозначных функций $s(z)$ на $\mathbb{C}$ элементов, удовлетворяющих условию:

$$s(A(\epsilon)) = \Lambda(\epsilon)s(B(\epsilon)),$$

где $\Lambda(\epsilon) = \sum_{i=0,...,N-1} \Lambda_i\epsilon^i$ - матричнозначный полином. Условие проективности данного модуля M_Λ (и, как следствие, условие на то, что соответствующий пучок отвечает векторному расслоению) заключается в следующем:

- Нильпотентный случай: $A(\epsilon) = \epsilon, B(\epsilon) = 0$, условие: $\Lambda_0 = Id$.

- Корень из единицы: $A(\epsilon) = \epsilon, B(\epsilon) = \alpha\epsilon$, где $\alpha^k = 1$,
  условие:
$$\Lambda(\epsilon)\Lambda(\alpha\epsilon)...\Lambda(\alpha^{k-1}\epsilon) = Id.$$

- Геометрически отличные точки:
$$A(\epsilon) = a_0 + a_1\epsilon + ... + a_{N-1}\epsilon^{N-1}, B(\epsilon) = b_0 + b_1\epsilon + ... + b_{N-1}\epsilon^{N-1},$$
  условие обратимости Λ_0.

Открытая клетка пространства модулей голоморфных расслоений на Σ^{proj} получается при рассмотрении фактор-пространства по отношению к действию GL_r на пространстве $\Lambda(\epsilon)$ общего положения, удовлетворяющих условиям выше. Предполагается, что GL_r действует сопряжением.

Дуализирующий пучок и глобальные сечения В гладкой ситуации, канонический класс $\mathcal{K}$ определяется расслоением форм старшей степени на комплексно-аналитическом многообразии M размерности m. При этом он реализует двойственность Серра, используемую при описании кокасательного пространства к пространству модулей расслоений. Буквально, двойственность Серра это невырожденное спаривание следующих пространств когомологий
$$H^n(\mathcal{F}) \times H^{m-n}(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{K}) \to \mathbb{C}$$
для произвольного когерентного пучка $\mathcal{F}$. В рассматриваемом случае дуализирующий пучок может быть определен явно своими глобальными сечениями. Глобальные сечения дуализирующего пучка на Σ^{proj} могут быть

описаны в терминах мероморфных дифференциалов на $\mathbb{C}$ вида

$$\omega_\phi = Res_\epsilon \left(\frac{\phi(\epsilon)dz}{z - A(\epsilon)} - \frac{\phi(\epsilon)dz}{z - B(\epsilon)} \right), \tag{1.9}$$

для произвольных $\phi(\epsilon) = \sum_{i=0,\ldots,N-1} \phi_i \frac{1}{\epsilon^{i+1}}$. В этом выражении дроби следует понимать как геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{z - A(\epsilon)} = \frac{1}{z - a_0 - a_1\epsilon - a_2\epsilon^2 - \ldots} = \frac{1}{(z - a_0)(1 - \frac{a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \ldots}{z - a_0})}$$
$$= \frac{1}{(z - a_0)}(1 + \frac{a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \ldots}{z - a_0} + (\frac{a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \ldots}{z - a_0})^2 + \ldots).$$

Символ Res_ϵ означает взятие коэффициента при $\frac{1}{\epsilon}$. Оказывается, что для произвольного $\phi(\epsilon)$ выражение выше дает голоморфный дифференциал на особой кривой Σ^{proj}, и кроме того, при этом любой дифференциал получается таким образом. В общей ситуации отображение пространства $\phi(\epsilon)$ в пространство голоморфных дифференциалов имеет ядро. Опишем спаривание Серра для структурного пучка. Рассмотрим покрытие кривой, состоящее из двух открытых множеств: $U_0 = \Sigma^{aff}$ и U_∞ - окрестность ∞. Пересечение $U_0 \cap U_\infty$ можно отождествить с проколотым диском $U_\infty^\bullet$ с центром в ∞. Пусть $s \in \mathcal{O}_{U_\infty^\bullet}$ - представитель класса $H^1(\mathcal{O})$. Спаривание определяется формулой:

$$< \omega_\phi, s >= \oint_{\delta U_0 \cap U_\infty} \omega_\phi s. \tag{1.10}$$

Несложно заметить, что спаривание корректно определено на классах когомологий.

Эндоморфизмы модуля M_Λ описываются матричнозначными полиномиальными функциями $\Phi(z)$ удовлетворяющими следующему условию

$$\Phi(A(\epsilon)) = \Lambda(\epsilon)\Phi(B(\epsilon))\Lambda(\epsilon)^{-1}.$$

Действие $\Phi(z)$ на сечении $s(z)$ определяется формулой: $s(z) \mapsto \Phi(z)s(z)$. Пространство $H^1(\mathrm{End}(M_\Lambda))$ описывается как фактор-пространство матричнозначных полиномиальных функций по двум подпространствам:

$$\mathrm{End}_{out} = \{\chi(z) \in Mat_n[z] | \chi(z) = const\}$$

и

$$\mathrm{End}_{in} = \{\chi(z) \in Mat_n[z] | \chi(A(\epsilon))) = \Lambda(\epsilon)\chi(B(\epsilon))\Lambda(\epsilon)^{-1}\}.$$

Элементы $H^1(\mathrm{End}(M_\Lambda))$ интерпретируются как касательные вектора к пространству модулей голоморфных расслоений в точке M_Λ. Инфинитезимальная деформация расслоения, соответствующая элементу $\chi(z)$, задается формулой

$$\delta_{\chi(z)}\Lambda(\epsilon) = \chi(A(\epsilon))\Lambda(\epsilon) - \Lambda(\epsilon)\chi(B(\epsilon)). \tag{1.11}$$

Глобальные сечения $H^0(\mathrm{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ описываются выражениями:

$$\Phi(z) = Res_\epsilon \left(\frac{\Phi(\epsilon)}{z - A(\epsilon)} dz - \frac{\Lambda(\epsilon)^{-1}\Phi(\epsilon)\Lambda(\epsilon)}{z - B(\epsilon)} dz \right), \tag{1.12}$$

где

$$Res_\epsilon \Lambda(\epsilon)\Phi(\epsilon)\Lambda(\epsilon)^{-1} - \Phi(\epsilon) = 0$$

и $\Phi(\epsilon) = \sum_i \Phi_i \frac{1}{\epsilon^{i+1}}$ - матричнозначная полиномиальная функция. Данное выражение также предполагает разложение знаменателя в геометрическую прогрессию. Оказывается, что все глобальные сечения из $H^0(\mathrm{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ получаются таким образом.

Симплектическая форма на кокасательном расслоении к пространству модулей расслоений может быть описана в терминах гамильтоновой редукции симплектической формы на пространстве пар $\Lambda(\epsilon), \Phi(\epsilon)$, заданной выражением:

$$Res_\epsilon Trd(\Lambda(\epsilon)^{-1}\Phi(\epsilon)) \wedge d\Lambda(\epsilon). \tag{1.13}$$

При этом гамильтонова редукция выполняется относительно действия сопряжением постоянными матрицами GL_n.

Интегрируемость Система Хитчина на кривой Σ^{proj} описывается как система на фазовом пространстве, которое реализуется в виде гамильтонового фактора пространства пар $\Lambda(\epsilon), \Phi(\epsilon)$. Симплектическая форма задается формулой 1.13. Редукция рассматривается по отношению к действию группы GL_n сопряжениями. Оператор Лакса определяется формулой 2.43. Гамильтонианы задаются коэффициентами разложения функций $Tr(\Phi(z)^k)$ по некоторому базису голоморфных k-дифференциалов (то есть сечений $H^0(\mathcal{K}^k)$). Отметим, что $\forall z, w, k, l$ выполняется следующее свойство коммутативности: $Tr(\Phi(z)^k)$ и $Tr(\Phi(w)^l)$ коммутируют на не редуцированном пространстве.

Доказательства интегрируемости системы Хитчина на особой кривой проводится с помощью техники r-матричных вычислений. Пуассонова скобка между $\Phi(\epsilon)$ определяется r-матричным выражением:

$$\{\Phi(\epsilon) \otimes \Phi(\eta)\} = \left|[\Phi(\epsilon) \otimes 1, \delta^\epsilon_\eta R]\right|_- = \left|[\Phi(\epsilon) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(\eta), \delta^\epsilon_\eta R]\right|_\eta. \tag{1.14}$$

Здесь $\{A \otimes B\}$ стандартное обозначение для поэлементных скобок Пуассона двух матриц со значениями в Пуассоновой алгебре. Матрица R это матрица перестановки в тензорном квадрате линейного пространства: $R(u \otimes v) =$

$v \otimes u$. Функция δ^{η}_{ϵ} определяется выражением

$$\delta^{\eta}_{\epsilon} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\eta^k}{\epsilon^{k+1}}.$$

Обозначение $|...|_{\nu}$ означает отбрасывание мономов ν^k, степени $k < N$, также как $|...|_{-}$ означает отбрасывание положительных мономов.

r-матричной скобкой также описывается Пуассонова структура следующих генераторов

$$\Phi(z,\epsilon) = \left| \frac{\Phi(\epsilon)}{z - A(\epsilon)} - \frac{\Lambda^{-1}(\epsilon)\Phi(\epsilon)\Lambda(\epsilon)}{z - B(\epsilon)} \right|_{-\{\epsilon\}}.$$

А именно выполняется следующее равенство

$$\{\Phi(z,\epsilon) \otimes \Phi(w,\eta)\} = \left| [\Phi(z,\epsilon) \otimes 1, R]\, \delta^{\epsilon}_{\eta} \delta^{z}_{w} \right|_{-\{\text{по всем переменным}\}}.$$

Пуассонова структура в терминах операторов Лакса также описывается r-матричной формой:

$$\{\Phi(z) \otimes \Phi(w)\} = |[\Phi(z) \otimes 1, R]\delta^{z}_{w}|_{-\{z,w\}} = |[\Phi(z) \otimes 1 + 1 \otimes \Phi(w), R]\delta^{z}_{w}|_{w}. \tag{1.15}$$

Коммутативность $Tr(\Phi(z)^k)$ доказывается традиционным для структур r-матричного типа способом.

Функции $Tr(\Phi(z)^k)$ инвариантны по отношению к действию группы GL_n сопряжением на пространстве пар $\Lambda(\epsilon), \Phi(\epsilon)$. Эти функции могут быть ограничены на редуцированное пространство. Важным свойством гамильтоновой редукции является то, что при редукции сохраняются скобки инвариантных функций. Следовательно, данная процедура приводит к построению коммутативного семейства на редуцированном пространстве, которое совпадает с фазовым пространством системы Хитчина.

Пример 1.1. *Рассмотрим рациональную кривую с одной двойной точкой $z_1 \leftrightarrow z_2$ (кольцо рациональных функций на такой кривой выделяется в кольце рациональных функций f на $\mathbb{C}P^1$ условием $f(z_1) = f(z_2)$) и одной отмеченной точкой z_3. Дуализирующий пучок (т.е. пучок реализующий двойственность Серра $H^1(\mathcal{F})^* \simeq H^0(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{K})$) имеет глобальное сечение $dz(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2})$. Рассмотрим пространство модулей $\mathcal{M}$ голоморфных расслоений E ранга n на Σ_{node} с фиксированной тривиализацией в точке z_3. Имеется следующий изоморфизм линейных пространств*

$$T_E\mathcal{M} = H^1(\mathrm{End}(E) \otimes \mathcal{O}(-p)).$$

Ограничим рассмотрение открытой клеткой пространства модулей, отвечающей классам эквивалентности матриц Λ с различными собственными значениями. Кокасательное пространство изоморфно пространству голоморфных сечений расслоения $\mathrm{End}^*(E) \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{O}(p)$. Это пространство может быть реализовано пространством рациональных матричнозначных функций переменной z следующего вида

$$\Phi(z) = \left(\frac{\Phi_1}{z - z_1} - \frac{\Phi_2}{z - z_2} + \frac{\Phi_3}{z - z_3} \right) dz,$$

где на вычеты выполняются условия

$$\Phi_1 \Lambda = \Lambda \Phi_2 \quad \text{и} \quad \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0.$$

Фазовое пространство системы параметризуется элементом $U \in GL(n)$, который характеризует тривиализацию расслоения в точке z_3, матрицей Λ, определяющей проективный модуль над кольцом $\mathcal{O}(\Sigma_{mode})$, вычетами поля Хиггса Φ_i. В данных координатах каноническая симплектическая форма на $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ может быть представлена выражением

$$\omega = Tr(d(\Lambda^{-1}\Phi_1) \wedge d\Lambda) + Tr(d(U^{-1}\Phi_3) \wedge dU).$$

После выполнения гамильтоновой редукции по отношению к правому действию группы $GL(n)$ на U и присоединенному действию на элементах Φ_i, Λ получим пространство, параметризуемое матричными элементами $(\Phi_3)_{ij} = f_{ij}, i \neq j$; собственными значениями e^{2x_i} матрицы Λ и диагональными элементами матрицы $(\Phi_1)_{ii} = p_i$ со следующими скобками Пуассона

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{f_{ij}, f_{kl}\} = \delta_{jk} f_{il} - \delta_{il} f_{kj}.$$

Гамильтониан спиновой тригонометрической системы Калоджеро-Мозера, связанной с конечно-зонными решениями матричных обобщений уравнения КП [36], получается как коэффициент $Tr\Phi^2(z)$ при $1/(z-z_1)^2$

$$H = Tr\Phi_1^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 - 4 \sum_{i \neq j} \frac{f_{ij} f_{ji}}{\sinh^2(x_i - x_j)}.$$

1.4 Система Годена

1.4.1 Оператор Лакса

Система Годена была построена в [11] (раздел 13.2.2) как предел XXX модели Гейзенберга. Она описывает одномерную цепочку взаимодействующих частиц со спином. Система Годена может быть рассмотрена как обобщенная система Хитчина, соответствующая рациональной кривой $\Sigma = \mathbb{C}P^1$ с N отмеченными точками $z_1, \ldots, z_N$. Поле Хиггса в данном случае представляется рациональным сечением типа $\Phi = L(z)dz$ где

$$L(z) = \sum_{i=1\ldots N} \frac{\Phi_i}{z - z_i}. \tag{1.16}$$

Выражение $L(z)$ традиционно называется оператором Лакса ввиду исключительной роли представления Лакса в теории интегрируемых систем:

$$\dot{L} = [M, L]$$

для некоторой матричнозначной функции M.

Вычеты оператора Лакса системы Годена Φ_i являются матрицами размера $n \times n$, матричные элементы которых лежат в $\mathfrak{gl}_n \oplus \ldots \oplus \mathfrak{gl}_n$. $(\Phi_i)_{kl}$ совпадает с kl-ым генератор i-ой копии $\mathfrak{gl}_n$. В данном случае генераторы алгебры Ли интерпретируются как функции на двойственном пространстве $\mathfrak{gl}_n^*$. Симметрическая алгебра $S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n^* \oplus \ldots \oplus \mathfrak{gl}_n^*]$ снабжена Пуассоновой структурой, задаваемой скобкой Кириллова-Костанта на двойственном пространстве к алгебре Ли:

$$\{(\Phi_i)_{kl}, (\Phi_j)_{mn}\} = \delta_{ij}(\delta_{lm}(\Phi_i)_{kn} - \delta_{nk}(\Phi_i)_{ml}).$$

1.4.2 R-матричная скобка

R-матричные представления скобок Пуассона оказались ключевым элементом теории квантовых групп. В некотором смысле наличие R-матричной структуры эквивалентно интегрируемости. Напомним, что в теории квантовых групп [37] выделенными объектами являются так называемые квазитриугольные или сплетенные биалгебры. Введем обозначения:

- $\{e_i\}$ - стандартный базис в $\mathbb{C}^n$;
- $\{E_{ij}\}$ - стандартный базис в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, то есть такой, что $E_{ij}e_k = \delta_k^j e_i$;
- $e_{ij}^{(s)}$ - генераторы s-ой копии $\mathfrak{gl}_n \subset \oplus^N \mathfrak{gl}_n$.

Оператор Лакса может быть представлен в виде

$$L(z) = \sum_{ij} E_{ij} \otimes \sum_{s=1}^{N} \frac{e_{ij}^{(s)}}{z - z_s}.$$

Пуассонова структура может быть описана следующим кратким соотношением в терминах производящей функции генераторов:

$$\{L(z) \otimes L(u)\} = [R_{12}(z-u), L(z) \otimes 1 + 1 \otimes L(u)] \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} \otimes S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N},$$

с классической R-матрицей Янга

$$R(z) = \frac{P_{12}}{z}, \qquad P_{12} v_1 \otimes v_2 = v_2 \otimes v_1, \qquad P_{12} = \sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

1.4.3 Интегралы

Интегралы движения могут быть получены как коэффициенты характеристического полинома

$$det(L(z) - \lambda) = \sum_{k=0}^{n} I_k(z) \lambda^{n-k}. \tag{1.17}$$

Часто используется альтернативный базис симметрических функций собственных значений оператора Лакса (полиномы Ньютона собственных чисел оператора Лакса)

$$J_k(z) = TrL^k(z), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Традиционные квадратичные Гамильтонианы могут быть получены следующим образом

$$H_{2,k} = Res_{z=z_k} TrL^2(z) = \sum_{j \neq k} \frac{2Tr\Phi_k \Phi_j}{(z_k - z_j)} = 2 \sum_{j \neq k} \frac{\sum_{lm} e_{lm}^{(k)} e_{ml}^{(j)}}{z_k - z_j}.$$

Они описывают модель магнетика, состоящего из набора частиц на прямой с парным взаимодействием, определяемым внутренними спиновыми степенями свободы. Известно классическое

Утверждение 1.2. *Коэффициенты характеристического полинома* $L(z)$ *коммутируют по отношению к скобке Кириллова-Костанта*

$$\{I_k(z), I_m(u)\} = 0.$$

Аппарат R-матричных представлений существенно упрощает доказательство такого рода утверждений. Представим здесь основную схему доказательства.

Доказательство

Пусть $L_1(z) = L(z) \otimes 1$ and $L_2(u) = 1 \otimes L(u)$.

$$\begin{aligned}
&\{J_k(z), J_m(u)\} = Tr_{12}\{L^k(z) \otimes L^m(u)\} \\
= \;& Tr_{12} \sum_{ij} L_1^i(z) L_2^j(u) \{L(z) \otimes L(u)\} L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u) \\
= \;& Tr_{12} \sum_{ij} L_1^i(z) L_2^j(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i}(z) L_2^{m-j-1}(u) \qquad (1.18) \\
+ \;& Tr_{12} \sum_{ij} L_1^i(z) L_2^j(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j}(u) \\
- \;& Tr_{12} \sum_{ij} L_1^{i+1}(z) L_2^j(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u) \qquad (1.19) \\
- \;& Tr_{12} \sum_{ij} L_1^i(z) L_2^{j+1}(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u).
\end{aligned}$$

В частности

$$(1.18) + (1.19) = Tr_{12}[\sum_{ij} L_1^i(z) L_2^j(u) R_{12}(z-u) L_1^{k-i-1}(z) L_2^{m-j-1}(u), L_1(z)].$$

Последнее выражение равно нулю по причине того, что под следом стоит коммутатор некоторых выражений.

1.4.4 Алгебро-геометрическое описание

В данном разделе описываются основные алгебро-геометрические компоненты обобщения конструкции Хитчина на кривые с отмеченными точками. А именно, строится пара $\{\Sigma, \mathcal{L}\}$ - спектральная кривая и расслоение на ней, которая позволяет решать классическую систему Годена.

Спектральная кривая Спектральная кривая системы Годена $\tilde{\Sigma}$ описывается уравнением

$$det(L(z) - \lambda) = 0. \tag{1.20}$$

Для построения неособой компактификации кривой необходимо рассмотреть тотальное пространство расслоения, в котором оператор Лакса принимает значения

$$\Phi(z) = L(z)dz \in H^0(\mathbb{C}P^1, \mathrm{End}(\mathcal{O}^n) \otimes \Lambda) \tag{1.21}$$

где $\Lambda = \mathcal{K}(k) = \mathcal{O}(k-2)$. Определим компактификацию Σ уравнением

$$det(\Phi(z) - \lambda) = 0. \tag{1.22}$$

Данная кривая является подмногообразием рациональной поверхности S_{k-2}, полученной с помощью компактификации тотального пространства линейного расслоения $\mathcal{O}(k-2)$ над $\mathbb{C}P^1$, а именно проективизации $P(\mathcal{O}(k-2) \oplus \mathcal{O})$ над рациональной кривой. Данная линейчатая поверхность содержит три типа дивизоров: E_∞ - исключительный дивизор, C - слой расслоения и E_0 - базовая кривая. Эти дивизоры имеют следующие пересечения

$$E_0 \cdot E_0 = k-2,$$
$$E_0 \cdot C = 1,$$
$$C \cdot C = 0,$$
$$E_\infty \cdot C = 1.$$

Для определения рода кривой Σ воспользуемся формулой присоединения. Для этого для начала вычислим канонический класс S_{k-2}. Ему соответствует класс дивизоров

$$\mathcal{K}_{S_{k-2}} = -2E_0 + (k-4)C.$$

Пусть класс Σ равен $[\Sigma] = n_1 E_0 + n_2 C$. Из того, что Σ является n-листным накрытием $\mathbb{C}P^1$ получим $[\Sigma] \cdot C = n$. Из этого следует $n_1 = n$. Для вычисления n_2 необходимо использовать факт, что Σ получена, как спектральная кривая голоморфного сечения $\mathrm{End}(\mathcal{O}^n) \otimes \Lambda$ и, следовательно, не пересекает бесконечный дивизор E_∞. Получим $n_2 = 0$ и следовательно

$$[\Sigma] = nE_0.$$

По формуле присоединения получим

$$\begin{aligned} 2g-2 &= \mathcal{K}_{S_{k-2}} \cdot [\Sigma] + [\Sigma] \cdot [\Sigma] \\ &= (-2E_0 + (k-4)C) \cdot nE_0 + n^2 E_0 \cdot E_0 \\ &= -2(k-2)n + (k-4)n + (k-2)n^2. \end{aligned}$$

Это позволяет вычислить род спектральной кривой

$$g(\Sigma) = \frac{(k-2)n(n-1)}{2} - (n-1) \tag{1.23}$$

Линейное расслоение Точке пространства модулей $\mathcal{M}$ можно сопоставить спектральную кривую и линейное расслоение на ней $\mathcal{L}$, строящееся как собственное подрасслоение в $\pi^*\mathcal{O}^n$ по отношению к действию оператора Лакса. Рассмотрим отображение обратных образов:

$$\pi^*(\mathcal{O}^n) \xrightarrow{\pi^*(\Phi)-yId} \pi^*(\mathcal{O}^n \otimes \Lambda). \tag{1.24}$$

Здесь π проекция $\Lambda \to \Sigma$, y - тавтологическое сечение $\pi^*\Lambda$. В рассматриваемом случае имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_S^n \xrightarrow{\pi^*(\Phi)-y\cdot Id} \pi^*\mathcal{O}^n(k-2) \otimes \mathcal{O}_S(E_\infty) \to \mathcal{F}_\Sigma \to 0. \tag{1.25}$$

Фактор-пучок $\mathcal{F}_\Sigma$ имеет носитель на Σ. Ограничивая последовательность на спектральную кривую получим

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_\Sigma^n \to \mathcal{O}_S^n((k-2)C + E_\infty)|_\Sigma \to \mathcal{F}_\Sigma \to 0, \tag{1.26}$$

где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F}_\Sigma$ являются линейными расслоениями. В этом случае получим

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_\Sigma^n) - \chi(\mathcal{O}_S^n((k-2)C + E_\infty)|_\Sigma) + \chi(\mathcal{F}_\Sigma)$$

Обозначим дивизор $(k-2)C + E_\infty \subset S$ как D.

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}_\Sigma^n) &= n(1-g), \\
\chi(\mathcal{O}_S^n(D)|_\Sigma) &= nD\cdot[\Sigma] + n(1-g) \\
&= n^2(k-2) + n(1-g), \\
\chi(\mathcal{F}_\Sigma) &= \chi(\pi^*\mathcal{O}^n(k-2)\otimes\mathcal{O}_S(E_\infty)) - \chi(\mathcal{O}_S^n) \\
&= n\frac{1}{2}(D\cdot D - D\cdot\mathcal{K}_S) = n(k-1).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Таким образом $\chi(\mathcal{L}) = -n^2(k-2) + n(k-1)$. Подсчитаем количество точек ветвления $\nu = 2(g+n-1) = (k-2)(n^2-n)$. Получим

Лемма 1.3.

$$deg(\mathcal{L}) = g + n - 1 - \nu.$$

Размерность коммутативного семейства На аффинной карте без $\{z_i\}$ и ∞ спектральная кривая имеет вид

$$R(z,\lambda) = 0, \qquad R(z,\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m R_m(z), \tag{1.28}$$

где

$$R_m(z) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{n-m} \frac{R_{m,i}^{(l)}}{(z-z_i)^l}.$$

Количество свободных коэффициентов равно $\sum_{m=0}^{n-1} k(n-m) = k\frac{n(n+1)}{2}$. Центральные функции (симметрические полиномы собственных чисел соответствующих орбит) являются старшими коэффициентами $R_m(z)$ то есть коэффициентами $R_{m,i}^{n-m}$ в количестве $kn-1$. Оператор Лакса имеет двойной ноль в бесконечности

$$L(z) = \frac{1}{z^2}\sum_i \Phi_i z_i + O(\frac{1}{z^3}).$$

Из этого следует, что $R_m(z)$ имеет ноль порядка $2(n-m)$ в бесконечности. Это наблюдение в свою очередь накладывает дополнительные

$$\sum_{m=0}^{n-1}(2(n-m)-1) = n^2$$

условий на значения Гамильтонианов. Таким образом, размерность спектра коммутативного семейства составляет

$$k\frac{n(n+1)}{2} - kn + 1 - n^2 = k\frac{n(n-1)}{2} - n^2 + 1 = g.$$

1.5 Разделенные переменные

Для широкого класса интегрируемых систем разделенными оказываются переменные, связанные с дивизором линейного расслоения $\mathcal{L}$ на спектральной кривой, а именно пары координат точек дивизора, отвечающих вложению аффинной карты базовой алгебраической кривой в тотальное пространство канонического расслоения (или других линейных расслоений в случае рассмотрения обобщений системы Хитчина). Обычно, данный дивизор определяется дивизором нулей Функции Бейкера. В работе [38] приводится конструкция разделенных переменных для некоторых семейств интегрируемых систем. В $\mathfrak{sl}_2$-системе Годена разделенные переменные были известны ранее и могут быть найдены еще более явным образом.

1.5.1 $\mathfrak{sl}_2$-система Годена

В случае $\mathfrak{sl}_2$-системы Годена в работе [39] были построены разделенные переменные. Напомним, что $\mathfrak{sl}_2$-система Годена получается из общей $\mathfrak{gl}_2$ системы (1.16) при выборе значений центральных функций, отвечающих следу каждой из орбит, равных 0. оператор Лакса в этом случае определяется формулой:

$$L = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & -A(z) \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать характеристический полином, как функцию параметров z, λ и значений Гамильтонианов:

$$det(L(z) - \lambda) = R(z, \lambda, h_1, \dots, h_d).$$

Определим переменные y_j, как нули выражения $C(z)$. В качестве двойственных переменных возьмем

$$w_j = A(y_j).$$

Этот набор переменных определяет координаты Дарбу на фазовом пространстве:

$$\{y_i, w_j\} = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим производящую функцию $S(I, y)$ канонического преобразования от переменных y_j, w_j к переменным „действие-угол“ I_j, ϕ_j

$$w_j = \partial_{y_j} S \qquad \phi_j = \partial_{I_j} S$$

Точка с координатами (y_j, w_j) является точкой спектральной кривой в силу определения данных переменных. Тот факт, что переменные типа „действие“ являются функциями Гамильтонианов, позволяет разделить переменные в задаче отыскания канонического преобразования S

$$S(I, y_1, \ldots, y_d) = \prod_i s(I, y_i),$$

где каждый сомножитель $s(I, z)$ решает уравнение

$$R(z, \partial_z s, h_1, \ldots, h_d) = 0.$$

2 Задача квантования

Задача квантования имеет физическую мотивацию, она связана с квантовой физикой, являющейся действующей парадигмой современной естественно-научной области знаний. В математическом контексте задача формулировалась разными способами: в работах [40] рассматривалась задача деформации алгебры функций на симплектических многообразий, удовлетворяющей „требованиям соответствия“. Частный случай деформационного квантования для кокасательного расслоения к группе Ли, используемый далее, был рассмотрен в работе [41]. В дальнейшем методы деформационного квантования, $*$-произведения, произведения Мойала, геометрического квантования были расширены для более общих ситуаций. Важным структурным результатом данной теории является теорема формальности Концевича [42], из которой следует существование квантования Пуассонова многообразия. Также, важные результаты в области деформационного квантования принадлежат Федосову [43].

Тем не менее, в данной части работы предлагается радикально более жесткая постановка задачи квантования, которая предполагает деформацию не только Пуассонова многообразия. Ввиду наличия интегрируемой системы предполагается построение деформации пары: Пуассонова алгебра $+$ коммутативная подалгебра в ней. Будем называть эту часть задачи квантования интегрируемой системы алгебраической. Однако, кроме этого, ставится задача построения квантовых аналогов существенных, с точки зрения описания классической интегрируемой системы, геометрических объектов. В общем, ставится задача ассоциативной деформации Пуассоновой алгебры функций на фазовом пространстве, при которой Пуассон-коммутативная подалгебра остается коммутативной, причем деформируется также спектральная кривая модели и разделенные переменные. Будем называть полную задачу квантования в указанном смысле алгебро-геометрической.

2.1 Деформационное квантование

2.1.1 Соответствие

Традиционная схема деформационного квантования предполагает построение ассоциативной алгебры по Пуассоновой алгебре. Пуассоновой алгеброй называется коммутативная алгебра $\mathcal{A}_{cl}$ с умножением, заданным операцией $\cdot$, кроме того оснащенная кососимметричной билинейной операцией, называемой скобкой Пуассона, обозначаемой $\{\circ, \circ\}$, превращающей $\mathcal{A}_{cl}$ в алгебру Ли, и согласованной с умножением посредством тождеством Лейбница:

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + g \cdot \{f, h\}.$$

Пуассонова алгебра может считаться инфинитезимальной версией ассоциативной алгебры. Благодаря так называемой ε-конструкции Дринфельда несложно заметить, что пространство $\mathcal{A}_{cl}[\varepsilon]/\varepsilon^2$ со операцией умножения

$$f * g = f \cdot g + \varepsilon\{f, g\}$$

является ассоциативной алгеброй. Под квантованием Пуассоновой алгебры $\mathcal{A}_{cl}$ со структурой, определяемой операциями $(\cdot, \{\circ, \circ\})$, называемой алгеброй классических наблюдаемых, понимается нахождение ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ с операцией умножения $(*)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_{cl}[[\mathsf{h}]] \text{ как линейное пространство.}$$

Кроме этого, при отождествлении алгебры классических наблюдаемых с пространством констант в $\mathcal{A}$ требуется следующее согласование структур:

$$\begin{aligned} a * b &= a \cdot b + O(\mathsf{h}), \\ a * b - b * a &= \mathsf{h}\{a, b\} + O(\mathsf{h}^2). \end{aligned}$$

Отображение

$$lim : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_{cl} : \qquad \mathsf{h} \mapsto 0$$

называется классическим пределом.

Пример 2.1. *Рассмотрим Пуассонову алгебру* $S(\mathfrak{gl}_n)$, *построенную на пространстве симметрической алгебры со скобкой Пуассона, определяемой скобкой Кириллова. Для нее существует каноническое квантование, реализующее концепцию деформационного квантования: пусть* $U_{\mathsf{h}}(\mathfrak{gl}_n)$ *- деформированная универсальная обертывающая алгебра*

$$U_{\mathsf{h}}(\mathfrak{gl}_n) = T^*(\mathfrak{gl}_n)[[\mathsf{h}]]/\{x \otimes y - y \otimes x - \mathsf{h}[x, y]\}$$

Классический предел описывается пределом $\mathsf{h} \to 0$ *который корректно определен в семействе алгебр* $U_{\mathsf{h}}(\mathfrak{gl}_n)$ *по параметру* h. *Существование предела следует из наличия общего базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта для рассматриваемого семейства.*

2.1.2 Квантование интегрируемой системы

Интегрируемая система может быть представлена парой: Пуассонова алгебра $\mathcal{A}_{cl}$ и Пуассонова коммутативная подалгебра $\mathcal{H}_{cl}$ подходящей размерности $dim(Spec(\mathcal{H}_{cl})) = 1/2 dim(Spec(\mathcal{A}_{cl}))$. Алгебраическая задача квантования в этих терминах может быть сформулирована как нахождение соответствия

$$\mathcal{H}_{cl} \subset \mathcal{A}_{cl} \Leftrightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{A}$$

удовлетворяющего следующим условиям

- $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_{cl}[[\mathsf{h}]]$ как линейные пространства, отображение $lim : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{cl}$ называется классическим пределом;
- $\mathcal{H}$ - коммутативна;
- $lim : \mathcal{H} = \mathcal{H}_{cl}$

Замечание 2.1. *В случае квантования симметрической алгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ квантовое соответствие может быть упрощено. Рассмотрим $U(\mathfrak{gl}_n)$, которая является алгеброй с фильтрацией по степени элементов $\{\mathcal{F}_i\}$. Отображение проекции на ассоциированную градуированную алгебру индуцирует Пуассонову структуру:*

$$U(\mathfrak{gl}_n) \to Gr(U(\mathfrak{gl}_n)) = \oplus_i \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} = S(\mathfrak{gl}_n). \tag{2.1}$$

На генераторах $a \in \mathcal{F}_i$ и $b \in \mathcal{F}_j$ индуцируется коммутативное умножение и Пуассонова скобка. Данные структуры возникают при рассмотрении следующих выражений:

$$a * b = a \cdot b \ mod \ \mathcal{F}_{i+j-1}, \qquad a * b - b * a = \{a, b\} \ mod \ \mathcal{F}_{i+j-2}.$$

2.1.3 Задача квантования системы Годена

Классическая часть соответствия квантования определяется следующими объектами: Пуассонова алгебра и коммутативная подалгебра

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{cl} &= S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n^* \oplus \ldots \oplus \mathfrak{gl}_n^*],\\ \mathcal{H}_{cl} &- \text{подалгебра порожденная Гамильтонианами Годена (1.17).}\end{aligned}$$

Алгебраическая часть задачи квантования сводится к построению пары, в которой квантовая алгебра наблюдаемых совпадает с тензорной степенью универсальной обертывающей алгебры:

$$\mathcal{A} = U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N},$$

причем коммутативная подалгебра $\mathcal{H}$ является деформацией подалгебры, порожденной классическими Гамильтонианами Годена.

2.2 Квантовая спектральная кривая

2.2.1 Некоммутативный определитель

Рассмотрим матрицу $B = \sum_{ij} E_{ij} \otimes B_{ij}$ элементы которой лежат в некоторой, вообще говоря не коммутативной, ассоциативной алгебре $B_{ij} \in A$. E_{ij} как и прежде обозначают матричные единицы в пространстве $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$. Будем использовать следующее определение некоммутативного определителя в данном случае

$$det(B) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau,\sigma \in \Sigma_n} (-1)^{\tau\sigma} B_{\tau(1),\sigma(1)} \ldots B_{\tau(n),\sigma(n)}.$$

Это определение совпадает с классическим для матриц с коммутирующими элементами. Существует эквивалентное определение, апеллирующее к действию оператора на старшей внешней степени линейного пространства. Для этого введем оператор A_n антисимметризации в пространстве $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$

$$A_n v_1 \otimes \ldots \otimes v_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Введенное выше определение некоммутативного определителя эквивалентно следующему

$$det(B) = Tr_{1\ldots n} A_n B_1 \ldots B_n,$$

где B_k обозначает оператор в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes A$ заданный выражением

$$B_k = \sum_{ij} 1 \otimes \ldots \otimes \underbrace{E_{ij}}_{k} \otimes \ldots \otimes 1 \otimes B_{ij},$$

а след берется по всем матричным компонентам $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$.

2.2.2 Квантовая спектральная кривая

Будем называть квантовым оператором Лакса системы Годена следующее выражение:

$$L(z) = \sum_{ij} E_{ij} \otimes \sum_{s=1}^{N} \frac{e_{ij}^{(s)}}{z - z_s}.$$

$L(z)$ является рациональной функцией переменной z со значениями в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$. Определим квантовый характеристический полином квантового оператора Лакса формулой

$$det(L(z) - \partial_z) = \sum_{k=0}^{n} QI_k(z) \partial_z^{n-k}. \tag{2.2}$$

Следующая теорема говорит о том, что именно такая деформация классического характеристического полинома (1.17) позволяет строить производящую функцию квантовых Гамильтонианов.

Теорема 2.1 ([44]). *Коэффициенты* $QI_k(z)$ *коммутируют*

$$[QI_k(z), QI_m(u)] = 0$$

и квантуют классические Гамильтонианы Годена в следующем смысле

$$lim(QI_k) = I_k.$$

Доказательство этого факта использует существенные результаты теории квантовых групп, такие как конструкция Янгиана, его подалгебры Бете и в общем укладывается в концепцию квантового метода обратной задачи. В следующих разделах вводятся необходимые определения и приводится набросок доказательства теоремы квантования системы Годена.

2.2.3 Янгиан

Данная алгебра Хопфа была построена в работе [25] и играет важную роль в задаче описания рациональных решений уравнения Янга-Бакстера. $Y(\mathfrak{gl}_n)$ прежде всего является ассоциативной алгеброй, порожденной элементами $t_{ij}^{(k)}$ (в данном разделе $i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, \infty$). Соотношения описываются в терминах производящей функции

$$T(u, \mathsf{h}) \in Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)[[u^{-1}, \mathsf{h}]],$$

имеющей вид

$$T(u, \mathsf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes t_{ij}(u, \mathsf{h}), \qquad t_{ij}(u, \mathsf{h}) = \delta_{ij} + \sum_k t_{ij}^{(k)} \mathsf{h}^k u^{-k},$$

где E_{ij} - матричные единицы в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$. Соотношения записываются с помощью R-матрицы Янга

$$R(u) = 1 - \frac{\mathsf{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}$$

и принимают следующий вид

$$R(z-u,\mathsf{h})T_1(z,\mathsf{h})T_2(u,\mathsf{h}) = T_2(u,\mathsf{h})T_1(z,\mathsf{h})R(z-u,\mathsf{h}). \tag{2.3}$$

Обе части тождества рассматриваются как элементы

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[z^{-1}, z, u^{-1}, u, \mathsf{h}]],$$

при этом рациональная функция $\frac{1}{z-u}$ в выражении для R-матрицы раскладывается в ряд

$$\frac{1}{z-u} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u^l}{z^{l+1}}.$$

В определяющих соотношениях приняты следующие обозначения

$$T_1(z,\mathsf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(z,\mathsf{h}), \quad T_2(u,\mathsf{h}) = \sum_{i,j} 1 \otimes E_{ij} \otimes t_{ij}(u,\mathsf{h}).$$

Янгиан является алгеброй Хопфа, коумножение в которой задано в терминах производящей функции следующей формулой:

$$(id \otimes \Delta)T(z,\mathsf{h}) = T^1(z,\mathsf{h})T^2(z,\mathsf{h}),$$

где используются следующие обозначения

$$T^1(z,\mathsf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes t_{ij}(z,\mathsf{h}) \otimes 1, \quad T^2(z,\mathsf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(z,\mathsf{h}).$$

„Представление вычисления“ Напомним конструкцию так называемого гомоморфизма „вычисления“ $\rho : Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n)$. Для этого определим рациональную функцию по u, h со значениями в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$

$$T_{ev}(u, \mathsf{h}) = 1 + \frac{\mathsf{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes e_{ij} \stackrel{def}{=}: 1 + \frac{\mathsf{h}\Phi}{u}, \tag{2.4}$$

где e_{ij} - генераторы $\mathfrak{gl}_n$. $T_{ev}(u, \mathsf{h})$ удовлетворяет RTT соотношению (2.3), следовательно отображение $\{t_{ij}^{(1)} \mapsto e_{ij};\ t_{ij}^{(k)} \mapsto 0$ при $k > 1\}$ определяет гомоморфизм алгебр.

Рассмотрим тензорное произведение $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h}, \mathsf{h}^{-1}]]$ и производящую функцию (2.4) для отображения вычисления в l-ю компоненту рассматриваемого тензорного произведения $T_{ev}^{l}(u - z_l, \mathsf{h})$. Оказывается, что для произвольного набора комплексных чисел $(z_1, \ldots, z_N)$,выражение

$$T^{\alpha}(u, \mathsf{h}) = T_{ev}^{1}(u - z_1, \mathsf{h}) T_{ev}^{2}(u - z_2, \mathsf{h}) \ldots T_{ev}^{k}(u - z_N, \mathsf{h}), \tag{2.5}$$

являющееся рациональной функцией от u и h со значениями в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$, определяет гомоморфизм $\rho_\alpha : Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h}, \mathsf{h}^{-1}]]$, а именно, имеет место следующая

Лемма 2.2. *Отображение, ставящее в соответствие генератору Янгиана $t_{ij}^{(k)}$ ij-й матричный элемент коэффициента разложения $T^{\alpha}(u, \mathsf{h})\mathsf{h}^{-k}$ в $u = \infty$ при u^{-k}, определяет гомоморфизм алгебр*

$$\rho_\alpha : Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h}, \mathsf{h}^{-1}]].$$

Данная лемма следует из существования гомоморфизма коумножения и гомоморфизма вычисления.

2.2.4 Подалгебра Бете

Данная подалгебра тесно связана с Квантовым Методом Обратной Задачи (КМОЗ) [23, 46, 47], а именно ее генераторы являются квантовыми интегралами для XXX модели Гейзенберга [46, 45]. Далее используется описание подалгебры Бете работы [48] (раздел 2.14): рассмотрим комплекснозначную $n \times n$-матрицу C и $T(u, \mathsf{h})$ - производящую функцию генераторов Янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Введем также обозначение A_n для матрицы антисимметризатора в пространстве $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ и следующие элементы $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[u, u^{-1}, \mathsf{h}]]$

$$T_m(u, \mathsf{h}) = \sum_{ij} 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \overset{m}{E_{ij}} \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes t_{ij}(u, \mathsf{h}).$$

Оказывается [48] (раздел 2.14), что выражения вида

$$\tau_k(u, \mathsf{h}) = Tr A_n T_1(u, \mathsf{h}) T_2(u - \mathsf{h}, \mathsf{h}) \ldots T_k(u - \mathsf{h}(k-1), \mathsf{h}) C_{k+1} \ldots C_n \quad (2.6)$$

при $k = 1, \ldots n$, называемые генераторами Бете, порождают коммутативное семейство в $Y(\mathfrak{gl}_n)[[u, u^{-1}, \mathsf{h}]]$ в следующем смысле:

$$[\tau_i(u, \mathsf{h}), \tau_j(v, \mathsf{h})] = 0.$$

Кроме того, данное семейство максимально если матрица C имеет простой спектр. След в выражении 2.6 вычисляется по матричным компонентам $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$, а разложение в ряд для $T_m(u - \mathsf{h}(m-1), \mathsf{h})$ вычисляется в окрестности $u = \infty$, например

$$\frac{1}{u - \mathsf{h}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathsf{h}^m}{u^{m+1}},$$

Далее мы будем рассматривать единичную матрицу C и образы генераторов подалгебры Бете при отображении „вычисления“, которые являются мероморфными функциями по u со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h}]]$, для простоты мы будем их обозначать теми же буквами

$$\tau_k(u,\mathsf{h}) = TrA_nT_1^{\alpha}(u,\mathsf{h})T_2^{\alpha}(u-\mathsf{h},\mathsf{h})\dots T_k^{\alpha}(u-\mathsf{h}(k-1),\mathsf{h}) \quad k=1,\dots n. \tag{2.7}$$

2.2.5 Доказательство коммутативности

Присутствие структуры коумножения в теории квантовых групп позволяет использовать так называемый метод „фузии“ для построения нетривиальных интегрируемых систем. Буквально, данные метод заключается в следующем: рассмотрим образ $T(z)$ при представлении вычисления в композиции с подходящим количеством операций коумножения $\rho_{z_1}\otimes\ldots\otimes\rho_{z_N}\Delta^{N-1}$

$$T^{\aleph}(u) = T_{z_1}^1(z)\dots T_{z_N}^N(z) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}.$$

Образ подалгебры Бете при таком гомоморфизме порождает некоторую коммутативную подалгебру и может быть описан производящей функцией:

$$\begin{aligned}
Q(z,\mathsf{h}) &= TrA_n(e^{-\mathsf{h}\partial_z}T_1^{\aleph}(z,\mathsf{h})-1)\dots(e^{-\mathsf{h}\partial_z}T_n^{\aleph}(z,\mathsf{h})-1)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\tau_j(z-\mathsf{h},\mathsf{h})(-1)^{n-j}C_n^je^{-j\mathsf{h}\partial_z}\\
&= det(e^{-\mathsf{h}\partial_z}T^{\aleph}(z,\mathsf{h})-1).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Выражение (2.8) может быть представлено в виде ряда по ∂_z. Из коммутативности генераторов подалгебры Бете следует, что коэффициенты данного ряда, являющиеся рациональными функциями по u со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h}]]$, тоже коммутируют при разных значениях параметра u. Следовательно коммутируют также их младшие коэффициенты по h, которые и являются искомыми коэффициентами квантового характеристического многочлена системы Годена. Оказывается, что старший коэффициент по h выражения (2.8) имеет вид

$$det(e^{-\mathsf{h}\partial_z}T^{\aleph}(z,\mathsf{h})-1)=\mathsf{h}^n det(L(z)-\partial_z)+O(\mathsf{h}^{n+1})$$

в силу разложения:

$$e^{-\mathsf{h}\partial_z}T^{\aleph}(z)-1=\mathsf{h}(L(z)-\partial_z)+O(\mathsf{h}^2).$$

Замечание 2.2. *Следует отметить, что независимость квантовых Гамильтонианов Годена непосредственно вытекает из независимости их классических пределов, поскольку наличие алгебраического соотношения на построенные операторы из* $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$ *влечет некоторое нетривиальное соотношение на их старшие символы. Вопрос о максимальности данного семейства также решается положительно исходя из максимальности семейства классических Гамильтонианов.*

Замечание 2.3. *Основной результат данной работы может быть интерпретирован как построение квазиклассического предела XXX-модели Гейзенберга.*

2.3 Традиционные методы решения

Традиционные в области квантовых интегрируемых систем методы решения для систем на конечном масштабе сводятся к методу анзаца Бете или разделенных переменных, которые в свою очередь позволяют выразить задачу описания спектра квантовой системы в терминах решений некоторой алгебраической системы уравнений, или в терминах свойств монодромии некоторой Фуксовой системы. Однако, способов решений альтернативных задач данные методы не предполагают. Тем не менее, существует достаточно богатый материал в области решения квантовых интегрируемых систем в разнообразных пределах.

Далее приводятся описания двух наиболее традиционных методов для простейшей системы Годена.

2.3.1 Анзац Бете

Рассмотрим квантовую систему Годена соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$. В этом случае оператор Лакса представляется в виде

$$L = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & -A(z) \end{pmatrix} = \sum_i \frac{\Phi_i}{z - z_i},$$

где

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} h_i/2 & e_i \\ f_i & -h_i/2 \end{pmatrix}.$$

Квантовый характеристический полином является дифференциальным оператором второго порядка со значениями в квантовой алгебре:

$$det(L(z) - \partial_z) = \partial_z^2 - \frac{1}{2}\sum_i \frac{c_i^{(2)}}{(z - z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i}{z - z_i}.$$

Гамильтонианы Годена задаются вычетами

$$H_i = \sum_{i \neq j} \frac{h_i h_j/2 + e_i f_j + e_j f_i}{z_i - z_j}.$$

Коэффициенты при полюсах второго порядка также содержатся в коммутативной подалгебре, но являются центральными по отношению ко всей квантовой алгебре.

Одним из наиболее распространенных методов решения квантовых интегрируемых моделей является метод анзаца Бете, предложенный впервые Бете для решения модели Гейзенберга. Он применим к различным одномерным системам. Для системы Годена данный метод был предложен в работе [11]. Приведем здесь конструкцию Бете. Рассмотрим систему Годена отвечающую $\mathfrak{sl}_2$ при фиксированном представлении $V_\lambda = V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_N}$ где V_{λ_i} конечномерное неприводимое представление старшего веса λ_i.

Лемма 2.3. *Вектор*

$$\Omega = \prod_{j=1}^{M} C(\mu_j)|vac>$$

является общим собственным вектором для коммутирующего семейства гамильтонианов Годена если набор параметров μ_j (называемых корнями Бете) удовлетворяет системе уравнений Бете

$$-\frac{1}{2}\sum_i \frac{\lambda_i}{\mu_j - z_i} + \sum_{k\neq j} \frac{1}{\mu_j - \mu_k} = 0, \qquad j = 1, \ldots, M. \tag{2.9}$$

Собственные значения H_i на векторе Ω в этом случае выражаются через корни Бете следующими формулами

$$H_i^\Omega = -\lambda_i \left(\sum_j \frac{1}{z_i - \mu_j} - \frac{1}{2} \sum_{j\neq i} \frac{\lambda_j}{z_i - z_j} \right).$$

Доказательство

В рассматриваемом случае квантовый характеристический полином имеет вид:

$$det(L(z) - \partial_z) = \partial_z^2 - A^2(z) - C(z)B(z) + A'(z) = \partial_z^2 - H(z).$$

Также имеют место следующие коммутационные соотношения на матричные элементы оператора Лакса:

$$[A(z), B(z)] = -B'(z), \qquad [A(z), C(u)] = \frac{1}{z-u}(C(z) - C(u)),$$
$$[A(z), C(z)] = C'(z), \qquad [B(z), C(u)] = \frac{2}{u-z}(A(z) - A(u)).$$

Используя эти соотношения и условие:

$$H(z)|vac >= \left(\frac{1}{4}(\sum_i \frac{\lambda_i}{z-z_i})^2 - \frac{1}{2}\sum_i \frac{\lambda_i}{(z-z_i)^2}\right)|vac >= h_0(z)|vac >$$

получим:

$$\begin{aligned} H(z)\Omega &= \left(h_0(z) + 2\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{\mu_j - z}A(z) + \sum_{j\neq k}\frac{1}{(\mu_j - z)(\mu_k - z)}\right)\Omega \\ &+ 2C(z)\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{z-\mu_j}\prod_{l\neq j}C(\mu_l)\left(\sum_{k\neq j}\frac{1}{\mu_k - \mu_j} + A(\mu_j)\right). \end{aligned}$$

Заметим, что уравнения Бете могут быть выражены в форме:

$$\sum_{k\neq j}\frac{1}{\mu_k - \mu_j} + A(\mu_j) = 0.$$

Последнее наблюдение и доказывает лемму.

2.3.2 Квантовые разделенные переменные

Рассмотрим систему Годена, отвечающую алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ в представлении $V_\lambda = V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_N}$ где V_{λ_i} конечномерное неприводимое представление старшего веса λ_i. Неприводимые представления такого типа можно реализовать как фактор пространство соответствующего модуля Верма

$\mathbb{C}[t_i]/t_i^{\lambda_i+1}$, так что генераторы $\mathfrak{sl}_2$ действуют дифференциальными операторами:

$$h^{(s)} = -2t_s\frac{\partial}{\partial t_s} + \lambda_s,\ e^{(s)} = -t_s\frac{\partial^2}{\partial t_s^2} + \lambda_s\frac{\partial}{\partial t_s},\ f^{(s)} = t_s.$$

Будем исследовать задачу на собственные вектора квантовых Гамильтонианов в тензорном произведении модулей Верма, которое в настоящем случае реализуется пространством полиномов от N переменных $\mathbb{C}[t_1,\dots,t_N]$. Введем набор разделенных переменных y_j, определяемых формулой:

$$C(z) = C_0\frac{\prod_j(z-y_j)}{\prod_i(z-z_i)}.$$

Они являются элементами некоторого алгебраического расширения кольца $\mathbb{C}[t_1,\dots,t_N]$. Будем теми же символами обозначать операторы умножения на данные функции.

Пусть Ω общий собственный вектор гамильтонианов Годена в $\mathbb{C}[t_1,\dots,t_N]$

$$H(z)\Omega = h(z)\Omega. \tag{2.10}$$

Рассматривая обе части 2.10 как рациональные функции переменной z и подставляя слева $z = y_j$ получим:

$$\begin{aligned} H(y_j) &= A^2(y_j) - A'(y_j) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i,k}\frac{1}{(y_j-z_i)(y_j-z_k)}h_ih_k + \frac{1}{2}\sum_k\frac{1}{(y_j-z_k)^2}h_k. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Используя определение разделенных переменных выразим частные производные:

$$\partial_{y_j} = \sum_k\frac{\partial t_k}{\partial y_j}\partial_{t_k} = \sum_k\frac{t_k}{y_j-z_k}\partial_{t_k}. \tag{2.12}$$

Подставляя 2.12 в 2.11 получим:

$$\left(-\partial_{y_j} + \frac{1}{2}\sum_k \frac{\lambda_k}{y_j - z_k}\right)^2 \Omega = h(y_j)\Omega.$$

Таким образом, общая собственная функция для Гамильтонианов Годена факторизуется, то есть ее зависимость от переменных y_j разделяется в следующем смысле:

$$\Omega = \prod_j \omega(y_j).$$

При этом каждый множитель $\omega(z)$ связан с решением уравнения Штурма-Лиувилля:

$$(\partial_z^2 - h(z))\widetilde{\omega}(z) = 0$$

следующим образом:

$$\widetilde{\omega}(z) = \prod_i (z - z_i)^{-\lambda_i/2}\omega(z).$$

2.3.3 Монодромия Фуксовых систем

Результаты традиционного метода разделенных переменных и анзаца Бете в квантовых интегрируемых системах, приведенные выше, демонстрирует, что описание спектра квантовых моделей тесно связано с семействами специальных Фуксовых уравнений, обладающих исключительными свойствами представления монодромии. Эти свойства являются крайне естественными в подходе Гейзенберга, изложенном в работе [49], и отвечают существованию глобальных волновых функций.

В рассматриваемом $\mathfrak{sl}_2$ случае для системы Годена было получено, что если Ω - общий собственный вектор Бете с собственными значениями H_i^{Ω}

тогда уравнение

$$\left(\partial^2 - \frac{1}{4}\sum_i \frac{\lambda_i(\lambda_i+2)}{(z-z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i^{\Omega}}{z-z_i}\right)\Psi(z) = 0 \tag{2.13}$$

имеет решение вида

$$\Psi(z) = \prod_i (z-z_i)^{-\lambda_i/2}\prod_j (z-\mu_j),$$

где набор параметров μ_j удовлетворяет системе уравнений Бете.

Это наблюдение было обобщено в результате, изложенном в работе [50]. Рассмотрим квантовый характеристический полином:

$$det(L(z)-\partial_z) = \partial_z^2 - \sum_i \frac{C_i^{(2)}}{(z-z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i}{z-z_i}$$

Пусть $\mathcal{H}$ - алгебра, порожденная коэффициентами квантового характеристического полинома. Назовем χ - характер алгебры $\mathcal{H}$ - допустимым, если на центральных элементах он принимает значения $\chi(C_i^{(2)}) = \frac{1}{4}(\lambda_i+2)\lambda_i$.

Теорема 2.4 ([50]). *Имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством допустимых характеров χ, для которых дифференциальное уравнение*

$$\chi(det(L(z)-\partial_z))\Psi(z) = 0$$

имеет монодромию ± 1, и множеством общих собственных векторов системы Годена в представлении V_λ.

В отличие от традиционных формулировок анзаца Бете или разделенных переменных характеризация спектра в терминах специальных Фуксовых уравнений может быть обобщена на случай $\mathfrak{sl}_n$.

2.4 Эллиптический случай

Оказывается, что в случае динамической эллиптической системы Годена, также могут быть построены алгебро-геометрические составляющие метода квантования, а именно квантовая спектральная кривая и квантовые разделенные переменные. Отметим, что эллиптическая система Годена может быть получена в контексте обобщений систем Хитчина. Она отвечает пространству модулей голоморфных полустабильных расслоений с тривиальным детерминантным расслоением на эллиптической кривой с набором отмеченных точек. Для построения квантового характеристического полинома используется модифицированная подлежащая алгебраическая структура, а именно $\mathfrak{gl}_n$ динамическое RLL уравнение, соответствующее представлению „эллиптической квантовой группы“ $E_{\tau,\hbar}(\mathfrak{gl}_n)$, определенной в [52]. Коммутативность в динамическом случае подразумевается по модулю подалгебры Картана. Для получения интегрируемой системы требуется ограничить построенное семейство на пространство нулевого веса в представлении относительно диагонального действия алгебры Ли, или, что то же самое, на подпространство представления, аннулируемое элементами Картана.

2.4.1 Обозначения

Начнем с обозначений для нечетных θ-функций Римана на эллиптической кривой. Пусть $\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ параметр эллиптической кривой $\mathbb{C}/\Gamma$, где $\Gamma = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ - решетка периодов. Нечетная θ-функция $\theta(u) = -\theta(-u)$ определяется соотношениями

$$\theta(u+1) = -\theta(u), \qquad \theta(u+\tau) = -e^{-2\pi i u - \pi i \tau}\theta(u), \qquad \theta'(0) = 1. \tag{2.14}$$

В дальнейшем также потребуются некоторые матричные обозначения. Пусть

$$T = \sum_j t_j \cdot a_{1,j} \otimes \ldots \otimes a_{N,j}$$

является тензором над алгеброй $\mathfrak{R}$, где $t_j \in \mathfrak{R}$ и $a_{i,j}$ принадлежат пространству $\operatorname{End} \mathbb{C}^n$. Тогда обозначение $T^{(k_1,\ldots,k_N)}$ будет соответствовать следующему элементу в $\mathfrak{R} \otimes (\operatorname{End} C^n)^{\otimes M}$ для некоторых $M \geqslant N$:

$$T^{(k_1,\ldots,k_N)} = \sum_j t_j \cdot 1 \otimes \ldots \otimes a_{1,j} \otimes \ldots \otimes a_{N,j} \otimes \ldots \otimes 1.$$

Здесь каждый элемент $a_{i,j}$ располагается в k_i-ой тензорной компоненте, числа k_i попарно отличаются и выполняется условие $1 \leqslant k_i \leqslant M$.

Также необходимо следующее обозначение. Пусть $F(\lambda) = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ - функция n параметров λ_k, принимающая значения в алгебре $\mathfrak{R}$: то есть $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathfrak{R}$. В этом случае определим следующие выражения

$$\begin{aligned} F(\lambda + P) &= F(\lambda_1 + P_1, \ldots, \lambda_n + P_n) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial \lambda_1^{i_1} \cdots \partial \lambda_n^{i_n}} P_1^{i_1} \cdots P_n^{i_n} \end{aligned} \quad (2.15)$$

для некоторого набора $P = (P_1, \ldots, P_n)$, $P_k \in \mathfrak{R}$. Опустим здесь вопросы сходимости, во всех рассматриваемых далее ситуациях сходимость будет иметь место.

2.4.2 Алгебра Фельдера

Введем понятие динамического эллиптического L-оператора, соответствующего R-матрице Фельдера.

Воспользуемся обозначениями $\{e_i\}$, $\{E_{ij}\}$ раздела 1.4.2. Пусть $\mathfrak{h}$ - некоторая n-мерная коммутативная алгебра. В работе [52] был определен элемент $\operatorname{End}\mathbb{C}^n \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^n$, мероморфно зависящий от спектрального параметра u и n *динамических параметров* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$R(u;\lambda) = R(u;\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{\theta(u+\hbar)}{\theta(u)} \sum_{i=1}^{n} E_{ii} \otimes E_{ii} +$$
$$+ \sum_{i\neq j} \Big(\frac{\theta(\lambda_{ij}+\hbar)}{\theta(\lambda_{ij})} E_{ii} \otimes E_{jj} + \frac{\theta(u-\lambda_{ij})\theta(\hbar)}{\theta(u)\theta(-\lambda_{ij})} E_{ij} \otimes E_{ji} \Big), \quad (2.16)$$

где $\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$. Этот элемент называется динамической R-матрицей Фельдера. Он удовлетворяет динамическому уравнению Янга-Бакстера

$$R^{(12)}(u_1-u_2;\lambda)R^{(13)}(u_1-u_3;\lambda+\hbar E^{(2)})R^{(23)}(u_2-u_3;\lambda) =$$
$$= R^{(23)}(u_2-u_3;\lambda+\hbar E^{(1)})R^{(13)}(u_1-u_3;\lambda)R^{(12)}(u_1-u_2;\lambda+\hbar E^{(3)}),$$

а также дополнительным соотношениям

$$R^{(21)}(-u;\lambda)R^{(12)}(u;\lambda) = \frac{\theta(u+\hbar)\theta(u-\hbar)}{\theta(u)^2},$$
$$(E_{ii}^{(1)} + E_{ii}^{(2)})R(u;\lambda) = R(u;\lambda)(E_{ii}^{(1)} + E_{ii}^{(2)}),$$
$$(\widehat{D}_\lambda^{(1)} + \widehat{D}_\lambda^{(2)})R(u;\lambda) = R(u;\lambda)(\widehat{D}_\lambda^{(1)} + \widehat{D}_\lambda^{(2)}),$$

где

$$\widehat{D}_\lambda = \sum_{k=1}^{n} E_{kk} \frac{\partial}{\partial \lambda_k}, \quad \widehat{D}_\lambda^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} E_{kk}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \lambda_k}.$$

Следует упомянуть, что в формулах выражением λ обозначается вектор $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, а выражение $\lambda + \hbar E^{(s)}$ подразумевает сдвиг типа 2.15 со значением аргумента $P_i = \hbar E_{ii}^{(s)}$.

Пусть $\mathfrak{R}$ некоторая $\mathbb{C}[[\hbar]]$-алгебра, $L(u;\lambda)$ - обратимая $n \times n$ матрица над $\mathfrak{R}$ зависящая от спектрального параметра u и n динамических параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Пусть также $h_1, \dots, h_n$ представляет набор попарно коммутирующих элементов $\mathfrak{R}$. $L(u;\lambda)$ называется эллиптическим динамическим L-оператором, соответствующим набору элементов Картана h_k, если $L(u;\lambda)$ удовлетворяет динамическому RLL соотношению

$$\begin{aligned} & R^{(12)}(u-v;\lambda)L^{(1)}(u;\lambda+\hbar E^{(2)})L^{(2)}(v;\lambda) \\ = \ & L^{(2)}(v;\lambda+\hbar E^{(1)})L^{(1)}(u;\lambda)R^{(12)}(u-v;\lambda+\hbar h), \end{aligned} \tag{2.17}$$

а также соотношению вида

$$(E_{ii}+h_i)L(u;\lambda)=L(u;\lambda)(E_{ii}+h_i).$$

Введем эквивалентную, но несколько более симметричную форму RLL соотношений. Для L-оператора введем выражение:

$$L_D(u)=e^{-\hbar\widehat{D}_\lambda}L(u;\lambda). \tag{2.18}$$

Уравнение (2.17) может быть переписано в новых обозначениях следующим образом:

$$R^{(12)}(u-v;\lambda)L_D^{(1)}(u)L_D^{(2)}(v)=L_D^{(2)}(v)L_D^{(1)}(u)R^{(12)}(u-v;\lambda+\hbar h). \tag{2.19}$$

Следующая лемма выполняет роль, аналогичную процедуре „фузии“ в рациональном случае, а именно описывает способ конструирования эллиптических динамических L-операторов.

Лемма 2.5. *Если* $L_1(u;\lambda)\in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\otimes\mathfrak{R}_1$ *и* $L_2(u;\lambda)\in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\otimes\mathfrak{R}_2$ *два эллиптических динамических* L*-оператора по отношению к двум наборам элементов Картана:* $h^1=(h^1_1,\dots,h^1_n)$ *и* $h^2=(h^2_1,\dots,h^2_n)$*, тогда произведение матриц* $L_2(u;\lambda)L_1(u;\lambda+\hbar h^2)\in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\otimes\mathfrak{R}_1\otimes\mathfrak{R}_2$ *также является динамическим эллиптическим* L*-оператором по отношению к* *набору* $h = h^1 + h^2 = (h_1^1 + h_1^2, \dots, h_n^1 + h_n^2)$. *Таким образом, если* $L_1(u;\lambda)$, $\dots$, $L_m(u;\lambda)$ *являются динамическими эллиптическими* L*-операторами с элементами Картана* h^1, $\dots$, h^m, *то матрица*

$$\overleftarrow{\prod_{m\geqslant j\geqslant 1}} L_j\big(u;\lambda + \hbar \sum_{l=j+1}^{m} h^l\big) \tag{2.20}$$

также является динамическим эллиптическим L*-оператором с элементами Картана* $h = \sum\limits_{i=1}^{m} h^i$.

Замечание 2.4. *Стрелка в обозначении для произведения означает порядок сомножителей по отношению к растущим значениям индекса: например, выражение* $\overleftarrow{\prod}_{3\geqslant i\geqslant 1} A_i$ *означает* $A_3A_2A_1$.

Основной пример динамического эллиптического L-оператора дается динамической R-матрицей Фельдера: $L(u) = R(u - v;\lambda)$. В этом случае второе пространство $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ играет роль алгебры $\mathfrak{R}$. Здесь v некоторое фиксированное комплексное число, а элементы Картана совпадают с диагональными матрицами $h_k = E_{kk}^{(2)}$. Лемма 2.5 позволяет обобщать данный пример: пусть v_1, $\dots$, v_m - набор комплексных чисел, тогда матрица

$$\mathbb{R}^{(0)}(u;\{v_j\};\lambda) = \overleftarrow{\prod_{m\geqslant j\geqslant 1}} R^{(0j)}\big(u - v_j;\lambda + \hbar \sum_{l=j+1}^{m} E^{(l)}\big) \tag{2.21}$$

является динамическим эллиптическим L-оператором с элементами Картана $h_k = \sum\limits_{l=1}^{m} E_{kk}^{(l)}$.

Более общий класс динамических эллиптических L-операторов связан с так называемой *малой эллиптической квантовой группой* $e_{\tau,\hbar}(\mathfrak{gl}_n)$ построенной в работе [53]. Она представляет собой $\mathbb{C}[[\hbar]]((\lambda_1,\dots,\lambda_n))$-алгебру, порожденную элементами $\tilde{t}_{ij}$ и h_k, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{gathered}
\tilde{t}_{ij}h_k = (h_k - \delta_{ik} + \delta_{jk})\tilde{t}_{ij}, \\
t_{ij}\lambda_k - (\lambda_k - \hbar\delta_{ik})t_{ij} = 0, \\
t_{ij}t_{ik} - t_{ik}t_{ij} = 0, \\
t_{ik}t_{jk} - \frac{\theta(\lambda_{ij}^{\{1\}} + \hbar)}{\theta(\lambda_{ij}^{\{1\}} - \hbar)}t_{jk}t_{ik} = 0, \qquad i \neq j, \\
\frac{\theta(\lambda_{jl}^{\{2\}} + \hbar)}{\theta(\lambda_{jl}^{\{2\}})}t_{ij}t_{kl} - \frac{\theta(\lambda_{ik}^{\{1\}} + \hbar)}{\theta(\lambda_{ik}^{\{1\}})}t_{kl}t_{ij} - \frac{\theta(\lambda_{ik}^{\{1\}} + \lambda_{jl}^{\{2\}})\theta(\hbar)}{\theta(\lambda_{ik}^{\{1\}})\theta(\lambda_{jl}^{\{2\}})}t_{il}t_{kj} = 0,
\end{gathered} \tag{2.22}$$

при $i \neq k,\ j \neq l$, где $t_{ij} = \delta_{ij} + \hbar\tilde{t}_{ij}$, $\lambda_{ij}^{\{1\}} = \lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_{ij}^{\{2\}} = \lambda_i - \lambda_j - \hbar h_i + \hbar h_j$, причем элементы $h_1, \ldots, h_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ коммутируют между собой. Может быть построена производящая функция генераторов $T(-u)$

$$T_{ij}(-u) = \theta(-u + \lambda_{ij} - \hbar h_i)t_{ji}. \tag{2.23}$$

Представляя данную матрицу в виде

$$T(-u) = \theta(-u)e^{-\hbar\sum_{k=0}^{n}(h_k + E_{kk})\partial_{\lambda_k}}L_0(u;\lambda)e^{\hbar\sum_{k=0}^{n}h_k\partial_{\lambda_k}} \tag{2.24}$$

получим динамический эллиптический L-оператор $L_0(u;\lambda)$ над алгеброй $\mathfrak{T} = e_{\tau,\hbar}(\mathfrak{gl}_n)[[\partial_\lambda]]$ с элементами Картана $h = (h_1, \ldots, h_n)$, где $\mathbb{C}[[\partial_\lambda]] = \mathbb{C}[[\partial_{\lambda_1}, \ldots, \partial_{\lambda_n}]]$, элементы $\partial_{\lambda_k} = \frac{\partial}{\partial\lambda_k}$ коммутируют с h_i и не коммутируют с $\tilde{t}_{ij}$.

2.4.3 Коммутативная алгебра

Рассмотрим некоторый динамический эллиптический L-оператор $L(u;\lambda)$ с элементами Картана h_k. Его значения в точке u принадлежат алгебре $\operatorname{End}\mathbb{C}^n \otimes \mathfrak{R}$.

Введем операторы

$$\mathbb{L}^{[m,N]}(\{u_i\};\lambda) = e^{-\hbar\widehat{D}_\lambda^{(m+1)}} L^{(m+1)}(u_{m+1};\lambda)\cdots e^{-\hbar\widehat{D}_\lambda^{(N)}} L^{(N)}(u_N;\lambda), \qquad (2.25)$$

где $m < N$. Рассмотрим также частный случай оператора, определенного выше для следующего набора значений параметров $u_i = u + \hbar(i-1)$,

$$\mathbb{L}^{[a,b]}(u;\lambda) = \mathbb{L}^{[a,b]}(\{u_i = u + \hbar(i-a-1)\};\lambda)$$

для $a < b$. Пусть $\mathbb{A}_n = \mathbb{C}((\lambda_1,\ldots,\lambda_n))$ пополненное пространство функций. Операторы $\widehat{D}_\lambda$ действуют на пространстве $\mathbb{A}_n \otimes \mathbb{C}^n$, в свою очередь операторы $\mathbb{L}^{[a,b]}(u;\lambda)$ действуют из пространства $\mathbb{A}_n \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes(b-a)}$ в пространство $\mathbb{A}_n \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes(b-a)} \otimes \mathfrak{R}$: если u фиксированная точка то $\mathbb{L}^{[a,b]}(u;\lambda) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes(b-a)} \otimes \mathfrak{A}_n$, где $\mathfrak{A}_n = \mathbb{A}_n[e^{\pm\hbar\partial_\lambda}] \otimes \mathfrak{R}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}_n$ порожденную элементами h_k и ее нормализатор $\mathfrak{A}_n$:

$$\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}_n}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{A}_n \mid \mathfrak{h}x \subset \mathfrak{A}_n\mathfrak{h}\}. \qquad (2.26)$$

Отметим, что $\mathfrak{A}_n\mathfrak{h}$ представляет собой двусторонний идеал в $\mathfrak{N}_n$. В работе [51] доказывается следующая

Теорема 2.6. *Определим $\mathfrak{A}_n$-значные функции*

$$t_m(u) = tr\big(A^{[0,m]}\mathbb{L}^{[0,m]}(u;\lambda)\big), \qquad (2.27)$$

предполагается взятие следа по всем m пространствам $\mathbb{C}^n$. Эти выражения коммутируют с элементами Картана h_k:

$$h_k t_m(u) = t_m(u) h_k. \qquad (2.28)$$

Следовательно они принимают значения в подалгебре $\mathfrak{N}_n$. Кроме этого они коммутируют по модулю идеала $\mathfrak{A}_n\mathfrak{h} \subset \mathfrak{N}_n$:

$$t_m(u)t_s(v) = t_s(v)t_m(u) \qquad \mod \mathfrak{A}_n\mathfrak{h}. \qquad (2.29)$$

2.4.4 Характеристический полином

Как и в рациональном случае генераторы $t_m(u)$ могут быть представлены в виде производящей функции, называемой квантовым характеристическим полиномом. Эта производящая функция строится с помощью определителя соответствующего L-оператора. При этом рассматривается полностью симметризованный определитель для $n \times n$ матрицы с некоммутирующими элементами M

$$detM = tr\big(A^{[1,n]} M^{(1)} M^{(2)} \cdots M^{(n)}\big). \tag{2.30}$$

Утверждение 2.7. *Рассмотрим матрицу* $M = e^{-\hbar \widehat{D}_\lambda} L(u;\lambda) e^{\hbar \frac{\partial}{\partial u}}$. *Тогда определитель матрицы* $1 - M$ *порождает* $t_m(u)$ *в следующем смысле:*

$$P(u, e^{\hbar \partial_u}) = det(1 - e^{-\hbar \widehat{D}_\lambda} L(u;\lambda) e^{\hbar \frac{\partial}{\partial u}}) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m t_m(u) e^{m\hbar \frac{\partial}{\partial u}}, \tag{2.31}$$

где $t_0(u) = 1$. *Данное свойство также влечет коммутативность квантового характеристического полинома с элементами* h_k, *а также коммутативность по модулю* $\mathfrak{A}_n \mathfrak{h}$ *производящих функций:*

$$[P(u, e^{\hbar \partial_u}), h_k] = 0, \qquad [P(u, e^{\hbar \partial_u}), P(v, e^{\hbar \partial_v})] = 0 \mod \mathfrak{A}_n \mathfrak{h}. \tag{2.32}$$

2.4.5 Предел и система Годена

Рассмотрим вырождение динамических эллиптических RLL соотношений при $\hbar \to 0$. В частности, это вырождение описывает эллиптическую $\mathfrak{gl}_n$ систему Годена. Для установления этой связи вводится соответствующий твист L-оператора. Вырождая производящую функцию для коммутативного семейства получим производящую функцию гамильтонианов эллиптической системы Годена. Полученный результат обобщает рассмотрение работ [54],[55].

Пусть $L(u;\lambda)$ - динамический эллиптический L-оператор вида

$$L(u;\lambda) = 1 + \hbar\Lambda(u;\lambda) + o(\hbar), \tag{2.33}$$

для которого матричные элементы принадлежат алгебре $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}/\hbar\mathfrak{R}$. Матрицу $\Lambda(u;\lambda)$ будем называть классическим динамическим эллиптическим L-оператором. Она удовлетворяет следующим rLL-соотношениям

$$\begin{aligned}
&[\Lambda^{(1)}(u;\lambda) - \widehat{D}_\lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}(v;\lambda) - \widehat{D}_\lambda^{(2)}] - \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial}{\partial\lambda} r(u-v;\lambda) = \\
&\qquad = [\Lambda^{(1)}(u;\lambda) + \Lambda^{(2)}(v;\lambda), r(u-v;\lambda)]
\end{aligned} \tag{2.34}$$

с классической динамической эллиптической r-матрицей

$$\begin{aligned}
r(u;\lambda) &= \frac{\theta'(u)}{\theta(u)} \sum_{i=1}^{n} E_{ii} \otimes E_{ii} \\
&+ \sum_{i \neq j} \Big(\frac{\theta'(\lambda_{ij})}{\theta(\lambda_{ij})} E_{ii} \otimes E_{jj} + \frac{\theta(u-\lambda_{ij})}{\theta(u)\theta(-\lambda_{ij})} E_{ij} \otimes E_{ji} \Big).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Матрица (2.35) связана с R-матрицей Фельдера (2.16) формулой

$$R(u;\lambda) = 1 + \hbar r(u;\lambda) + o(\hbar). \tag{2.36}$$

Теорема 2.8. *Пусть* $\mathcal{A}_n = \mathfrak{R}_0 \otimes \mathbb{A}_n[\partial_\lambda]$ *и* $\mathcal{N}_n = \mathfrak{N}_{\mathcal{A}_n}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathcal{A}_n \mid \mathfrak{h}x \subset \mathcal{A}_n\mathfrak{h}\}$, *где* $\mathbb{A}_n = \mathbb{C}((\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$. *Определим* $\mathcal{N}_n$*-значные функции* $s_m(u)$ *формулой*

$$Q(u, \partial_u) = det\Big(\frac{\partial}{\partial u} - \widehat{D}_\lambda + \Lambda(u;\lambda)\Big) = \sum_{m=0}^{n} s_m(u) \Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big)^{n-m}, \tag{2.37}$$

где $s_0(u) = 1$. *Они коммутируют с элементами Картана* h_k:

$$h_k s_m(u) = s_m(u) h_k \tag{2.38}$$

и, кроме того, коммутируют между собой по модулю $\mathcal{A}_n\mathfrak{h}$:

$$s_m(u) s_l(v) = s_l(v) s_m(u) \mod \mathcal{A}_n\mathfrak{h}. \tag{2.39}$$

Значения функций $s_1(u)$, $s_2(u)$, $\dots$, $s_n(u)$ порождают коммутативную подалгебру в $\mathcal{N}_n$ на уровне $h_k = 0$. Это означает, что образы таких элементов при каноническом гомоморфизме $\mathcal{N}_n \to \mathcal{N}_n/\mathcal{A}_n\mathfrak{h}$ коммутируют между собой.

Непосредственно квантовая эллиптическая система Годена определяется с помощью оператора Лакса

$$\Lambda_{ij}(u;\lambda) = e_{ji}(u;\lambda), \qquad \Lambda_{ii}(u;\lambda) = e_{ii}(u;\lambda) + \sum_{k\neq i} \frac{\theta'(\lambda_{ik})}{\theta(\lambda_{ik})} h_k, \tag{2.40}$$

коэффициенты которого выражаются формулами:

$$e_{ii}(u) = \frac{\theta'(u-z)}{\theta(u-z)} e_{ii} = \sum_{m\geqslant 0} \frac{(-1)^m}{m!} \Big(\frac{\theta'(u)}{\theta(u)}\Big)^{(m)} e_{ii} z^m, \tag{2.41}$$

$$e_{ij}(u;\lambda) = \frac{\theta(u-z+\lambda_{ij})}{\theta(u-z)\theta(\lambda_{ij})} e_{ij} = \sum_{m\geqslant 0} \frac{(-1)^m}{m!} \Big(\frac{\theta(u+\lambda_{ij})}{\theta(u)\theta(\lambda_{ij})}\Big)^{(m)} e_{ij} z^m. \tag{2.42}$$

Аналогом представления вычисления для квантовой группы является гомоморфизм в малую эллиптическую группу, определяемую производящей функцией из выражения (2.24). Оказывается, что динамический L-оператор отвечающий тензорной степени малой эллиптической группы может быть разложен по параметру $\hbar$, причем коэффициент при $\hbar$ будет совпадать с L-оператором системы Годена.

2.4.6 Явный вид $\mathfrak{sl}_2$ эллиптической системы Годена

L-оператор эллиптической $\mathfrak{sl}_2$ системы Годена, рассматриваемой в работах [54, 55, 56] имеет вид

$$\Lambda(u;\lambda) = \begin{pmatrix} h(u)/2 & f_\lambda(u) \\ e_\lambda(u) & -h(u)/2 \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

где $\lambda = \lambda_{12} = \lambda_1 - \lambda_2$ и токи выражаются формулами

$$\begin{aligned} h(u) = e_{11}(u) - e_{22}(u) &= \sum_{s=1}^{N} \frac{\theta'(u - v_s)}{\theta(u - v_s)} (e_{11}^{(s)} - e_{22}^{(s)}), \\ e_\lambda(u) = e_{12}(u;\lambda) &= \sum_{s=1}^{N} \frac{\theta(u - v_s + \lambda)}{\theta(u - v_s)\theta(\lambda)} e_{12}^{(s)}, \\ f_\lambda(u) = e_{21}(u;\lambda) &= \sum_{s=1}^{N} \frac{\theta(u - v_s - \lambda)}{\theta(u - v_s)\theta(-\lambda)} e_{21}^{(s)}. \end{aligned}$$

Поскольку L-оператор зависит только от разности $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ производящую функцию генераторов коммутативной алгебры $Q(u, \partial_u)$ можно ограничить на пространство $\mathbb{A} = \{a \in \mathbb{A}_2 \mid (\partial_{\lambda_1} + \partial_{\lambda_1})a = 0\} \subset \mathbb{A}_2$ совпадающее с $\mathbb{C}((\lambda_{12}))$. Пусть $\mathcal{A} = \mathfrak{R}_0 \otimes \mathbb{A}[\partial_\lambda]$ тогда значения функций $s_m(u)$ принадлежат $\mathcal{N} = \mathfrak{N}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathcal{A} \mid hx \in \mathcal{A}h\}$. В силу специфики представления $\rho\colon h_1 + h_2 \to 0$ оператор $\widehat{D}_\lambda$ имеет вид $H\partial_\lambda$, где $H = E_{11} - E_{22}$.

Найдем квантовый характеристический полином в данном случае:

$$\begin{aligned} Q(u, \partial_u) &= det\Big(\frac{\partial}{\partial u} - \widehat{D}_\lambda + \widetilde{\Lambda}(u;\lambda) - \frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)}\frac{h}{2}\Big) = \\ &= det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} - \partial_\lambda + h^+(u)/2 - \frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)}h/2 & f_\lambda^+(u) \\ e_\lambda^+(u) & \frac{\partial}{\partial u} + \partial_\lambda - h^+(u)/2 - \frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)}h/2 \end{pmatrix} \\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big)^2 - \frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)} h \frac{\partial}{\partial u} - S_\lambda(u), \end{aligned} \tag{2.44}$$

где $h = h_1 - h_2$. $S_\lambda(u)$ является $\mathcal{N}$-значной функцией

$$S_\lambda(u) = \big(\partial_\lambda - h(u)/2\big)^2 + \partial_u h(u)/2 + e_\lambda(u) f_\lambda(u) \qquad \mod \mathcal{A}h.$$

Условие коммутативности можно сформулировать в терминах этой производящей функции:

$$[S_\lambda(u), S_\lambda(v)] = 0 \mod \mathcal{A}h.$$

Используя коммутационные соотношения

$$[e^+_\lambda(u), f^+_\lambda(u)] = -\frac{\partial}{\partial u} h^+(u) + \big(\frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)}\big)' h$$

можно привести данную производящую функцию гамильтонианов $\mathfrak{sl}_2$ эллиптической системы Годена к более симметричному виду:

$$S_\lambda(u) = \big(\partial_\lambda - h(u)/2\big)^2 + \big(e_\lambda(u) f_\lambda(u) + f_\lambda(u) e_\lambda(u)\big)/2 \quad \mod \mathcal{A}h. \tag{2.45}$$

3 Решение квантовых интегрируемых систем

Как отмечалось выше, традиционные методы решения квантовых интегрируемых систем на конечном масштабе в некоторых случаях позволяют сводить задачу диагонализации квантовых гамильтонианов к задаче исследования системы алгебраических уравнений (уравнений Бете). Однако, сама система уравнений, в тех случаях, когда ее удается вывести, оказывается достаточно сложной и гипотетически не допускает алгебраических решений. В настоящем разделе используется эквивалентная формулировка для квантовой спектральной задачи в терминах Фуксовых систем со специальными представлениями монодромии. В свою очередь построение соответствующих Фуксовых систем производится с помощью квантового характеристического полинома модели. Данное наблюдение также подчеркивает выделенность квантового характеристического полинома среди прочих производящих функций коммутативной подалгебры гамильтонианов Годена.

3.1 Монодромная формулировка

3.1.1 Скалярное и матричное Фуксовы уравнения

Рассмотрим Фуксову систему, определяемую связностью в тривиальном расслоении ранга 2 на диске с проколами вида:

$$A(z) = \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{z - z_i} \tag{3.1}$$

с вычетами удовлетворяющими условиям

$$Tr(A_i) = 0; \quad Det(A_i) = -d_i^2; \quad \sum_i A_i = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Собственно Фуксова система записывается уравнениями

$$(\partial_z - A(z))\Psi(z) = 0. \tag{3.3}$$

В компонентах эта система может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} \psi_1' &= a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2, \\ \psi_2' &= a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2. \end{aligned}$$

Первая векторная компонента удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\psi_1'' = (a_{12}'/a_{12})\psi_1' + u\psi_1,$$

где

$$u = a'_{11} + a_{11}^2 - a_{11}(a'_{12}/a_{12}) + a_{12}a_{21}.$$

При следующей замене переменных: $\Phi = \psi_1/\chi$, где $\chi = \sqrt{a_{12}}$, получим уравнение

$$\Phi'' + U\Phi = 0,$$

в котором потенциал определяется формулой

$$U = \chi''/\chi - (a'_{12}/a_{12})\chi'/\chi - u. \tag{3.4}$$

Подставляя выражение для χ в U получим:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{a'_{12}}{a_{12}}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{a'_{12}}{a_{12}}\right)^2 + a_{11}\frac{a'_{12}}{a_{12}} - a'_{11} - a_{11}^2 - a_{12}a_{21}. \tag{3.5}$$

Предположим, что $a_{12}(z)$ не имеет кратных корней

$$a_{12}(z) = c\frac{\prod_{j=1}^{k-2}(z-w_j)}{\prod_{i=1}^{k}(z-z_i)}.$$

Заметим, что количество нулей согласовано с условием нормировки (3.2). Выражение для логарифмической производной может быть упрощено:

$$\frac{a'_{12}}{a_{12}} = \sum_{j=1}^{k-2}\frac{1}{z-w_j} - \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{z-z_i}. \tag{3.6}$$

Выражение для потенциала U принимает вид

$$U = \sum_{j=1}^{k-2}\frac{-3/4}{(z-w_j)^2} + \sum_{i=1}^{k}\frac{1/4 + detA_i}{(z-z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{H_{w_j}}{z-w_j} + \sum_{i=1}^{k}\frac{H_{z_i}}{z-z_i}, \tag{3.7}$$

в котором

$$\begin{aligned} H_{w_j} &= a_{11}(w_j) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\neq j}\frac{1}{w_j-w_i} - \sum_i\frac{1}{w_j-z_i}\right) \\ H_{z_i} &= \left(\frac{1}{2} + a_{11}^i\right)\sum_j\frac{1}{z_i-w_j} - \sum_{j\neq i}\frac{Tr(A_iA_j) + a_{11}^i + a_{11}^j + 1/2}{z_i-z_j}. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты при $(z-z_i)^{-2}$ принимают следующие значения

$$1/4 + detA_i = (1/2 - d_i)(1/2 + d_i). \tag{3.8}$$

В дальнейшем мы будет отождествлять эти коэффициенты со значениями квадратичных элементов Казимира алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в представлении старшего веса λ_i. В этом случае верно тождество $\lambda_i = 2d_i - 1$.

3.1.2 Двойственное уравнение

Как было показано в предыдущих вычислениях, матричная форма связности приводит к оператору Штурма-Лиувилля с дополнительными полюсами в точках w_j. Аналогичное рассмотрение второй векторной компоненты решения матричного уравнения Ψ_2 приводит к другому скалярному дифференциальному оператору второго порядка с полюсами в точках z_i и дополнительных точках $\widetilde{w}_j$, определяемых формулой

$$a_{21}(z) = \widetilde{c}\frac{\prod_{j=1}^{k-2}(z - \widetilde{w}_j)}{\prod_{i=1}^{k}(z - z_i)}.$$

Будем называть соответствующий оператор Штурма-Лиувилля

$$\partial_z^2 - \widetilde{U}$$

двойственным $\mathfrak{sl}_2$-опером. В данном случае потенциал выражается формулой

$$\widetilde{U} = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{-3/4}{(z - \widetilde{w}_j)^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1/4 + detA_i}{(z - z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{H_{\widetilde{w}_j}}{z - \widetilde{w}_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\widetilde{H}_{z_i}}{z - z_i}. \tag{3.9}$$

3.1.3 Подъем

В данном разделе строится обратное отображение, а именно по оператору Штурма-Лиувилля, имеющему тривиальную монодромию в смысле уравнений Бете, строится связность ранга 2 вида (3.3) с представлением монодромии, лежащим в подгруппе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset GL(2)$ скалярных матриц ± 1.

Рассмотрим анзац решения матричного линейного уравнения (3.3)

$$(\partial_z - A(z))\Psi = 0$$

типа

$$\psi_l = \prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{-s_i} \phi_l(z), \qquad l = 1, 2; \tag{3.10}$$

в котором

$$\phi_1 = \prod_{j=1}^{M} (z - \gamma_j),$$
$$\phi_2/\phi_1 = \sum_{j=1}^{M} \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j}. \tag{3.11}$$

Перепишем систему уравнений (3.3) с учетом новой параметризации (3.11)

$$\partial_z \psi_1/\psi_1 = a_{11} + a_{12}\phi_2/\phi_1, \tag{3.12}$$
$$(\partial_z \psi_1/\psi_1)(\phi_2/\phi_1) + \partial_z(\phi_2/\phi_1) = a_{21} + a_{22}\phi_2/\phi_1. \tag{3.13}$$

Представим эти уравнения в более явной форме:

$$-\sum_i \frac{s_i}{z - z_i} + \sum_j \frac{1}{z - \gamma_j} = \sum_i \frac{a_{11}^i}{z - z_i} + \sum_i \frac{a_{12}^i}{z - z_i} \sum_j \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j}, \tag{3.14}$$

$$\left(-\sum_i \frac{s_i}{z - z_i} + \sum_j \frac{1}{z - \gamma_j}\right) \sum_j \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j} - \sum_j \frac{\alpha_j}{(z - \gamma_j)^2} =$$
$$\sum_i \frac{a_{21}^i}{z - z_i} - \sum_i \frac{a_{11}^i}{z - z_i} \sum_j \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j}. \tag{3.15}$$

Найдем условия того, что вычеты обеих частей равенств (3.14), (3.15) в точках $z = z_i$ совпадают:

$$-s_i = a_{11}^i + a_{12}^i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j}, \quad (3.16)$$

$$-\sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} s_i = a_{21}^i - a_{11}^i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j}. \quad (3.17)$$

Данные уравнения в совокупности с условием равенства нулю следа $a_{11}^i + a_{22}^i = 0$ приводят к условию, что s_i должен являться одним из собственных значений A_i, в частности может быть принят $s_i = d_i$. Рассмотрим поведение в полюсах $z = \gamma_j$. Заметим, что полюса второго порядка в этих точках в уравнении (3.15) сокращаются автоматически. Подсчитаем вычеты правой и левой частей уравнений (3.14) и (3.15)

$$1 = \alpha_j \sum_i \frac{a_{12}^i}{\gamma_j - z_i}, \quad (3.18)$$

$$\alpha_j \left(-\sum_i \frac{s_i}{\gamma_j - z_i} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} \right) + \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{\gamma_j - \gamma_i} = -\alpha_j \sum_i \frac{a_{11}^i}{\gamma_j - z_i} \quad (3.19)$$

Напомним, что одним из условий нормировки связности было условие диагональности вычета в ∞

$$\sum_{i=1}^k a_{12}^i = 0, \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^k a_{21}^i = 0. \quad (3.21)$$

Заметим, что выбор полюсов оператора Штурма-Лиувилля фиксирует нули рациональной функции $a_{12}(z)$, которая таким образом оказывается определена с точностью до константы:

$$a_{12}(z) = c \frac{\prod_{j=1}^{k-2} (z - w_j)}{\prod_{i=1}^{k} (z - z_i)}.$$

При этом условие (3.20) будет выполнено автоматически. Коэффициенты a_{12}^i выражаются формулой

$$a_{12}^i = c\frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}. \tag{3.22}$$

Коэффициенты a_{11}^i выражаются следующей формулой в силу (3.16)

$$a_{11}^i = -s_i - c\frac{\prod_{j=1}(z_i - w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}\sum_l \frac{\alpha_l}{z_i - \gamma_l}. \tag{3.23}$$

Подставим выражения для a_{12}^i и a_{11}^i в уравнения (3.18), (3.19), выразим затем α_j из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{aligned} - &\sum_k \frac{2s_k}{\gamma_j - z_k} + \sum_{k\neq j}\frac{1}{\gamma_j - \gamma_k} + \sum_{k,m}\frac{\prod_l (z_k - w_l)\prod_{s\neq k}(\gamma_m - z_s)}{\prod_{l\neq k}(z_k - z_l)\prod_s(\gamma_m - w_s)(\gamma_j - z_k)} \\ + &\frac{\prod_i(\gamma_j - w_i)}{\prod_i(\gamma_j - z_i)}\sum_{k\neq j}\frac{\prod_i(\gamma_k - z_i)}{\prod_i(\gamma_k - w_i)(\gamma_j - \gamma_k)} = 0. \end{aligned}$$

Перейдем к эквивалентной форме, поделив обе части на $\frac{\prod_i(\gamma_j - z_i)}{\prod_i(\gamma_j - w_i)}$

$$\begin{aligned} &-\sum_k \frac{2s_k}{\gamma_j - z_k} + \sum_{k\neq j}\frac{1}{\gamma_j - \gamma_k} + \sum_{k,m}\frac{\prod_l (z_k - w_l)\prod_{s\neq k}(\gamma_m - z_s)}{\prod_{l\neq k}(z_k - z_l)\prod_s(\gamma_m - w_s)(\gamma_j - z_k)} \\ + &\sum_{k\neq j}\frac{\prod_i(\gamma_k - z_i)}{\prod_i(\gamma_k - w_i)(\gamma_j - \gamma_k)}\frac{\prod_m(\gamma_j - w_m)}{\prod_m(\gamma_j - z_m)} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть равенства как рациональную функцию $F(\gamma_j)$ и вычислим ее разложение по примитивным дробям в полюсах z_k, w_k, γ_k и ∞. Оказывается, что это разложение будет иметь вид:

$$F(\gamma_j) = -\sum_k \frac{2s_k - 1}{\gamma_j - z_k} - \sum_k \frac{1}{\gamma_j - w_k} + 2\sum_{i\neq j}\frac{1}{\gamma_j - \gamma_i}. \tag{3.24}$$

Таким образом, рассматриваемое равенство эквивалентно одному уравнению из системы уравнений Бете. Продемонстрируем, например, вычисление для вычета в точке $\gamma_j = w_i$

$$\begin{aligned} Res_{\gamma_j=w_i}F(\gamma_j) &= \sum_k \frac{\prod_l(z_k-w_l)\prod_{s\neq k}(w_i-z_s)}{\prod_{l\neq k}(z_k-z_l)\prod_{s\neq i}(w_i-w_s)(w_i-z_k)} \\ &= \frac{\prod_s(w_i-z_s)}{\prod_{s\neq i}(w_i-w_s)}\sum_k \frac{\prod_l(z_k-w_l)}{\prod_{l\neq k}(z_k-z_l)(w_i-z_k)^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Заметим, что в правой части равенства стоит выражение

$$(Res_{z=w_i}\Phi(z))^{-1}\sum_k Res_{z=z_k}\Phi(z),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{\prod_l(z-w_l)}{\prod_l(z-z_l)(z-w_i)^2},$$

и следовательно равно -1.

Условие достаточности выражается в следующем утверждении, доказанном в работе [57]

Теорема 3.1. *Если набор чисел γ_i где $i = 1,\ldots,M$ удовлетворяет системе уравнений Бете (2.9) с параметрами: набор полюсов $z_1,\ldots,z_k$ и $w_1,\ldots,w_{k-2}$ со значениями старших весов $2s_1-1,\ldots,2s_k-1$ и $1,\ldots,1$ соответственно, то вектор*

$$\Psi = \prod_{i=1}^{k}(z-z_i)^{-s_i}\begin{pmatrix}\phi_1(z)\\ \phi_2(z)\end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \prod_{j=1}^{M}(z-\gamma_j) \\ \phi_2/\phi_1 &= \sum_{j=1}^{M}\frac{\alpha_j}{z-\gamma_j}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

а коэффициенты α_j *задаются выражениями*

$$\alpha_j = \frac{\prod_i (\gamma_j - z_i)}{\prod_i (\gamma_j - w_i)}, \tag{3.28}$$

решает матричную линейную задачу (3.3), где коэффициенты связности определяются выражениями

$$a^i_{12} \;=\; \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}, \tag{3.29}$$

коэффициенты a^i_{11} *и* a^i_{21} *определяются исходя из (3.16), (3.17). При этом выполняются условия нормировки (3.2).*

Доказательство. Собственно, доказать остается только, что условие нормировки (3.21) не зависит от выбора параметра c, в частности, он может быть принят равным единице. Действительно, исходя из (3.16), (3.17) получим:

$$a^i_{21} = -\left(2s_i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} + \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)} \left(\sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j}\right)^2\right). \tag{3.30}$$

Нам необходимо доказать, что

$$\sum_i 2s_i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} + \sum_i \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)} \left(\sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j}\right)^2 = 0. \tag{3.31}$$

Первое слагаемое (3.31) при использовании уравнений Бете может быть преобразовано к виду:

$$\begin{aligned} \sum_i 2s_i \sum_j \frac{\alpha_j}{z_i - \gamma_j} &= \sum_j \alpha_j \sum_i \frac{2s_i}{z_i - \gamma_j} \\ = \;\; & \sum_j \alpha_j \left(-\sum_i \frac{1}{\gamma_j - z_i} + \sum_i \frac{1}{\gamma_j - w_i} - 2\sum_{i\neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i}\right). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Теперь упростим второе слагаемое (3.31) меняя порядок суммирования

$$\sum_{m\neq l}\alpha_m\alpha_l\sum_i\frac{\prod_j(z_i-w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)(z_i-\gamma_m)(z_i-\gamma_l)}$$
$$+\ \sum_m(\alpha_m)^2\sum_i\frac{\prod_j(z_i-w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)(z_i-\gamma_m)^2}. \qquad (3.33)$$

Рассматривая второе слагаемое (3.33) заметим, что

$$\sum_i\frac{\prod_j(z_i-w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)(z_i-\gamma_m)^2}=-\partial_{\gamma_m}\Phi^1(\gamma_m), \qquad (3.34)$$

где

$$\Phi^1(\gamma_m)=\sum_i\frac{\prod_j(z_i-w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)(z_i-\gamma_m)}=\frac{\prod_j(\gamma_m-w_j)}{\prod_j(\gamma_m-z_j)}. \qquad (3.35)$$

Следовательно выражение (3.34) приобретает вид:

$$-\frac{\prod_j(\gamma_m-w_j)}{\prod_j(\gamma_m-z_j)}\left(\sum_s\frac{1}{\gamma_m-w_s}-\sum_s\frac{1}{\gamma_m-z_s}\right), \qquad (3.36)$$

которое сокращается с соответствующей частью (3.32). Рассмотрим первое слагаемое (3.33), оно тоже может быть упрощено:

$$\sum_i\frac{\prod_j(z_i-w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)(z_i-\gamma_m)(z_i-\gamma_l)}$$
$$=\ \frac{\prod_j(\gamma_l-w_j)}{\prod_j(\gamma_l-z_j)(\gamma_m-\gamma_l)}-\frac{\prod_j(\gamma_m-w_j)}{\prod_j(\gamma_m-z_j)(\gamma_m-\gamma_l)}. \qquad (3.37)$$

Подстановка этого выражения в (3.33) заканчивает доказательство теоремы □

3.2 Преобразования Шлезингера

Существует дискретная группа преобразований, которые сохраняют форму связности (3.3) и, более того, не меняют класс представления монодромии.

Тем не менее, эти преобразования сдвигают характеристические экспоненты в особых точках на полуцелые значения специфическим образом. Такие преобразования называются преобразованиями Шлезингера, Гекке или Бэклунда в зависимости от контекста. Они имеют простую геометрическую интерпретацию, с описания которой начнем этот раздел.

3.2.1 Действие на расслоениях

Рассмотрим кривую C, F - голоморфное расслоение на ней, $\mathcal{F}$ - соответствующий пучок сечений, дополнительный набор данных $x \in C$ и $l \in E_x^*$, точка двойственного пространства к слою расслоения F в точке x. Тогда „нижнее“ преобразование Гекке $T_{(x,l)}E$ определяется подпучком $\mathcal{F}' = \{s \in \mathcal{F} : (s(x), l) = 0\}$, который в свою очередь соответствует некоторому голоморфному расслоению на кривой C.

Эквивалентное определение может быть дано в терминах функций переклейки. Рассмотрим действие на голоморфных расслоениях на $\mathbb{C}P^1$. В силу теоремы Биркгофа-Гротендика [58] любое голоморфное расслоение на $\mathbb{C}P^1$ ранга n изоморфно прямой сумме линейных расслоений вида $\mathcal{O}(k_1)\oplus\ldots\oplus\mathcal{O}(k_n)$ для некоторого набора целых чисел $(k_1, \ldots, k_n)$. Данный набор называется типом расслоения и определен с точностью до действия симметрической группы.

Рассмотрим открытое покрытие $\mathbb{C}P^1$ состоящее из U_∞ - диска вокруг ∞, не содержащего $z = z_i$, $i = 1, \ldots, N$ и области $U_0 = \mathbb{C}P^1 \backslash \{\infty\}$. Будет рассматривать голоморфные расслоения ранга 2 и параметризовать их функцией переклейки $G(z)$ - голоморфно обратимой функцией в $U_0 \cap U_\infty$ со значениями в $GL(2)$. Скажем, что пара $S_\infty(z) \in \mathcal{O}^{(2)}(U_\infty)$ и $S_0(z) \in \mathcal{O}^{(2)}(U_0)$ определяют глобальное сечение если $S_0(z) = G(z)S_\infty(z)$.

Будем описывать преобразования расслоений в терминах действия на соответствующих функциях переклейки. Рассмотрим преобразование, задаваемое с помощью умножения функции переклейки слева на функцию вида

$$G_s(z) = G_s \begin{pmatrix} z - z_s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_s^{-1} \tag{3.38}$$

для некоторой постоянной матрицы G_s и некоторой точки $z_s \in U_0$.

Замечание 3.1. *Действие на функциях переклейки может быть приведено к действию на классах изоморфизмов расслоений если сделать выбор постоянных матриц G_s зависящим от тривиализации следующим образом, при изменении тривиализации в U_0 by $T(z)$ необходимо заменить матрицу G_s на $T(z_s)G_s$. Это соображение очевидно в виду данного в начале раздела инвариантного определения.*

Мы будет исследовать композицию таких преобразований в двух точках.

Лемма 3.2. *Композиция двух преобразований, задаваемая выражением $G_i(z)G_j^{-1}(z)$, для общего выбора постоянных матриц G_i, G_j сохраняет тривиальное расслоение.*

Доказательство Для доказательства предъявить разложение матричнозначной функции $G(z) = G_i(z)G_j^{-1}(z)$ в виде $G(z) = G_{ij}(z)G_\infty(z)$, где $G_{ij}(z)$, $G_\infty(z)$ обратимы соответственно в U_0, U_∞. Наводящим соображением для доказательства является подсчет размерности пространства когомологий в семействах в общей точке. Действительно, для частного выбора $G_i^{-1}G_j = 1$ получаем тривиальное расслоение, которое полустабильно, и следовательно минимизирует размерность $H^0(\mathrm{End}(V))$ для V степени 0. В этой связи, можно считать, что тривиальное расслоение является общим в семействе расслоений для разных G.

Не смотря на предложенный общий аргумент здесь приводится явное доказательство в духе леммы о разложении в [58]. Введем следующие обозначения

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i \\ y_i & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Разложим произведение

$$G(z) = G_i \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_i^{-1} G_j \begin{pmatrix} (z-1)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_j^{-1} \tag{3.40}$$

в произведение другого типа

$$G(z) = G_{ij}(z) G_\infty(z),$$

где $G_{ij}(z)$, $G_\infty(z)$ голоморфно обратимые функции на U_0, U_∞ соответственно. Традиционные вычисления позволяют строить разложение в виде

$$G_\infty(z) = \begin{pmatrix} \frac{z(1-x_jy_i)(1-x_jy_j)-x_j(y_i-2y_j-x_jy_iy_j)}{(1-2x_jy_i+x_jy_j)(1-x_jy_i)(1-x_jy_j)(z-1)} & -\frac{x_j}{(1-x_jy_i)(1-x_jy_j)(z-1)} \\ \frac{y_i-2y_j+x_jy_iy_j}{(1-x_jy_i)(1-2x_jy_i+x_jy_j)} & \frac{1}{1-x_jy_i} \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Действие преобразований на связностях

Действие преобразований Гекке на классах расслоений может быть продолжено на множество пар: (расслоение, связность) при выполнении некоторых условий согласованности. Опишем подробнее это индуцированное действие. Связностью называется отображение пучков модулей, удовлетворяющее тождеству Лейбница, по отношению к операции умножения на функцию:

$$\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes \Omega^1.$$

Преобразования Гекке могут быть определены на пространстве связностей, которые сохраняют $Ann_l = \{v \in \mathcal{F}_x :< l, v >= 0\}$

$$\Delta_x : Ann_l \to Ann_l \otimes \Omega^1_x.$$

В нашем частном случае рассматриваются композиции пар преобразований Гекке, локализованные в полюсах связности $z_i,\ z_j$, сохраняющие тривиальное расслоение ранга 2.

Определим действие группы преобразований Шлезингера T_{ij} на пространстве связностей с особенностями в точках $z = z_i$. Как было сказано выше, действие может быть определено с помощью преобразования функций переклейки. Рассмотрим тривиальное расслоение, заданное функцией переклейки 1. Преобразование Шлезингера меняет структуру расслоения, глобальные сечения определяются парами S_0, S_∞, такими что $S_0 = GS_\infty$, где $G = G_{ij}G_\infty$. Можно определить действие на связностях следующим образом: пусть $\partial_z - A$ связность в тривиальном расслоении, определяемая данным выражением над обоими рассматриваемыми открытыми множествами, преобразование связности определяется как пара форм связности:

$$\begin{aligned} \partial_z - A \quad &\text{над} \quad U_\infty, \\ G(\partial_z - A)G^{-1} \quad &\text{над} \quad U_0. \end{aligned}$$

После замены базиса в U_∞ вида $\widetilde{S_\infty} = G_\infty S_\infty$ получим выражение для связности

$$\partial_z - A \ \to \ G_\infty(\partial_z - A)G_\infty^{-1}. \tag{3.41}$$

При замене тривиализации в U_0 следующего типа $\widetilde{S}_0 = G_{ij}^{-1} S_0$ получим

$$G(\partial_z - A)G^{-1} \;\to\; G_{ij}^{-1} G(\partial_z - A)G^{-1} G_{ij} = G_\infty(\partial_z - A)G_\infty^{-1}. \qquad (3.42)$$

Таким образом, связность, полученная после преобразования может быть представлена в виде глобальной рациональной связности того же типа, как связность до преобразования. Аналитические свойства в ∞ сохраняются в виду того, что G_∞ голоморфно обратимо в U_∞.

Используя результаты предыдущих разделов подсчитаем действие преобразований Шлезингера на связностях. Для сохранения условия нормировки $A(z)$ в ∞ необходимо рассматривать преобразования вида

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(z) &= G_\infty^{-1}(\infty) G_\infty(z) \\ &= \frac{1}{z-1}\left(z - \begin{pmatrix} \frac{x_1(y_0-2y_1+x_1y_0y_1)}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)} & \frac{x_1(1-2x_1y_0+x_1y_1)}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)} \\ \frac{y_0-2y_1+x_1y_0y_1}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)} & \frac{1-2x_1y_0+x_1y_1}{(1-x_1y_0)(1-x_1y_1)} \end{pmatrix}\right). \end{aligned} \qquad (3.43)$$

После этого достаточно применить к связности калибровочное преобразование $\tilde{G}(z)$

$$A \mapsto \tilde{G}(z) A \tilde{G}^{-1}(z) + \partial_z \tilde{G}(z) \tilde{G}^{-1}(z).$$

Полное семейство преобразований Шлезингера для случая 3 точек, связанного с анализом уравнения Пенлеве VI было вычислено в работе [59].

Замечание 3.2. *Выбор старших весов* 1 *в подвижных особенностях* w_i *является не обязательным, но в некотором смысле наиболее общим. Можно рассмотреть потенциал вида*

$$U = \sum_{j=1}^{m} \frac{-1/4(\eta_j+2)\eta_j}{(z-w_j)^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1/4 + detA_i}{(z-z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{H_{w_j}}{z-w_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{H_{z_i}}{z-z_i} \qquad (3.44)$$

с более высокими значениями старших весов. Он может быть реализован если потребовать, чтобы $a_{12}(z)$ *имел нули* w_j *с кратностями* η_j *удовлетворяющими условию* $\sum_{j=1}^m \eta_j = k - 2$.

Локальные рассмотрения в окрестностях полюсов показывают, что собственные значения вычетов A_i преобразуются по следующим 4-правилам в зависимости от выбора верхнего или нижнего преобразования Гекке и выбора разных собственных направлений вычета:

$$
\begin{aligned}
(\ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots) &\longmapsto (\ldots, \lambda_i + 1, \ldots, \lambda_j - 1, \ldots),\\
(\ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots) &\longmapsto (\ldots, \lambda_i + 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots),\\
(\ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots) &\longmapsto (\ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j - 1, \ldots),\\
(\ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots) &\longmapsto (\ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots).
\end{aligned}
$$

Полученный результат позволяет рассматривать рекурсионные соотношения на пространстве решений уравнений Бете для семейства систем Годена. Наиболее интересным, с точки зрения получения явных формул для решения квантовой системы, является построение набора преобразований, понижающих старшие веса в паре точек. Последовательным применением таких преобразований можно понизить старшие веса до нулевого значения, которое соответствует тривиальному представлению квантовой алгебры, и, соответственно, тривиальной задаче диагонализации квантовых гамильтонианов.

3.3 Эллиптический случай

Эллиптическая $\mathfrak{sl}_2$ система Годена допускает построение аналогичного аппарата решения квантовой задачи, включающего квантовую спектральную кривую, квантовые разделенные переменные и симметрии Гекке на пространстве решений квантовой задачи.

3.3.1 Разделенные переменные

Напомним традиционный для данной системы метод разделения переменных [55], [61]. Также как в рациональном случае рассмотрим $\mathfrak{sl}_2$ систему Годена с фиксированным представлением $V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ квантовой алгебры $U(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes k}$, где V_i - конесномерное неприводимое представление старшего веса Λ_i. V_i может быть реализован как фактормодуль модуля Верма $\mathbb{C}[t_i]/t_i^{\Lambda_i+1}$, на котором генераторы $\mathfrak{sl}_2$ действуют дифференциальными операторами вида:

$$h^{(s)} = -2t_s\frac{\partial}{\partial t_s} + \Lambda_s, \qquad e^{(s)} = -t_s\frac{\partial^2}{\partial t_s^2} + \Lambda_s\frac{\partial}{\partial t_s}, \qquad f^{(s)} = t_s.$$

Начнем с исследования квантовой задачи в тензорном произведении модулей Верма $W = \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_k]$. Введем переменные $C, \{y_j\}$ определенные следующим разложением:

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{\theta(u-u_s-\lambda)}{\theta(u-u_s)\theta(-\lambda)} t_s = C\prod_{s=1}^{k}\frac{\theta(u-y_s)}{\theta(u-u_s)}.$$

Представим теперь общий собственный вектор для эллиптической системы Годена как функцию от введенных переменных:

$$S_\lambda(u)\Omega(C, y_1, \ldots, y_k) = s_\lambda(u)\Omega(C, y_1, \ldots, y_k). \tag{3.45}$$

В данной формуле $s_\lambda(u)$ является скалярной функцией параметра u вида

$$s_\lambda(u) = \sum c_i\wp(u-u_i) + \sum d_i\frac{\theta'(u-u_i)}{\theta(u-u_i)}; \qquad c_i = \Lambda_i^2/4 + \Lambda_i/2. \tag{3.46}$$

Подставляя далее $u = y_j$ слева в формуле (3.45) получим:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}\frac{\theta'(y_j - u_s)}{\theta(y_j - u_s)}\Lambda_s\Big)^2 \Omega(C, y_1, \ldots, y_k) = s_\lambda(y_j)\Omega(C, y_1, \ldots, y_k).$$

Это уравнение приводит к факторизации собственного вектора:

$$\Omega(C, y_1, \ldots, y_k) = C^a \prod_j \omega(y_j),$$

причем можно утверждать, что выражение $w(u) = \prod_{s=1}^{k} \theta(u - u_s)^{-\Lambda_s/2}\omega(u)$, связанное с компонентой разложения собственного вектора, удовлетворяет уравнению:

$$\big(\partial_u^2 - s_\lambda(u)\big)w(u) = 0 \qquad (3.47)$$

Следовательно, каждому уравнению 3.47 вида 3.46, которое имеет решение $s_\lambda(u)$ с полуцелыми экспонентами в точках $\{u_1, \ldots, u_k\}$ и мероморфное вне этих точек, можно сопоставить общий собственный вектор для эллиптических Гамильтонианов Годена в представлении V, полученный проектированием вектора Ω.

Гипотеза 3.3. *Существует взаимно-однозначное соответствие между такого рода дифференциальными операторами и собственными векторами рассматриваемой модели в представлении V.*

В последующих разделах будем рассматривать только такие собственные вектора системы Годена, которые соответствуют некоторому эллиптическому оператору Штурма-Лиувилля с описанными аналитическими свойствами.

3.3.2 Анзац Бете

Традиционный метод анзаца Бете в эллиптическом случае [61] может быть получен, если рассмотреть следующее частное решение эллиптического уравнения Штурма-Лиувилля:

$$\left(\partial_u^2 - \sum_i c_i \wp(u-u_i) - \sum_i d_i \frac{\theta'(u-u_i)}{\theta(u-u_i)}\right)\psi(u) = 0. \tag{3.48}$$

Будем предполагать, что решение не имеет кратных корней:

$$\psi(u) = \prod_i \theta^{-\Lambda_i/2}(u-u_i) \prod_j \theta(u-\gamma_j). \tag{3.49}$$

Это условие эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} c_i &= \Lambda_i^2/4 + \Lambda_i/2, \\ d_i &= \Lambda_i \left(\sum_j \frac{\theta'(u_i-\gamma_j)}{\theta(u_i-\gamma_j)} - \sum_{j\neq i} \frac{\Lambda_j \theta'(u_i-u_j)}{2\theta(u_i-u_j)} \right), \\ 0 &= \sum_i \Lambda_i/2 \frac{\theta'(\gamma_j-u_i)}{\theta(\gamma_j-u_i)} - \sum_{i\neq j} \frac{\theta'(\gamma_j-\gamma_i)}{\theta(\gamma_j-\gamma_i)}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

последнее из которых называется эллиптическим уравнением Бете.

3.3.3 Матричная форма уравнений Бете

В данной части находится матричная Фуксова система, эквивалентная эллиптическому уравнению Штурма-Лиувилля (3.48),

$$(\partial_u - A(u))\Psi(u) = 0, \tag{3.51}$$

где

$$\Psi(u) = \begin{pmatrix} \psi_1(u) \\ \psi_2(u) \end{pmatrix},$$

$$A(u) = \begin{pmatrix} a_{11}(u) & a_{12}(u) \\ a_{21}(u) & a_{22}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{11}^i \frac{\theta'(u-z_i)}{\theta(u-z_i)} & \sum a_{12}^i \frac{\theta(u-z_i-\lambda)}{\theta(u-z_i)\theta(-\lambda)} \\ \sum a_{21}^i \frac{\theta(u-z_i+\lambda)}{\theta(u-z_i)\theta(\lambda)} & \sum a_{11}^i \frac{\theta'(u-z_i)}{\theta(u-z_i)}. \end{pmatrix}$$

Отношение эквивалентности скалярной и матричной формы Фуксовых систем выражается следующим: функция $w = \psi_1/\sqrt{a_{12}}$ решает уравнение $w'' - Uw = 0$, в точности того же вида, что и уравнение 3.47, с потенциалом, старший член которого дается формулой:

$$U(u) = -\sum(1/4 + det(A_i))\wp(u - z_i) + \sum 3/4\wp(u - w_i) + ...$$

Здесь точки w_j определяются условием

$$a_{12}(u) = c\frac{\prod \theta(u - w_i)}{\prod \theta(u - z_i)}.$$

В свою очередь A_i определяются, как вычеты $A(u)$ в точках z_i.

Замечание 3.3. *Заметим, что множества полюсов эллиптического оператора Штурма-Лиувилля и соответствующей матричной проблемы не совпадают, первое составлено из двух подмножеств*

$$\{u_1, \ldots, u_{2l}\} = \{z_1, \ldots, z_l, w_1, \ldots, w_l\}.$$

Оказывается, что метод построения решений матричной линейной проблемы по решениям оператора Штурма-Лиувилля также является явным. Рассмотрим скалярную задачу, соответствующую набору отмеченных точек $\{z_1, \ldots, z_l, w_1, \ldots, w_l\}$, набору старших весов $2s_1 - 1, \ldots, 2s_k - 1, 1, \ldots, 1\}$ и набору корней Бете $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_\rho\}$. В этом случае 2-вектор функция Ψ с компонентами:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \prod_{i=1}^{k} \theta(u-u_i)^{s_i} \prod_{j=1}^{\rho} \theta(u-\gamma_j) \\
\psi_2 &= \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\alpha_j \theta(u-\gamma_j+\lambda)}{\theta(u-\gamma_j)} \psi_1,
\end{aligned} \tag{3.52}$$

коэффициенты α_j которой заданы формулой

$$\alpha_j = \frac{\prod_i \theta(\gamma_j - w_i)}{\prod_i \theta(\gamma_j - u_i)},$$

удовлетворяет матричному уравнению 3.51.

Явное вычисление показывает, что уравнение (3.51) для Ψ, представленной выражением (3.52) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
det \begin{pmatrix} a^i_{11} - s_i & a^i_{12} \\ a^i_{21} & a^i_{22} - s_i \end{pmatrix} &= 0 \\
-\sum_k (2s_k - 1) \frac{\theta'(\gamma_j - u_k)}{\theta(\gamma_j - u_k)} - \sum_k \frac{\theta'(\gamma_j - w_k)}{\theta(\gamma_j - w_k)} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\theta'(\gamma_j - \gamma_i)}{\theta(\gamma_j - \gamma_i)} &= 0 \\
\frac{\prod_i \theta(\gamma_j - w_i)}{\prod_i \theta(\gamma_j - u_i)} &= \alpha_j.
\end{aligned}$$

Эта система уравнений означает, что экспоненты решения являются собственными числами вычетов связаности в набор точек γ_j удовлетворяет эллиптической системе уравнений Бете (3.50), отвечающей набору отмеченных точек

$$\{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_k\}$$

и набору старших весов $\{2s_1 - 1, \ldots, 2s_k - 1, 1, \ldots, 1\}$.

3.3.4 Преобразования Гекке

В эллиптическом случае может быть построено семейство симметрий спектра квантовой системы в точности так же, как в рациональном случае. Опишем более подробно, как вычисляются преобразования Гекке на эллиптической кривой. Наиболее подходящий для данной задачи способ параметризации голоморфных расслоений на эллиптической кривой Σ предполагает рассмотрение поднятия расслоения на универсальную накрывающую $\mathbb{C}$ (см. [60] (2,6)). Группа монодромии $\mathbb{Z}^2$ действует гомоморфизмами пучка сечений $\pi^*\mathcal{E}$ соответствующего голоморфному расслоению E. В случае линейного расслоения степени 0 единственный способ определить согласованный набор мультипликаторов, с точностью до эквивалентности, соответствует квазипериодическим коэффициентам выражения:

$$f(z) = \frac{\theta(z-\lambda)}{\theta(z)}$$

для некоторой точки эллиптической кривой $\lambda \in \Sigma$. Обозначим соответствующее расслоение $\mathcal{O}_\lambda$. Преобразование Гекке в точке w предполагает рассмотрение подпучка сечений $\mathcal{O}_\lambda$ принимающих значение 0 в точке w. Этот пучок может быть изоморфно отображен на пучок сечений некоторого расслоения степени 1 следующим образом

$$s(z) \mapsto \frac{s(z)}{\theta(z-w)}$$

Данное отображения является изоморфизмом в силу того, что $\theta(z)$ имеет единственный ноль в точке $z = 0$. Преобразование Гекке на связностях в расслоении $\mathcal{O}_{\lambda/2} \oplus \mathcal{O}_{-\lambda/2}$ ранга 2 строят связность в расслоении $\mathcal{O}_{\mu/2} \oplus \mathcal{O}_{-\mu/2}$ посредством следующего преобразования. Пусть „вычеты“ связности имеют разложение:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & -a_{11}^{(i)} \end{pmatrix} = G_i \begin{pmatrix} d_i & 0 \\ 0 & -d_i \end{pmatrix} G_i^{-1}$$

где G_i постоянные матрицы. Тогда связность преобразуется калибровочным преобразованием с групповым элементом

$$G_{ij}(z) = \tilde{G}_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \theta(z-z_i) \end{pmatrix} \tilde{G}_i^{-1} G_j \begin{pmatrix} \theta^{-1}(z-z_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_j^{-1},$$

где

$$\tilde{G}_i = G_j \begin{pmatrix} \theta^{-1}(z_i-z_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_j^{-1} G_i.$$

Также как и в рациональном случае будем рассматривать пары преобразований Гекке в разных точках $u_i,\ u_j$ с разными знаками $T_{ij} = T^{-1}_{(u_i,l_i)} T_{(u_j,l_j)}$, действующих на расслоениях ранга 2 с тривиальным детерминантным расслоением. В зависимости от выбора подпространств верхних и нижних преобразований получим действие T_{ij} на множестве старших весов модели Годена вида

$$\begin{aligned}
(\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots) &\longmapsto (\ldots,\lambda_i+1,\ldots,\lambda_j-1,\ldots),\\
(\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots) &\longmapsto (\ldots,\lambda_i+1,\ldots,\lambda_j+1,\ldots),\\
(\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots) &\longmapsto (\ldots,\lambda_i-1,\ldots,\lambda_j-1,\ldots),\\
(\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots) &\longmapsto (\ldots,\lambda_i-1,\ldots,\lambda_j+1,\ldots).
\end{aligned}$$

Как и в рациональном случае представляет особый интерес семейство преобразований понижающих последовательно старшие веса всех представлений модели до нулевого значения, для которого задача диагонализации гамильтонианов эллиптической модели оказывается тривиальной.

4 Приложения

Данный раздел посвящен двум основным приложениям метода спектральной кривой. Первое приложение связано с геометрическим соответствием Ленглендса и главным образом состоит в эффективном описании центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ который, в свою очередь, имеет ключевую роль в конструкции Бейлинсона и Дринфельда квантования системы Хитчина. Заметим, что данная задача имеет непосредственное отношение к теории представлений аффинных алгебр Ли.

4.1 Геометрическое соответствие Ленглендса

4.1.1 Центр $U(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ на критическом уровне

Опишем сначала конструкцию центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$. Прокомментируем обозначение $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$, которое соответствует локальному пополнению $U(\widehat{\mathfrak{gl}_n})/\{C - crit\}$, где C-центральный элемент, а $crit = -h^\vee = -n$ критическое значение, обратное дуальному числу Кокстера алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. В работе [63] было доказано, что $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ имеет центр, изоморфный как линейное пространство алгебре полиномов от подалгебры Картана. Не смотря на наличие геометрического описания центра, отсутствовала явная конструкция семейства генераторов этой коммутативной подалгебры. Для решения этой задачи в настоящей работе используется схема Адлера-Костанта-Сима, предложенная в [62]. Она занимает важное место в теории интегрируемых систем: может использоваться для построения широкого класса коммутативных подалгебр, позволяет связывать интегрируемые системы с задачами разложения, а также предоставляет алгебраическую интерпретацию для представления Лакса, r-матричных Пуассоновых структур. Схема АКС допускает непосредственное обобщение на квантовый уровень и играет важную роль в описании, решении и классификации квантовых интегрируемых систем. Наиболее простым является случай, в котором $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ конечномерная алгебра Ли, допускающая разложение в прямую сумму двух подалгебр Ли. Каждому нормальному упорядочению, то есть выбору порядка сомножителей из разных подалгебр в мономах, составляющих линейный базис универсальной обертывающей алгебры, соответствует изоморфизм линейных пространств

$$\phi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}_+) \otimes U(\mathfrak{g}_-)$$

Введем обозначения $\mathfrak{g}_-^{op}$ для обратной структуры алгебры Ли на пространстве $\mathfrak{g}_-$ определяемой формулой $-\{\circ, \circ\}$. Будем обозначать алгебру Ли $\mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-^{op}$ символом $\mathfrak{g}_r$. Соответствующие универсальные обертывающие алгебры могут быть отождествлены как линейные пространства при рассмотрение некоторого базиса Пуанкаре-Биркгофа-Вита:

$$U(\mathfrak{g}_-^{op}) \simeq U(\mathfrak{g}_-).$$

Лемма 4.1. *Центр $\mathfrak{z}(U(\mathfrak{g}))$ отображается в коммутативную алгебру в $U(\mathfrak{g}_+) \otimes U(\mathfrak{g}_-^{op})$ посредством отображения ϕ.*

Доказательство Обозначим коммутатор в $U(\mathfrak{g}_+) \otimes U(\mathfrak{g}_-^{op})$ следующим образом $[*, *]_R$. Пусть c_1, c_2 два центральных элемента в $U(\mathfrak{g})$ представленных в форме

$$c_i = \sum_j x_j^{(i)} y_j^{(i)} \qquad x_j^{(i)} \in U(\mathfrak{g}_+),\ y_j^{(i)} \in U(\mathfrak{g}_-).$$

Подсчитаем коммутатор в модифицированной алгебре

$$\begin{aligned}[\phi(c_1), \phi(c_2)]_R &= [\sum_j x_j^{(1)} y_j^{(1)}, \sum_k x_k^{(2)} y_k^{(2)}]_R \\ &= \sum_{j,k} [x_j^{(1)}, x_k^{(2)}]_R y_j^{(1)} y_k^{(2)} + x_j^{(1)} x_k^{(2)} [y_j^{(1)}, y_k^{(2)}]_R.\end{aligned}$$

В силу данного выше определения алгебраической структуры

$$[x_j^{(1)}, x_k^{(2)}]_R = [x_j^{(1)}, x_k^{(2)}] \qquad [y_j^{(1)}, y_k^{(2)}]_R = -[y_j^{(1)}, y_k^{(2)}]$$

$$[\phi(c_1), \phi(c_2)]_R = \sum_k [c_1, x_k^{(2)}] y_k^{(2)} - \sum_j x_j^{(1)} [y_j^{(1)}, c_2]$$

Последнее выражение обращается в ноль в силу центральности элементов c_1, c_2 $\Box$

Замечание 4.1. *В дальнейшем нас будет интересовать применение этой схемы в случае $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$, то есть универсальной обертывающей алгебры аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{gl}_n}$ на критическом уровне. Для того, чтобы использовать результат схемы АКС в бесконечномерном случае необходимо выбрать подходящее пополнение алгебры. В нашем случае может быть выбрано пополнение, соответствующее биградуировке $deg(gt^k) = (k, 0)$, $deg(gt^{-k}) = (0, k)$ для $k \geq 0$. Требуется показать, что рассматриваемые центральные элементы являются элементами данного пополнения $U^{\cdot}_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$. Это действительно так в силу рассмотрения классического предела. В дальнейшем мы будет опускать упоминание о пополнении в обозначениях $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$, $U(\mathfrak{g}_r)$, а также их тензорных произведениях.*

Рассматривают также отображение линейных пространств

$$\varsigma : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}_+) \oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_-$$

определяемое выбранным разложением в прямую сумму подалгебр. Обозначим φ проектор на первое слагаемое $U(\mathfrak{g}_+)$.

Лемма 4.2. *Центр $\mathfrak{z}(U(\mathfrak{g}))$ отображается в коммутативную алгебру в $U(\mathfrak{g}_+)$ при отображении φ.*

Доказательство Пусть $c_1, c_2 \in Z$.

$$[c_1 - \varphi(c_1), c_2 - \varphi(c_2)] = [\varphi(c_1), \varphi(c_2)]$$

Правая часть выражения лежит в $U(\mathfrak{g}_+)$; левая часть в $U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_-$; из чего следует, что обе они равны нулю $\Box$

Мы будем отождествлять $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ с алгеброй петель как линейные пространства. Приведем несколько важных фактов относительно алгебр петель.

Утверждение 4.3. *Рассмотрим $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n[t, t^{-1}] = \mathfrak{gl}_n[t^{-1}] \oplus t\mathfrak{gl}_n[t]$ генераторы которой $e_{ij}^{(k)} = e_{ij}t^k$ могут быть представлены производящей функцией*

$$L_{full}(z) = \sum_{s=-\infty,\infty} \Phi_s z^{-s-1} \tag{4.1}$$

где

$$\Phi_s = \sum_{ij} E_{ij} \otimes e_{ij}^{(s)}.$$

Здесь, как и ранее, e_{ij} обозначают генераторы алгебры ли $\mathfrak{gl}_n$, а E_{ij} - матричные единицы в пространстве матриц Mat_n. Тогда структура алгебры Ли $\mathfrak{g}_r$ может быть описана следующими коммутационными соотношениями в терминах производящих функций

$$\{L_{full}(z) \otimes L_{full}(u)\} = [\frac{P}{z-u}, L_{full}(z) \otimes 1 + 1 \otimes L_{full}(u)]. \tag{4.2}$$

Заметим, что коммутационные соотношения совпадают с коммутационными соотношениями для оператора Лакса системы Годена (2.43).

Центр $(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}))$ и коммутативная алгебра в $U(t\mathfrak{gl}_n[t])$ Введем также „положительный“ оператор Лакса:

$$L(z) \ = \ \sum_{k>0} \Phi_k z^{-k-1},$$

который также удовлетворяет соотношениям R-матричного типа:

$$\{L(z) \otimes L(u)\} = [\frac{P}{z-u}, L(z) \otimes 1 + 1 \otimes L(u)]. \tag{4.3}$$

Теорема 4.4. *Коммутативная подалгебра в $U(t\mathfrak{gl}_n[t])$, определенная коэффициентами квантового характеристического полинома $det(L(z) - \partial_z)$, совпадает с подалгеброй, полученной из $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}))$ с помощью проекции $\varphi : U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}) \to U(t\mathfrak{gl}_n[t])$.*

Доказательство Доказательство опирается на результат работы [64], где было доказано, что централизатор квадратичных Гамильтонианов Годена H_2^i в $U(t\mathfrak{gl}_n[t])$ совпадает с коммутативной подалгеброй полученной из центра $U(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ на критическом уровне.

Замечание 4.2. *Данное специальное свойство, а именно тот факт, что квадратичные генераторы определяют всю коммутативную подалгебру, известно также в теории подалгебр Мищенко-Фоменко [65], [66], а также в теории системы Калоджеро-Мозера [67].*

Следуя предложенной логике, и используя факт, что подалгебра, определенная $det(L(z) - \partial_z)$ коммутирует с H_2^i, можно показать, что данная подалгебра является подалгеброй коммутативной алгебры, полученной из центра. Для доказательства их совпадения достаточно рассмотреть классический предел $\square$

Замечание 4.3. *Аналогичное доказательство применимо в случае проекции на $U(\mathfrak{gl}_n[t])$. Необходимо принять в расчет, что обе подалгебры инвариантны относительно действия $GL(n)$.*

4.1.2 Явное описание центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}))$

Теорема 4.5. *Центр $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ изоморфен как коммутативная подалгебра подалгебре в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}] \oplus t\mathfrak{gl}_n^{op}[t])$ определенной коэффициентами квантового характеристического полинома $det(L_{full}(z) - \partial_z)$. Изоморфизм индуцирован отображением*

$$I : U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n^{op}[t]) \to U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}), \qquad I : h_1 \otimes h_2 \to h_1 h_2 \tag{4.4}$$

Доказательство строится по стратегии, аналогичной использованной в [64]. Докажем сначала, что подалгебра, порожденная коэффициентами квантового характеристического полинома оператора Лакса $L_{full}(z)$ совпадает с централизатором своих квадратичных элементов. Далее, используя формулу Шугавары для квадратичных генераторов центра, докажем, что их образ в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n[t])$ совпадает с квадратичными коэффициентами квантового характеристического полинома. Для доказательства первого утверждения используется специальный предел коммутативного семейства.

Используя коммутационные соотношения 4.2, 4.3 и традиционные r-матричные вычисления получим, что выражения $TrL_{full}^m(z)$ центральны в симметрической алгебре $S(\mathfrak{gl}_n[t,t^{-1}])$ и, кроме того, $TrL^m_{full}(z)$ порождают коммутативную Пуассонову подалгебру в $S(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]\oplus t\mathfrak{gl}^{op}_n[t])$.

Рассмотрим семейство автоморфизмов алгебры $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}])\otimes U(t\mathfrak{gl}^{op}_n[t])$ определяемое в терминах оператора Лакса следующим образом: пусть K диагональная $n\times n$ матрица общего положения, оператор Лакса вида

$$L^{\hbar}_{full}(z) = L_{full}(z) + \hbar K$$

также удовлетворяет r-матричным соотношениям (4.2). Данное семейство автоморфизмов алгебры параметризуется $\hbar$.

Рассмотрим семейство коммутативных подалгебр

$$M^{\hbar} \subset U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}])\otimes U(t\mathfrak{gl}^{op}_n[t])$$

определяемое производящей функцией $det(L^{\hbar}_{full}(z)-\partial_z)$. $M^{\hbar}$ централизует семейство квадратичных генераторов $QI_2(L^{\hbar}_{full}(z))$. $QI_k(z,\hbar)$ имеет следующий скалярный лидирующий член в разложении по $\hbar$

$$QI_k(z,\hbar) = \hbar^k TrA_nK_1K_2\dots K_k + O(\hbar^{k-1}).$$

Выполним следующую замену в базисе коммутативной подалгебры

$$QI_k(z,\hbar)\mapsto \widetilde{QI_k}(z,\hbar) = (QI_k(z,\hbar) - \hbar^k TrA_nK_1K_2\dots K_k)\hbar^{-k+1}$$

и рассмотрим предел $\hbar\to\infty$

$$\widetilde{QI_k}(z,\hbar)\to Tr(L_{full}(z)K^{k-1})$$

В данном пределе рассматриваемые выражения порождают подалгебру Картана

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_-\otimes\mathfrak{H}_+ = U(\mathfrak{h}[t^{-1}])\otimes U(t\mathfrak{h}[t]).$$

Продемонстрируем, что эта подалгебра совпадает с централизатором квадратичных генераторов

$$H_2^{\infty}(z) = lim_{\hbar\to\infty}\widetilde{QI}_2(z,\hbar) = \sum_{i=-\infty,\infty} Tr(\Phi_i K) z^{-i-1}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{H} \subset Z(H_2^{\infty}(z))$. Введем обозначения $(k_1,\ldots,k_n)$ для диагональных элементов матрицы K. Обозначим $h_i \in \mathfrak{H}$ сумму вида

$$h_i = \sum_{s=1}^{n} (\Phi_i)_{ss} k_s,$$

тогда $H_2^{\infty}(z) = \sum_{i=-\infty,\infty} h_i z^{-i-1}$. Заметим, что элементы централизатора должны коммутировать с h_1 и h_{-1}. Рассмотрим бесконечный ряд $\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_i$ такой что $x_i \in U(\mathfrak{g}[t^{-1}]),\ y_i \in U(t\mathfrak{g}[t])$. Предполагается также, что этот ряд является элементом рассматриваемого пополнения, то есть такой, что имеется только конечное количество элементов каждой биградуировки. Операторы $[h_1,*]$ и $[h_{-1},*]$ являются однородными операторами биградуировок $(0,1)$ и $(1,0)$. Таким образом, вопрос о централизаторе сводится к аналогичному вопросу в полиномиальной алгебре. Ответ дается следующими формулами

$$Z(h_1) = U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes \mathfrak{H}_+, \qquad Z(h_{-1}) = \mathfrak{H}_- \otimes U(t\mathfrak{gl}_n^{op}[t]).$$

Пересечение данных подпространств в пополненном смысле совпадает с подалгеброй Картана $\mathfrak{H}$.

Суммируем вышесказанное: в точке общего положения $\hbar$ семейства деформаций коммутативная подалгебра $M^{\hbar}$ содержится в централизаторе семейства QI_2 и в пределе $\hbar \to \infty$ порождает централизатор. Из соображений, аналогичных используемым в [64] в общей точке должно также выполняться равенство, а именно в общей точке $M^{\hbar}$ совпадает с централизатором квадратичных генераторов. Для окончания доказательства напомним формулу Шугавары квадратичных генераторов $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$

$$c_2(z) =: Tr(L^2_{full}(z)) :$$

В этой формуле используется символ нормального упорядочения : : для токов $\mathfrak{sl}_2$. Эти элементы проектируются в $QI_2(z)$ с точностью до центрального элемента в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n[t])$ ■

4.1.3 Схема Бейлинсона-Дринфельда

В работе [68] была предложена универсальная конструкция квантования систем типа Хитчина. Пусть Σ связная гладкая проективная кривая над $\mathbb{C}$ рода $g > 1$, G - полупростая группа Ли, $\mathfrak{g}$ соответствующая алгебра Ли, Bun_G - стек модулей главных G-расслоений на Σ. Определим также двойственную по Ленглендсу группу ${}^LG$ как группу, определенную двойственными корневыми данными, а именно, такую, для которой решетка весов совпадает с двойственной решеткой весов G.
Основной результат работы [68] сводится к следующему:

- Существует коммутативное кольцо дифференциальных операторов $\mathfrak{z}(\Sigma, G)$, действующих в сечениях канонического расслоения K_{Bun_G}. При этом отображение символа, примененное к данному коммутативному кольцу порождает коммутативную подалгебру классических Гамильтонианов Хитчина на T^*Bun_G.

- Спектр кольца $\mathfrak{z}(\Sigma, G)$ канонически изоморфен пространству модулей ${}^L\mathfrak{g}$-оперов (для случая $G = SL_2$ ${}^L\mathfrak{g}$-опер совпадает с оператором

Штурма-Лиувилля на Σ; в общем случае опером называется плоская связность в главном ${}^{L}G$ расслоении с параболической структурой).

- Каждому ${}^{L}\mathfrak{g}$-оперу может быть сопоставлен D-модуль на Bun_G получаемый при фиксировании собственных значений гамильтонианов Хитчина. Этот D-модуль является собственным пучком для действия преобразований Гекке, естественно определенных на пространстве модулей расслоений. При этом собственным значением действия является соответствующий ${}^{L}\mathfrak{g}$-опер.

В основе конструкции такой алгебры лежит естественное действие центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{g}})$ на группе петель соответствующей группы Ли. Это действие ограничивается до дифференциальных операторов на $Bun_G(\Sigma)$ в силу одной из реализаций стека модулей главных расслоений:

$$Bun_G(\Sigma) \simeq G(F)\backslash G(\mathcal{A}_F)/G(\mathcal{O}_F) \simeq G_{in}\backslash G[[z, z^{-1}]/G_{out}$$

здесь G_{in} и G_{out} обозначают подгруппы сходящихся функций в U_{in} и U_{out}, здесь U_{in} и U_{out} определяют покрытие кривой Σ следующего типа: U_{in} - некоторая окрестность точки P с локальным параметром z, $U_{out} = \Sigma\backslash P$. Средняя часть равенства представляет собой так называемую адельную реализацию стека модулей главных G-расслоений для алгебраической группы G. В конструкции фигурируют группа аделей $G(\mathcal{A}_F)$ поля F рациональных функций на Σ, группа целых аделей $G(\mathcal{O}_F)$ и группа главных аделей $G(F)$. Данная реализация удобна для установления аналогии рассматриваемого сюжета квантовой системы Годена и арифметического соответствия Ленглендса.

4.1.4 Соответствие

Исторически, гипотеза Ленглендса обобщает результаты теории полей-классов [69, 70], одним из основных результатов которой можно считать следующее утверждение в случае числового поля. А именно, пусть F - числовое поле (то есть конечное расширение $\mathbb{Q}$), $\bar{F}$ - его максимальное алгебраическое расширение, F^{ab} - максимальное абелево расширение. Группой Галуа расширения $F \subset F'$ называется

$$Gal(F', F) \ = \ \{\sigma \in Aut(F') : \sigma(x) = x \ \ \forall x \in F\}.$$

Абелев закон взаимности

Существует изоморфизм групп

$$Gal(F^{ab}, F) \simeq \text{Группа связных компонент } F^{\times} \backslash \mathcal{A}_F^{\times}$$

где $\mathcal{A}_F^{\times}$ - группа иделей кольца F, $F^{\times}$ - группа единиц кольца F. При этом рассматривается топология произведения пополнений.

Непосредственно гипотеза Ленглендса формулируется как n-мерное (не коммутативное) обобщение абелева закона взаимности. А именно предполагается, что существует изоморфизм категорий представлений группы Галуа максимального алгебраического расширения кольца и категории автоморфных представлений соответствующей группы иделей. Под автоморфными представлениями понимаются предствления $GL_n(\mathcal{A}_F)$ реализованные на пространстве функций на

$$GL_n(F) \backslash GL_n(\mathcal{A}_F),$$

удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям [71, 72]. Правую часть соответствия традиционно называют автоморфной стороной по следующей причине. Для $n = 2$ такие представления связаны с теорией модулярных функций. Напомним, что модуляные функции определяются как функции на верхней полуплоскости Зигеля, удовлетворяющие условию

$$f((az+b)/(cz+d)) = \chi(a)(cz+d)^k f(z) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

В частности, пространство модулярных функций может быть представлено как пространство функций на следующем факторпространстве

$$SL_2(\mathbb{R})/SL_2(\mathbb{Z}) \simeq K \backslash GL_2(\mathcal{A}_{\mathbb{Q}})/GL_2(\mathbb{Q})$$

В программе Ленгленса рассматриваются следующие типы полей F:

- Числовое поле.
- Поле функций на алгебраической кривой над конечным полем F_q (В этом случае гипотеза была доказана в работах [73]).
- Поле функций на алгебраической кривой над полем $\mathbb{C}$. Данный случай называется геометрическим случаем над $\mathbb{C}$. Ему посвящены следующие работы [74].

Формулировка соответствия над $\mathbb{C}$:

В данном случае на стороне Галуа рассматриваются представления фундаментальной группы, или классы плоских связностей в расслоении ранга n. На автоморфной стороне рассматривается D-модуль Хитчина на пространстве

$$GL(F) \backslash GL(\mathcal{A}_F)/GL(\mathcal{O}_F) \simeq Bun_n(\Sigma).$$

Из результатов [68] и [63] следует наличие соответствия между D-модулями Хитчина и плоскими связностями, задаваемыми ${}^L\mathfrak{g}$-операми. Благодаря конструкции квантового характеристического полинома для алгебры петель, а также явной конструкции центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ в теореме 4.5 данное соответствие для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ удалось сделать более явным. На схеме представлена конструкция этого соответствия

D-модуль Хитчина $\overset{FF, BD}{\Leftrightarrow}$ Характер χ на $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}))$ $\overset{CT}{\Leftrightarrow}$ $\chi det(L_{full} - \partial_z)$.

Замечание 4.4. *Построение характера на $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}))$ по D-модулю Хитчина является следствием теоремы Фейгина и Френкеля о существовании центра, а также конструкции Бейлинсона и Дринфельда квантования системы Хитчина. Для получения эффективного описания соответствующей плоской связности [28] необходимо использовать отождествление коммутативных подалгебр, с одной стороны, коммутативной подалгебры в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]) \otimes U(t\mathfrak{gl}_n[t])$, определенной коэффициентами квантового характеристического полинома, а с другой - образом центра $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{g}}))$ при отображении АКС.*

4.2 Некоммутативная геометрия

Основной сюжет данной работы имеет непосредственное отношение к формирующейся области некоммутативной геометрии, основной проблематикой которой является нахождение геометрической интерпретации алгебраических структур, в которых ослаблено требование коммутативности. В данном случае квантовый характеристический полином является естественным некоммутативным обобщением классического характеристического полинома. Некоторые свойства этого объекта, в частности роль, которую играет квантовый характеристический полином в задаче эффективного описания решения рассматриваемых квантовых интегрируемых моделей, позволяют считать его естественным некоммутативным обобщением алгебраической кривой - спектральной кривой модели. В данном разделе описываются некоторые линейно-алгебраические свойства квантового характеристического полинома полученные в работе [29].

4.2.1 Приведение квантового оператора Лакса к форме Дринфельда-Соколова

Пусть $L(z) \in Mat_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \otimes Fun(z)$ - квантовый оператор Лакса модели Годена (1.16), здесь и далее в данном разделе $Fun(z)$ означает пространство рациональных функций параметра z. Обозначим $L^{[i]}(z)$ *квантовые степени* оператора Лакса, определяемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} L^{[0]} &= Id, \\ L^{[i]} &= L^{[i-1]}L + \partial_z L^{[i-1]}. \end{aligned}$$

Теорема 4.6. *Выражение* $C(z) \in Mat_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \otimes Fun(z)$ *определенное формулой*

$$C(z) = \begin{pmatrix} v \\ vL \\ \dots \\ vL^{[n-1]} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

где $v \in \mathbb{C}^n$ *- вектор общего положения, определяет следующее калибро-*

вочное преобразование

$$C(z)(L(z)-\partial_z)=\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0 & 1\\ QH_n & QH_{n-1} & ... & QH_2 & QH_1 \end{pmatrix}-\partial_z\right)C(z), \quad (4.6)$$

где коэффициенты нижней строки правой части определяются коэффициентами квантового характеристического полинома

$$\begin{aligned} det(L(z)-\partial_z) &= TrA_n(L_1(z)-\partial_z)\dots(L_n(z)-\partial_z)\\ &= (-1)^n(\partial_z^n-\sum_i QH_{n-i}\partial_z^i). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Связность в правой части равенства обычно называется связностью типа Дринфельда-Соколова.

Уравнение Книжника-Замолодчикова Здесь и далее в данном разделее V - конечномерное представление $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$. В работе [75] было обнаружено, что существует простая связь между решениями уравнения Книжника-Замолодчикова (КЗ) [76]

$$(L(z)-\partial_z)S(z)=0,$$

где $S(z)$ - функция со значениями в $\mathbb{C}^n\otimes V$, и решениями уравнения Бакстера

$$det(L(z)-\partial_z)\Psi(z)=0 \quad (4.8)$$

на $\Psi(z)$ - функцию со значениями в V. Для этого достаточно в качестве $\Psi(z)$ взять проекцию на антисимметричную часть выражения $U(z) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n-1} \otimes S(z)$ где v_i - произвольные вектора в $\mathbb{C}^n$. При специальном выборе векторов v_i можно показать, что все векторные компоненты $S(z)$ над $\mathbb{C}^n$ решают уравнение (4.8).

Доказательство теоремы 4.6 Рассмотрим сначала несколько примеров квантовых степеней оператора Лакса (4.5):

$$\begin{aligned} L^{[1]}(z) &= L(z), \\ L^{[2]}(z) &= L^2(z) + L'(z). \end{aligned}$$

В частности, для случая $n = 2$ матрица C может быть выбрана в традиционном виде

$$C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где квантовый оператор Лакса определяется выражением

$$L(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

В общем случае рассмотрим правую и левую части выражения (4.6) примененные к некоторой функции $S(z) \in \mathbb{C}^n \otimes V \otimes Fun(z)$,

$$L.H.S = C(L - \partial_z)S = \begin{pmatrix} < v, LS - \partial_z S > \\ < v, L^{[1]}(LS - \partial_z S > \\ \ldots \\ < v, L^{[n-1]}(LS - \partial_z S) > \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

$$R.H.S = (L_{DS} - \partial_z)CS = \begin{pmatrix} < v, LS - \partial_z S > \\ \dots \\ < v, L^{[n-1]}S - \partial_z(L^{[n-2]}S) > \\ < v, \sum_{i=0}^{n-1} QH_{n-i}L^{[i]}S - \partial_z(L^{[n-1]}S) > \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Используя определение квантовых степеней оператора Лакса получим

$$L^{[k]}S - \partial_z(L^{[k-1]}S) = L^{[k-1]}(LS - \partial_z S).$$

Разница (4.12) и (4.11) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ < v, \sum_{i=0}^{n-1} QH_{n-i}L^{[i]}S - L^{[n]}S > \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Рассмотрим теперь данное выражение в случае, когда $S(z)$ является решением уравнения КЗ

$$L(z)S(z) = \partial_z S(z).$$

Пусть $\Phi(z) = C(z)S(z)$, где $C(z)$ задано формулой (4.5). Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= < v, S(z) > \\ \Phi_2(z) &= < vL(z), S(z) > = < v, \partial_z S(z) > \\ &\dots \\ \Phi_k(z) &= < v(L^{[k-1]}L(z) + \partial_z L^{[k-1]}), S(z) > \\ &= < vL^{[k-1]}, \partial_z S(z) > + < v\partial_z L^{[k-1]}, S(z) > = \partial_z \Phi_{k-1}(z) \end{aligned}$$

Однако, следствием результата [75] является то, что $\Phi_1(z) =< v, S(z) >$ решает уравнение Бакстера

$$\sum_{i=0}^{n-1} QH_{n-i}\partial_z^i\Phi_1(z) - \partial_z^n\Phi_1(z) = 0 \tag{4.14}$$

для любого решения уравнения КЗ $S(z)$ и произвольного вектора $v \in \mathbb{C}^n$. Общность выбора решения уравнения КЗ позволяет утверждать, что n-ый элемент (4.13) равен нулю тождественно по $S(z) \in \mathbb{C}^n \otimes V \otimes Fun(z)$. Из теоремы 2.5.7 [77] следует равенство универсальных дифференциальных операторов со значениями в квантовой алгебре. ■

4.2.2 Тождество Гамильтона-Кэли

Следствие 4.6.1. *Квантовые степени оператора Лакса удовлетворяют квантовому тождеству Гамильтона-Кэли*

$$L^{[n]}(z) = \sum_{i=1}^{n} QH_i(z)L^{[n-i]}(z). \tag{4.15}$$

Доказательство Рассматривая последнюю строку уравнения (4.6) получим

$$vL^{[n-1]}(z)(L(z) - \partial_z) = \sum_{i=1}^{n} vQH_i(z)L^{[n-i]}(z) - \partial_z vL^{[n-1]}(z).$$

Результат является следствием общности выбора вектора $v \in \mathbb{C}^n$. □

Замечание 4.5. *Тождество Гамильтона-Кэли представленное выше является единственным соотношением такого типа для квантовых операторов Лакса со спектральным параметром. Появление квантовых поправок в степенях $L(z)$ отличает его от традиционного. Подобного рода* *тождества для операторов Лакса без спектрального параметра обсуждались в [78], а также в разделе 4.2 [79]. В работе [80] (раздел 2.4) было предложено тождество Гамильтона-Кэли для $\mathfrak{gl}_n$. Заметим также, что в [81] (раздел 8.6 стр. 96) было предложено обобщение тождества Гамильтона-Кэли иной природы для матриц с коэффициентами в произвольной некоммутативной алгебре.*

4.2.3 Замечания о решениях уравнения КЗ

В качестве еще одного следствия явной формулы для приведения квантового оператора Лакса к виду Дринфельда-Соколова (4.6) получим простой способ строить решения универсального уравнения Бакстера по решению уравнения Книжника-Замолодчикова. Этот метод полностью согласован с методом, рассмотренным в [75]. Из формулы (4.6) основной теоремы следует, что если $S(z)$ решает уравнение КЗ

$$(L(z) - \partial_z)S(z) = 0,$$

то первая векторная компонента $C(z)S(z)$ решает уравнение Бакстера (4.8). Рассматривая $C(z)$ в виде 4.5 с вектором $v = (0, ..., 1, ..., 0)$ получим, что первая компонента $C(z)S(z)$ совпадает с $S(z)_i$.

Следствие 4.6.2. *Пусть π - конечномерное представление $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$ в котором каждая компонента является конечномерным неприводимым представлением. Тогда все решения уравнения КЗ*

$$(\pi(\partial_z - L(z)))S(z) = 0 \tag{4.16}$$

являются рациональными функциями z.

Доказательство В работе [75] было сделано предположение (основанное на работе [82], а также на идеях Бакстера, Годена и Склянина) о том, что уравнение типа Бакстера $\pi(det(\partial_z - L(z)))\Psi(z) = 0$, где π - конечномерное представление $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$, имеет только рациональные решения. Эта гипотеза для представлений описанного типа и алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ была доказана в работе [50] (теорема 6.1). С другой стороны, из утверждения в работе [75], обсуждаемого выше, следует, что любая компонента $S(z)_i$ вектора $S(z)$ решает уравнение Бакстера, являясь, таким образом, векторнозначной рациональной функцией. □

Список литературы

[1] Shiota T., *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math., **83**(2):333–382, 1986.

[2] Krichever I., *Integrable linear equations and the Riemann-Schottky problem*, in: Algebraic Geometry and Number Theory, Birkhäuser, Boston, 2006.

Krichever I., *Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer Variety*, arXiv:math/0605625.

[3] Атья М., *Геометрия и физика узлов.* М. Мир 1995.

[4] Donaldson S., *An application of gauge theory to four- dimensional topology*, J. Differential Geometry **18** A983, 279-315.

[5] Kronheimer P.B., Mrowka T.S., *The genus of embedded surfaces in the protective plane*, Math. Research Letters **1** A994, 797-808.

[6] Nakayashiki, A., *Structure of Baker-Akhiezer modules of principally polarized abelian varieties, commuting partial differential operators and associated integrable systems*, Duke Math. J.62-2 (1991) 315 –358,

Nakayashiki, A., *On the cohomologies of theta divisors of hyperelliptic Jacobians*, Contemporary Math. **309** (2002), 177-183.

Nakayashiki, A. and Smirnov, F., *Cohomologies of affine hyperelliptic Jacobi varieties and integrable systems*, Comm. Math. Phys. **217** (2001), 623-652.

Nakayashiki, A. and Smirnov, F., *Euler characteristics of theta divisors of Jacobians for spectral curves*, CRM Proc. and Lect. Notes **32**, Vadim B. Kuznetsov, ed. (2002), 239-246.

[7] Thaddeus M. *Conformal field theory and the cohomology of the moduli space of stable bundles*, J. Differential Geom. 1992. V. **35**, № 1. P. 131-149.

[8] Барановский В.Ю., *Кольцо когомологий пространства модулей стабильных расслоений с нечетным детерминантом*, Изв. РАН. Сер. матем., 1994, том **58**, выпуск 4, страницы 204–210.

[9] Feigin B., Finkelberg M., Negut A., Rybnikov L., *Yangians and cohomology rings of Laumon spaces*, arXiv:0812.4656.

Feigin B., Finkelberg M., Frenkel I., Rybnikov L., *Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces*, arXiv:0806.0072.

[10] Клейн Ф., *Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований („Эрлангенская программа“)*, 1872.

[11] Gaudin M., *La Fonction d' Onde de Bethe*, Masson, Paris (1983).

[12] Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Вриза, конечнозонные линейные операторы и Абелевы многообразия.* УМН, **31**, 1, 56-136 (1976).

Кричевер И.М., *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, УМН 1977 **32** №4 180-208.

[13] Kowalevski S., *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* Acta Mathematica **12** (1889),177-23.

[14] Якоби К., *Лекции по динамике.* Москва 1936.

[15] Веселов А.П., Новиков С.П., *О скобках Пуассона, совместимых с алгебраической геометрией и динамикой КдФ на множестве конечнозонных потенциалов.*— Докл. АН СССР, 1982, **266**, № 3.

[16] Hitchin N., *Stable bundles and integrable systems.* Duke Math. Journal 1987 V **54** N**1** 91-114.

[17] Кричевер И.М. *О рациональных решениях уравнения Кадомцева–Петвиашвили и об интегрируемых системах N частиц на прямой* Функц. анализ и его прил., 1978, **12**, 1, стр. 76–78

[18] Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys.Rev.Lett. 1967. V. **19**. P. 1095-1097.

[19] Lax P., *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. **21**. № 5. P. 467-490.

[20] Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П., *Интегрируемые системы, I.* Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, том **4**.

[21] Переломов А.М. *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, М. Наука, 1990.

[22] Демидов Е.Е., *Иерархия Кадомцева–Петвиашвили и проблема Шоттки*, Фундаментальная и прикладная математика 1998, т. **4**, выпуск 1, стр. 367-460.

[23] Склянин Е.К., Фаддеев Л.Д. *Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля* ДАН СССР.—1978.— Т. **243**, № 6—С. 1430—1433.

Склянин Е.К. *Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера* ДАН СССР.—1978.—Т. **244**, № 6.—С. 1337— 1341.

Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л. Д. *Квантовый метод обратной задачи.* Теор. и мат. физика.—1979.— Т. **40**, №2.— С. 194—220.

Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга,* УМН.—1979.—Т. **34**, № 5.—С. 13—63.

Ku1ish P.P., Sk1yanin E.K. *Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet.* Phys. Lett.— 1979.— V. **70** A, № 5—9.—P. 461—463.

[24] Bethe H., *Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette. (On the theory of metals. I. Eigenvalues and*

eigenfunctions of the linear atom chain), Zeitschrift fur Physik A, Vol. **71**, pp. 205-226 (1931).

[25] Дринфельд В.Г., *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга—Бакстера* ДАН СССР. 1985. Т.**283**, №5.

[26] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M., *From Gauss to Painleve,* A modern theory of special functions, 1991.

[27] Chervov A., Falqui G., Rybnikov L., *Limits of Gaudin Systems: Classical and Quantum Cases*, arXiv:0903.1604v1 [math.QA].

[28] Chervov A., Talalaev D., *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence.* hep-th/0604128.

[29] Талалаев Д., Червов А., *Уравнение КЗ, G-оперы, квантовая редукция Дринфельда-Соколова и квантовое тождество Гамильтона-Кэли*, Записки Научных семинаров ПОМИ, Выпуск 360, «Теория представлений, Динамические системы, Комбинаторные методы. Часть 16», стр. 246-260.

[30] Babelon O., Bernard D., Talon M., *Introduction to classical integrable systems,* Cambridge University Press 2003.

[31] Рейман А.Г., Семёнов-Тян-Шанский М.А., *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход.* Современная математика. Ижевск 2003.

[32] Ramanan S., *The moduli space of vector bundles over an algebraic curve,* Math. Ann. **200** (1973) 69-84.

[33] Kodaira K., *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures* 1986 by Springer-Verlag.

[34] Nekrasov N., *Holomorphic bundles and many-body systems.* PUPT-1534, Comm. Math. Phys.,**180** (1996) 587-604; hep-th/9503157.

[35] Талалаев Д., Червов А., *Система Хитчина на особых кривых*, Теоретическая и Математическая Физика (ТМФ), 2004, 140:2, 179–215.

Chervov A., Talalaev D., *Hitchin systems on singular curves II. Gluing subschemes*, Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.4:751-787,2007.

[36] Krichever I., Babelon O., Billey E., Talon M., *Spin generalization of the Calogero-Moser system and the Matrix KP equation*, arXiv:hep-th/9411160.

[37] Кассель К., *Квантовые группы,* (Библиотека математика, вып. 5) М. 1999.

[38] Krichever I., Phong D., *Symplectic forms in the theory of solitons*, hep-th/9708170.

D'Hoker E., Krichever I., Phong D., *Seiberg-Witten Theory, Symplectic Forms, and Hamiltonian Theory of Solitons*, hep-th/0212313.

[39] Sklyanin E., *Separation of variables in the Gaudin model.* J.Sov.Math. **47**: 2473-2488, 1989, Zap.Nauchn.Semin. *164*: 151-169, 1987.

[40] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D., *Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures,* Ann. Physics **111** (1978), 61–110.

Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D., *Deformation theory and quantization. II. Physical applications,* Ann. Physics **111** (1978), 111–151.

[41] Gutt S., *An explicit $*$-product on the cotangent bundle of a Lie group,* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 249–258.

[42] Kontsevich M., *Deformation quantization of Poisson manifolds,* Lett. Math. Phys. **66** (2003), 157–216.

[43] Fedosov B.V., *A simple geometrical construction of deformation quantization,* J. Differential Geom. **40** (1994), 213–238.

Fedosov B.V., *Deformation quantization and index theory,* Mathematical Topics, Vol. **9**, Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[44] Талалаев Д., *Квантовая система Годена*, Функциональный Анализ и его приложения **40** No. 1 pp.86-91 (2006).

[45] Sklyanin E., *Separations of variables: new trends.* Progr. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 35–60. solv-int/9504001.

[46] Kulish P., Sklyanin E., *Quantum spectral transform method. Recent developments*, Lect. Notes in Phys. **151** (1982), pp. 61-119.

[47] Kirillov A., Reshetikhin N., *The Yangians, Bethe Ansatz and combinatorics*, Lett. Math. Phys. **12**, 3 (1986), pp. 199-208.

[48] Molev A.I., *Yangians and their applications.* math.QA/0211288.

[49] Боголюбов Н., Изергин А., Корепин В., *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи* 1992.

[50] Mukhin E., Tarasov V., Varchenko A., *Schubert calculus and representations of general linear group* arXiv:0711.4072.

[51] Rubtsov V., Silantiev A., Talalaev D., *Manin Matrices, Quantum Elliptic Commutative Families and Char-acteristic Polynomial of Elliptic Gaudin model*, SIGMA **5** (2009), 110-131.

[52] Felder G., *Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves.* Proc. ICM Zürich 1994, 1247-55, Birkhäuser (1994); Elliptic quantum groups, Proc. ICMP Paris 1994, 211-8, International Press (1995).

[53] Tarasov V., Varchenko A., *Small Elliptic Quantum Group* $e_{\tau,\gamma}(\mathfrak{sl}_N)$, Mosc. Math. J., **1**, no. 2, (2001), 243–286, 303–304.

[54] Enriquez B., Feigin B., Rubtsov , *Separation of variables for Gaudin-Calogero systems*, Compositio Math. **110**, no. 1, (1998), 1–16.

[55] Felder G., Schorr A., *Separation of variables for quantum integrable systems on elliptic curves*, math.QA/9905072, J. Phys., **A 32**, (1999), no. 46, 8001–8022.

[56] Gould M. D., Zhang Y.-Z., Zhao S.-Y., *Elliptic Gaudin models and elliptic KZ Equations* nlin/0110038.

[57] Талалаев Д., *Анзац Бете и изомонодромные преобразования*, Теоретическая и математическая физика, ТМФ, 2009, том 159, номер 2, стр. 252–265.

[58] Болибрух А.А., *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения.* - М: МЦНМО, 2000

[59] Muğan U., Sakka A., *Schlesinger transformations for the Painlevé VI equation*, J. Math. Phys. **36** (3) 1995.

[60] Griffiths Ph., Harris J., *Principles of Algebraic Geometry,* Wiley-Interscience, 1994, ISBN 0-471-05059-8.

[61] Schorr A., *Separation of variables for the 8-vertex SOS model with antiperiodic boundary conditions*, PhD Thesis, ETH, Zurich, 2000.

[62] Adler M., *On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for the KdV type equations*, Invent. Math. (1979) **50**, 219-248.

Kostant B., *Quantization and Representation Theory,* in: Representation Theory of Lie Groups, Proc. SRC/LMS Res. Symp., Oxford 1977. London Math. Soc. Lecture Notes Series, **34**, 287-316, 1979.

Symes W.W., *Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory.* Invent. Math. 59, 13-51 (1980).

[63] B. Feigin, E. Frenkel, Int. J. Mod. Phys. A7, Suppl. 1A 1992, 197-215.

[64] Rybnikov L., *Uniqueness of higher Gaudin hamiltonians*, archiv:math/0608588.

[65] Tarasov A.A., *Uniqueness of the lifting of maximal commutative subalgebras of the Poisson-Lie algebra to the enveloping algebra.* Sb. Math. 194, No.7, 1105-1111 (2003); translation from Mat. Sb. 194, No.7, 155-160 (2003).

[66] Rybnikov L., *Centralizers of some quadratic elements in Poisson-Lie algebras and a method for the translation of invariants.* Russ. Math. Surv. 60, No.2, 367-369 (2005); translation from Usp. Mat. Nauk 60, No.2, 173-174 (2005) math.QA/0608586.

[67] Ochiai, H., Oshima, T., and Sekiguchi, H. *Commuting families of symmetric differential operators* , Proc. of the Japan Acad. 70, Ser. A 2 1994 62–68.

[68] Beilinson A., Drinfeld V., *Quantization of Hitchin's integrable system and Heche eigensheaves.* Preprint 1991.

[69] Серр, Ж., *Алгебраические группы и поля классов.* Мир, 1968.

[70] Ивасава К., *Локальная теория полей классов* Мир, 1983.

[71] Frenkel E., *Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory*, hep-th/0512172.

[72] Vergne M., *All what I wanted to know about the Langlands program and was afraid to ask*, math.GR/0607479.

[73] Lafforgue L., *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Inv. Math. **147** 1-241 (2002).

[74] Hausel T., Thaddeus , *Mirror symmetry, Langlands duality, and the Hitchin system*, Invent. Math. **153** (2003) 197-229.

Frenkel E., Gaitsgory D., Vilonen K., *On the geometric Langlands conjecture*, Journal of AMS **15** (2001) 367–417.

Frenkel E., Gaitsgory D., *Local geometric Langlands correspondence and affine Kac-Moody algebras*, math.RT/0508382

Bezrukavnikov R., Braverman A., *Geometric Langlands correspondence for D-modules in prime characteristic: the GL(n) case*, math.AG/0602255.

[75] Talalaev D., Chervov A., *Universal G-oper and Gaudin eigenproblem* hep-th/0409007.

[76] Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B., Nucl.Phys.B **247,** (1984) 83-103.

[77] Диксмье Ж., *Универсальные обертывающие алгебры*, М. Мир 1978.

[78] Bracken A.J., Green H.S., J. Math. Phys. **12,** (1971) 2099-2106.

Gould M.D., J. Austral. Math. Soc. B. **26,** (1985) 257–283.

Macfarlane A.J., Pfeiffer H., preprint math-ph/9907024.

Isaev A.P., Ogievetsky O.V., Pyatov P.N., preprint math.QA/9912197.

Gurevich D.I., Pyatov P.N., Saponov P.A., preprint math.QA/0412192.

Ogievetsky O., Pyatov P., preprint math.QA/0511618.

[79] Molev A.I., preprint math.QA/0211288.

[80] Kirillov A.A., Moscow Math. Journal, **1,** No 1, (2000) 49-63.

[81] Gelfand I., Krob D., Lascoux A., Leclerc B., Retakh V.S., Thibon J.-Y., preprint hep-th/9407124.

[82] Frenkel E., *Affine Algebras, Langlands Duality and Bethe Ansatz*, q-alg/9506003.