Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

на правах рукописи
УДК 517.957

ТАЛАЛАЕВ
Дмитрий Валерьевич

R-матричный подход в задачах конечнозонного интегрирования

01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2000

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского Государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель -	доктор физико-математических наук, профессор С. М. Гусейн-Заде
Официальные оппоненты -	доктор физико-математических наук П. Г. Гриневич
	доктор физико-математических наук А. В. Забродин
Ведущая организация -	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 17 марта 2000г. в 16^{15} на заседании диссертационного совета Д.053.05.05 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119899, ГСП, Москва, Воробьевы горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 17 февраля 2000г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.053.05.05 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор В. Н. Чубариков

1 Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию гамильтоновой структуры конечномерных динамических систем теории солитонов. Среди многообразия методов в этой области в качестве основных в данной работе выбраны универсальный подход к построению симплектической структуры в рамках аглебро-геометритрических конструкций и метод, основанный на универсальной динамической R-матрице. Одной из основных целей диссертации является объединение этих двух подходов.

1.1 Актуальность темы

Конечномерные динамические системы теории солитонов первоначально воспринимались в значительной степени лишь как модельные примеры в теории интегрируемых систем. Как оказалось в последствии, ряд таких систем тесно связан с фундаментальными проблемами математики и математической физики. Так в пионерской работе [MM][1] впервые была обнаружена связь между рациональными или эллиптическими решениями уравнения КдФ, и рациональной или эллиптической системой Calogero-Moser(CM [CM][2]). Наиболее полное понимании природы такой связи возникло с приходом алгебро-геометрического метода обратной задачи, разработанного в работах [Kr1][3],[Kr2][4]. А именно, было установлено, что условие существования собственной функции специального вида у вспомогательного линейного оператора, построенного по представлению Лакса, эквивалентно тому, что динамика полюсов решения нелинейного уравнения описывается системой такого типа.

Алебро-геометрические конструкции прямой и обратной задачи, используемые в работах [KB][5], [KZ][6], представляют богатейший

[1][MM] H. Airault, H. McKean, J. Moser, Rational and elliptic solutions of the KdV equation and related many-body problem. Comm. Pure and Appl. Math. 30 (1977) 95-125.

[2][CM] F. Calogero, Exactly solvable one-dimentional many-body systems, Lett. Nuovo Cimento 13(1975), 411-415.

[3][Kr1] И.М.Кричевер, Нелинейные уравнения и эллиптические кривые, Совр. Пробл. Мат.Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР 23(1983)

[4][Kr2] И.Кричевер, Периодическая неабелева цепочка Тода и ее двумеризация. Успехи Мат. Наук 36 (1981),2,72-77.

[5][KB] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon. Spin generalization of the Cologero-Moser system and the Matrix KP equation. Preprint LPTHE 94/42. Amer. Math. Transl. 170(1995),n2,83-119.

[6][KZ] I. Krichever, A. Zabrodin Spin generation of the model Ruijesenaars-

математический аппарат. Алгебраические объекты, “живущие” на кривой, такие как пространства функций Бейкера-Ахиезера, пространства абелевых дифференциалов, обладающие высокой степенью симметричности, позволяют явно конструировать решения динамической системы и нелинейного уравнения в терминах θ-функций на Якобиане кривой.

Существенным при всех дальнейших рассмотрениях является наличие у нелинейного уравнения представления Лакса

$$\dot{L} = [M, L]$$

или представления нулевой кривизны

$$[\partial_t - \mathcal{L}, \partial_y - \mathcal{M}] = 0.$$

Оказывается, что факт существования решения вспомогательной линейной задачи

$$(\partial_t - \mathcal{L})\Psi = 0$$

для оператора с двоякопериодическими коэффициентами в виде двоякоблоховской функции Ψ является столь ограничительным условием, что в ряде случаев позволяет однозначно восстанавливать $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ пару, а следовательно и решение нелинейного уравнения. Это же условие позволяет сузить L-оператор на конечномерное пространство. Характеристический полином конечномерного оператора задает уравнение римановой поверхности, а аналитические свойства собственной функции задают набор спектральных данных задачи.

Эта конструкция является одной из многочисленных демонстраций того богатства математических структур, связанных с этими системами, которое обусловило неослабевающий уже более 20 лет интерес к ним. В последнее время существенный интерес к этим системам основан на установленной в серии работ [DW][7],[HP][8] связи между их геометрической природой и $N = 2$ суперсимметричной теорией Зайберга-Виттена. В частности, набор спектральных данных в теории Зайберга-Виттена полностью соответствует спектральным данным прямой и обратной задачи теории алгебро-геометрического интегрирования, и такой фундаментальный объект на спектральной кривой,

---

Schneider,nonabelian 2-dimentional Toda chain and the Sklianin algebras representations. Uspehi mat. nauk 1995 V. 50 N. 6 pp. 3-56.

[7][DW] R.Donagi, E.Witten, Suppersymmetric Yang-Mills theory and integrable systems, Nucl. Phys. B 460 (1996) 299-334.

[8][HP] E.D'Hoker, D.H.Phong, Calogero-Moser systems in $SU(N)$ Seiberg- Witten theory, hep-th 9709053. Nucl.Phys.B 513(1998) 405-444.

как 1-форма $d\lambda$ позволяет строить предпотенциал теории, а периоды этой формы параметризуют вакуумное пространство.

Существует ряд подходов к гамильтонову описанию подобных систем, затрагивающих широкий спектр математических методов. В их числе можно перечислить универсальный метод построения гамильтоновой структуры в терминах алгебро-геометрических конструкций прямой и обратной задачи, разработанный в трудах [KP1][9], [KP2][10]; метод гамильтоновой редукции, использованный в работах [Ar1][11],[Ar2][12]; а также метод, базирующийся на конструкции динамической R-матрицы [ABB][13],[BBB][14]. Основными задачами всех этих подходов является описание симплектической структуры, коммутативной алгебры интегралов, канонических переменных и т. д. Важность исследований в этой области нельзя переоценить. Помимо того, что гамильтонов формализм является хорошо структурированным языком в теории интегрируемых систем, он иногда является средством для решения системы, позволяет находить ее квантование.

Вышеупомянутый универсальный метод построения гамильтоновой структуры, изначально введенный для уравнений в частных производных, оказался весьма эффективным и при анализе конечномерных динамических систем. В работах [KP1],[KP2] была предложена симплектическая форма

$$\omega = \frac{1}{2} Res_{\infty} < \Psi^* \delta L \wedge \delta \Psi > dk,$$

на пространстве периодических операторов, зависящих от спектрального параметра. Она выражается в терминах функционалов на этом пространстве δL и $\delta \Psi$, где Ψ - собственная функция оператора, являющаяся также функционалом на этом пространстве. Как было показано, эта форма является замкнутой, невырожденной и дает полное гамиль-

[9] [KP1]I. M. Krichever, D. H. Phong . On the integrable geometry of soliton equations and N=2 supersymmetric gauge theories. J. Differential Geometry 45 (1997) 349-389.

[10] [KP2] I. M. Krichever, D. H. Phong . Symplectic forms in the theory of solitons, preprint hep-th/9708170

[11] [Ar1] G.E.Arutyunov, P.B.Medvedev, Geometric construction of the classical R-matrices for the elliptic and trigonometric Calogero-Moser systems. hep-th/9511070

[12] [Ar2] G.E.Arutyunov, S.A.Frolov, On Hamiltonian structure of the spin Ruijsenaars-Schneider model. hep-th/9702119 J.Phys.A31(1998) 4203-4216.

[13] [ABB] J. Avan, O. Babelon, E. Billey: "The Gevais-Neveu-Felder equation and the quantum Calogero-Moser systems". Comm. Math. Phys. 178 (1996) 281-299.

[14] [BBB] O. Babelon, D. Bernard, E. Billey: "A quasi-Hopf algebra interpretation of quantum 3-j and 6-j symbols and difference equations". Phys. Lett. B 375 (1996) 89-97.

тоново описание динамической системы на пространстве таких операторов. Универсальность данного выражения симплектической формы заключается еще и в том, что в конечномерном случае, в большинстве известных динамических систем, симплектическая структура может быть выражена таким же образом. Достоинством этого представления является то, что оно позволяет явно строить переменные "действие-угол", в терминах которых симплектическая форма приобретает вид

$$\omega = 2\sum_{s=1}^{g} dE(\gamma_s) \wedge \delta k(\gamma_s), \tag{1}$$

где γ_s - полюса собственной функции на кривой, где E - энергия, а k - квазиимпульс собственной функции. Отметим, что для интегрируемых систем связанных с гиперэллиптическими системами форма (1) была предложена в работе [VN][15]. Вышеупомянутая 1-форма, играющая важную роль в теории Зайберга-Виттена, тесно связана с переменными "действие-угол" и имеет следующее выражение $d\lambda = kdE$. Еще один подход к исследованию гамильтоновой структуры систем полюсной динамики имеет в своей основе метод гамильтоновой редукции и был удачно применен в построении целого класса интегрируемых систем, называемых системами Хитчина. Следующий подход к анализу гамильтоновой структуры и построению квантования системы связан с понятием так называемой универсальной R-матрицей. Понятие классической r-матрицы и следующее описание пуассоновой структуры

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \tag{2}$$

систем имеющих представление Лакса было введено в работах [Skl][16], [FT][17]. Однако, как было замечено в работе [B1][18], некоторое обобщение данного представления, является следствием инволютивности набора собственных чисел L-оператора интегрируемой конечномерной системы. А именно, было показано, что для любой такой системы по

[15][VN] S.P.Novikov, A.Veselov, On Poisson brackets compatible with algebraic geometry and Korteweg-de Vries dynamics on the space of finite-zone potentials, Soviet Math. Doklady 26 (1982) 357-362.

[16][Skl] Е. К. Склянин, О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера. Функ. ан. и его прил. 17(1983) №4, 34-48

[17][FT] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, Hamiltonian methods in the theory of solitons. (Springer series in Soviet Mathematics, Berlin, Germany) (1987) .

[18][B1] O. Babelon, C-M. Viallet, Hamiltonian structure and Lax equations. Phys. Lett. B 1990 V 237, N 3,4 p. 411-416.

крайней мере локально существует представление Лакса с операторами, принимающими значения в некоторой алгебре Ли, и существует представление пуассоновой структуры в форме (2). Кроме того, если для системы существуют глобальные переменные "действие-угол", то и данные представления выполняются глобально. Привлечение аппарата универсальной R-матрицы основывается на работе [ABB], в которой было замечено, что r-матрица для системы CM, удовлетворяет не классическому уравнению Янга-Бакстера, а его динамическому аналогу. Это и позволило обнаружить структуру квази-хопфовой алгебры в квантовой деформированной системе CM. Оказалось, что эта связь является довольно универсальной и, как было показано в [ABB], стартуя с любой полупростой квази-хопфовой алгебры, может быть построена квантовая интегрируемая система, то есть набор интегралов в инволюции. Основным при построении является тот факт, что понятие квази-хопфовой алгебры предполагает наличие универсальной R-матрицы, которая в квазикоассоциативном случае является универсальным решением динамического квантового уравнения Янга-Бакстера, иначе называемого уравнением Gervais-Neveu-Felder, представимого в виде

$$R_{12}(x)R_{13}(xq^{H_2})R_{23}(x) = R_{23}(xq^{H_1})R_{13}(x)R_{12}(xq^{H_3}).$$

Это решение при правильно подобранных параметрах представления квази-хопфовой алгебры и подходящих обертывающих преобразованиях в пределе по параметру q дает выражения для гамильтонианов системы, для классической r-матрицы, для L-оператора. То есть в структуре квази-хопфовой алгебры содержится информация об основных алгебро-геометрических объектах интегрируемой системы. В том числе, о представлении Лакса, о гамильтонианах, о пуассоновой структуре на L-алгебре. Фундаментальной задачей в этой области остается процедура построения квази-хопфовой структуры по данным спектральной кривой. Такие попытки уже предпринимались в работе [RE][19]. Целью настоящей работы является исследование примеров построения такой структуры, согласованной с имеющимися алгебро-геометрическими объектами.

1.2 Цель работы

- основной целью данной работы является апробация следующей

[19][RE] V. Rubtsov, B. Enriquez, Quasi-hopf algebras associated with sl_2 and complex curves. q-alg/9608005

программы исследования гамильтоновой структуры конечномерной системы, возникающей в рамках аглебро-геометрического подхода с дифференциальной линейной задачей совместно с деформированным случаем, на классическом и квантовом уровне:

  – построение симплектической структуры и гамильтониана для системы, связанной с дифференциальным уравнением, на основе универсального алгебро-геометрического метода построения гамильтоновой структуры;
  – по полученным данным, то есть по пуассоновой структуре и по классической динамической r-матрице, когда ее удается найти, строится квазилиева биалгебра;
  – ее квантование соответствует квантовой деформации системы, связанной уже с разностным уравнением во вспомогательной линейной задаче алгебро-геометрического подхода прямой и обратной задачи. Модифицированный квантовый метод обратной задачи дает описание гамильтоновой структуры.

- одной из частных целей работы является исследование гамильтоновой структуры системы Руйсенарса-Шнайдера. Приведенная программа на примере системы Калоджеро-Мозера позволила найти деформированный аналог квантовой спиновой системы Калоджеро-Мозера и описать его гамильтонову структуру. Эта система в бесспиновом случае оказалась изоморфной тригонометрической системе Руйсенарса-Шнайдера.

- исследование гамильтоновой структуры динамической системы, связанной с матричным уравнением Дэви- Стюартсона и матричным уравнением Дирака. Универсальный подход к построению гамильтоновой структуры позволил явно сконструировать выражения для гамильтониана и симплектической структуры. А также исследование R-матричной природы данной системы.

1.3 Научная новизна

Прежде всего, научная новизна данной работы заключается в попытке объединения двух вышеупомянутых подходов при исследовании гамильтоновой структуры интегрируемых систем теории солитонов. Кроме того, в этой работе впервые

- было получено явное гамильтоново описание динамической системы, связанной с полюсной динамикой матричного уравнения Дэви-Стюартсона;

- был применен метод универсальной R-матрицы при исследовании гамильтоновой структуры спиновой системы Калоджеро-Мозера и ее релятивистского аналога.

1.4 Практическая и научная ценность

Практическая ценность данной работы прежде всего заключается в построении новых примеров интегрируемых систем, и их гамильтонова описания. Данные примеры могут быть рассмотрены в рамках теории Зайберга-Виттена. Научная ценность данной работы состоит в апробации нового комплексного подхода к анализу гамильтоновой структуры динамической системы совместно с ее релятивистским аналогом.

1.5 Апробация диссертации

Материалы диссертации были неоднократно представлены в качестве докладов на семинаре по современным проблемам математической физики, проводимом в лаборатории математической физики в ИТЕФ, а именно в 1996 году на тему "Полюсные системы, связанные с решениями нелинейных уравнений", в 1999 году по темам: "Динамическая R-матрица и модель Руйсенарса", "Квантовый метод обратной задачи".

1.6 Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

1.7 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Список литературы содержит 42 наименований. Общий объем диссертации составляет 63 страницы.

2 Содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность исследования гамильтоновой структуры динамических систем теории солитонов, дается краткий обзор математических методов в этой области.

В первой части была построена и проинтегрирована система, связанная с полюсной динамикой решения матричного уравнения Дэви-Стюарсона с помощью аглебро-геометрического подхода прямой и обратной задачи, предложенного в работах [KB], [KZ]. Также был установлен изоморфизм между решениями интегрируемой системы и набором алгебро-геометрических данных. Уравнение Дэви-Стюартсона $\mathrm{DS2}^-$ представляется в виде

$$iu_t + u_{xx} - u_{yy} + u\phi = 0 \qquad \phi_{xx} + \phi_{yy} = 2(|u|^2_{xx} - |u|^2_{yy}). \tag{3}$$

В работе [Mal][20] было замечено, что данное уравнение обладает представлением Лакса $\dot{L} = [L, M]$ где

$$L = \begin{pmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} \qquad z = x + iy.$$

При рассмотрении многомерного обобщения вспомогательной линейной задачи, которая в данном случае представляется как задача нахождения собственной функции многомерного оператора Дирака:

$$\left(\partial_t + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}\right)\Psi = D_A\Psi = 0, \tag{4}$$

где A_1, A_2- $l{*}l$-матрицы, $d_1 = E, d_2 = -E$, где E- единичная $l{*}l$-матрица, система полюсной динамики в эллиптическом случае приобретает следующий вид:

$$\dot{a}_1^j - \frac{\lambda_j}{2}a_1^j + \sum_{l\neq j} a_1^l ({b_1^l}^+ a_2^j)\zeta(x_j - x_l) = 0, \tag{5}$$

$$\dot{a}_2^j + \frac{\lambda_j}{2}a_2^j + \sum_{l\neq j} a_2^l ({b_2^l}^+ a_1^j)\zeta(x_j - x_l) = 0; \tag{6}$$

[20][Mal] Т.М. Маланюк, Конечно-зонные решения уравнения Дэви-Стюартсона. Усп. Мат. Наук. V.46 N. 5 171-172.

$$\dot{b}_1^j - \frac{\lambda_j}{2} b_1^j + \sum_{l \neq j} b_1^l ({b_2^j}^+ a_1^l) \zeta(x_j - x_l) = 0, \qquad (7)$$

$$\dot{b}_2^j + \frac{\lambda_j}{2} b_2^j + \sum_{l \neq j} b_2^l ({b_1^j}^+ a_2^l) \zeta(x_j - x_l) = 0; \qquad (8)$$

$$\ddot{x}_j = \sum_{l \neq j} \left(({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) + ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l) \right) \zeta(x_j - x_l); \qquad (9)$$

$$\dot{\lambda}_j = \sum_{l \neq j} (({b_2^j}^+ a_1^l)({b_1^l}^+ a_2^j) - ({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j)) \wp(x_j - x_l), \qquad (10)$$

на фазовом пространстве с координатами $x_i, \lambda_i, a_1^i, a_2^i, {b_1^i}^+, {b_2^i}^+$, где $i = 1, ..., n$, x_i, λ_i - скаляры, а остальные величины являются векторами в l-мерном пространстве. Кроме того аналогичные построения производятся для непосредственного рационального предела системы и для его нетривиальной деформации. Во всех рассмотрениях будем ограничивать систему на инвариантное подмногообразие

$$\dot{x}_j^2 - 1 = ({b_1^j}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^j). \qquad (11)$$

Рассмотрим решение уравнения (4) с эллиптическим потенциалом специального вида

$$A_k = \sum_{j=1}^{n} a_k^j {b_k^j}^+ \zeta(x - x_j) \qquad k = 1, 2, \qquad (12)$$

представляемое в разложении по базису в форме

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n} S^j \Phi(z, x - x_j) \exp(k y_+ + \frac{1}{k} y_-), \qquad (13)$$

где $y_\pm = \frac{1}{2}(t \pm x)$. Кроме того будем рассматривать решение двойственного уравнения

$$\Psi^+ D_A = 0 \qquad (14)$$

представимое в форме

$$\Psi^+ = \sum_{j=1}^{n} {S^j}^+ \Phi(z, x_j - x) \exp(-k y_+ - \frac{1}{k} y_-). \qquad (15)$$

Предложение 1 *Уравнение (4) с эллиптическим потенциалом (12) имеет решение вида (13), а двойственное уравнение (14) имеет решение вида (15) тогда и только тогда, когда выполняется следующая система уравнений*

$$\dot{a}_1^j + \lambda_1^j a_1^j + \sum_{l\neq j} a_1^l ({b_1^l}^+ a_2^j)\zeta(x_j - x_l) = 0; \tag{16}$$

$$\dot{a}_2^j + \lambda_2^j a_2^j + \sum_{l\neq j} a_2^l ({b_2^l}^+ a_1^j)\zeta(x_j - x_l) = 0; \tag{17}$$

$$\dot{b}_1^j - \lambda_2^j b_1^j + \sum_{l\neq j} b_1^l ({b_2^j}^+ a_1^l)\zeta(x_j - x_l) = 0; \tag{18}$$

$$\dot{b}_2^j - \lambda_1^j b_2^j + \sum_{l\neq j} b_2^l ({b_1^j}^+ a_2^l)\zeta(x_j - x_l) = 0; \tag{19}$$

$$\ddot{x}_j = \sum_{l\neq j} \left(({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) + ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l) \right) \zeta(x_j - x_l); \tag{20}$$

$$\dot{\lambda}_1^j - \dot{\lambda}_2^j = \sum_{l\neq j} (({b_2^j}^+ a_1^l)({b_1^l}^+ a_2^j) - ({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j))\wp(x_j - x_l). \tag{21}$$

Заметим, что эта система приводится преобразованием

$$a_k^j \mapsto a_k^j e^{-\int \frac{\lambda_1^j + \lambda_2^j}{2}} \qquad b_k^j \mapsto b_k^j e^{\int \frac{\lambda_1^j + \lambda_2^j}{2}} \tag{22}$$

к виду (6), (8), (9), (10) где $\lambda_j = \lambda_2^j - \lambda_1^j$.

В процессе доказательства на коэффициенты разложения собственной функции возникает переопределенная система уравнений, приобретающая вид

$$(\partial_t + kI + L_1)C = 0; \tag{23}$$

$$(\partial_t + \frac{1}{k}I + L_2)C = 0, \tag{24}$$

где

$$(L_1)_{ij} = \delta_{ij}(-\lambda_1^i) + (1 - \delta_{ij})({b_1^i}^+ a_2^j)\Phi(z, x_j - x_i); \tag{25}$$

$$(L_2)_{ij} = \delta_{ij}(-\lambda_2^i) + (1 - \delta_{ij})({b_2^i}^+ a_1^j)\Phi(z, x_j - x_i); \tag{26}$$

$$S_k^j = c^j a_k^j, \qquad {S_k^j}^+ = {c^j}^+ b_{\bar{k}}^j \qquad \bar{k} = 3 - k. \tag{27}$$

Условие совместности этой системы представляется в виде

$$\partial_t(L_2 - L_1) + [L_1, L_2] = 0. \tag{28}$$

Именно оно предоставляет возможность алгебро-геометрического подхода при анализе данной системы. Уравнение спектральной кривой возникает из условия

$$det((k - \frac{1}{k})I + L) = 0, \tag{29}$$

где $L = L_1 - L_2$. Аналогичные рассуждения применимы в рациональном случае. Далее происходит выяснение аналитических свойств собственных функций и свойств спектральной кривой, в результате которых получены следующие предложения в эллиптическом случае:

Предложение 2 *Функция Ψ определена на кривой Γ рода g и является мероморфной вне $2l$ точек P_i, имеет $g-1$ полюсов $\gamma_1, ..., \gamma_{g-1}$, независящих от t, x. В окрестности $P_i, i = 1, ..., l$ она имеет вид*

$$\Psi_\alpha(x,t,P) = (\chi_0^{\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{\alpha i}(x,t) z^s) \exp(\lambda_i(x+t)) \Psi_1(0,0,P)$$

при $i = l+1, ..., 2l$

$$\Psi_\alpha(x,t,P) = (\chi_0^{\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{\alpha i}(x,t) z^s) \exp(\lambda_i(x-t)) \Psi_1(0,0,P)$$

где $\lambda_i(z) = (1-\nu_i)z^{-1} - h_i(z))$ где h_i регулярна в окрестности $z = 0$ и $\chi_0^{\alpha i}$ - константа.

Предложение 3 *Решение двойственного уравнения Ψ^+ является функцией на кривой Γ, мероморфной вне $P_i, i = 1, ..., 2l$. Она имеет $g-1$ корней $\gamma_1^+, ..., \gamma_{g-1}^+$, не зависящих от t, x. В окрестности $P_i, i = 1, ..., l$ она имеет вид*

$$\Psi_\alpha^+(x,t,P) = (\chi_0^{+,\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{+,\alpha i}(x,t) z^s) \exp(-\lambda_i(x+t)) \Psi_1^+(0,0,P),$$

при $i = l+1, ..., 2l$

$$\Psi_\alpha^+(x,t,P) = (\chi_0^{+,\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{+,\alpha i}(x,t) z^s) \exp(-\lambda_i(x-t)) \Psi_1^+(0,0,P),$$

где $\chi_0^{+,\alpha i}$- константа.

Аналогичные утверждения, с учетом специфических особенностей алгебро-геометрических построений в рациональном случае, доказаны в рациональном специальном и общем случаях.

Эти данные, как показано в обратной задаче позволяют полностью восстановить собственные функции для вспомогательной линейной задачи и найти решение в терминах θ-функций. Автоматически доказывается, что построенная функция будет решением уравнения

$$(\partial_t - \sigma\partial_x + A)\Psi = 0,$$

где $A = -(f^1 - \sigma f^1 \sigma)$. Следовательно, выражения

$$\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t + Z_0) = 0,$$

$$\tilde{a}_{i,\alpha}(t) = Q_i^{-1}(t)\frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t + Z_\alpha)}{\theta(Z_\alpha)\theta(S_\alpha)},$$

$$\tilde{b}_i^{\alpha}(t) = Q_i^{-1}(t)\frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha^+)}{\theta(Z_\alpha^+)\theta(S_\alpha^+)},$$

$$Q_i^2(t) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2l}\frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha)\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha^+)}{\theta(Z_\alpha)\theta(Z_\alpha^+)\theta(S_\alpha)\theta(S_\alpha^+)}$$

$$a_{i,\alpha}^1 = 2\tilde{a}_{i,\alpha}, a_{i,\alpha}^2 = 2\tilde{a}_{i,\alpha+l}$$

$$b_i^{\alpha 1} = \tilde{b}_i^{\alpha+l}, b_i^{\alpha 2} = \tilde{b}_i^{\alpha}$$

дают решение системы (6),...,(10).

Решение системы в рациональном случае будет представляться в следующем виде:

$x_i(t)$ - корни полинома по x $det\Theta$, где Θ- матрица, состоящая из элементов

$$\theta_{ii} = x - t + g_i^{(1)} + \sigma_i, \theta_{ij} = g_j(Q_i);$$

a^i, b^i находятся с точностью до пропорциональности

$$a_\alpha^i = det\Theta_\alpha^{(i)}, \qquad b^{ij} = \left(\frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k^{(i)} g_k^{1j}}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}\right).$$

где матрица $\Theta_\alpha^{(i)}(t)$ получается из Θ заменой первого столбца на столбец $h_\alpha(Q_j)$ и подстановкой $x = x_i(t)$.

Данные выражения предоставляют явное решения систем. Оказывается, что последние являются гамильтоновыми. Далее в работе производится построение гамильтонова формализма для этих систем на основе универсального метода предложенного в работах [KP1],[KP2]. Симплектическая форма, как и в работах [Kr3][21], [Bab]

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} res_{P_i}(< C^*(\delta L + \delta\kappa) \wedge \delta C >)dz, \tag{30}$$

где C^* - собственный вектор матрицы L, удовлетворяющий нормировке $< C^* C >= 1$. Как и в работе [Kr3] доказывается следующее утверждение, играющее ключевую роль в конструкции переменных "действие-угол".

Предложение 4 *Симплектическая форма ω равна*

$$\omega = \sum_s \delta z(\gamma_s) \wedge \delta\kappa(\gamma_s). \tag{31}$$

Благодаря следующему утверждению симплектическая форма выражается в терминах стандартных динамических переменных.

Предложение 5 *Симплектическая форма ω может быть представлена в виде*

$$\omega = \sum_{i=1}^{N}(\delta\lambda_i \wedge \delta x_i + \delta B_i^{q\,1} \wedge \delta A_{iq}^2 - \delta B_i^{q\,2} \wedge \delta A_{iq}^1). \tag{32}$$

Подстановка векторного поля на пространстве L-операторов, задаваемого уравнением Лакса, в симплектическую форму

$$i_{\partial_t}\omega(X) = \omega(X, \partial_t)$$

влечет следующее

Предложение 6 *Система уравнений (6)... (10) является гамильтоновой по отношению к симплектической форме ω и с гамильтонианом*

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i({B_2^i}^+ A_1^i + {B_1^i}^+ A_2^i) + \sum_{i \neq j}({B_1^i}^+ A_2^j)({B_2^i}^+ A_1^i)\zeta(x_i - x_j). \tag{33}$$

[21][Kr3] I.Krichever, Elliptic solutions to difference non-linear equations and Bethe ansatz equations. solv-int/9804016

Системы в рациональном специальном и общем случаях также являются гамильтоновыми по отношению к той же симплектической форме с гамильтонианами соответственно

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i ({B_2^i}^+ A_1^i + {B_1^i}^+ A_2^i) + \sum_{i\neq j} \frac{({B_1^i}^+ A_2^j)({B_2^i}^+ A_1^i)}{x_i - x_j}. \tag{34}$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i ({B_2^i}^+ A_1^i + {B_1^i}^+ A_2^i) + \sum_{i\neq j} ({B_1^i}^+ A_2^j)({B_2^i}^+ A_1^i)(\frac{1}{x_i - x_j} - \frac{1}{\eta}) \tag{35}$$

Третий раздел работы посвящен основаниям R-матричного формализма а также его применению в случае спиновой системы Калоджеро-Мозера. Основным аргументом при использовании понятия R-матрицы является обнаруженное представление пуассоновой структуры на матричных элементах L-оператора в так называемой r-матричной форме:

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]; \tag{36}$$

В работе [ABB] было замечено, что r-матрица для спиновой системы CM удовлетворяет не классическому уравнению Янга-Бакстера, а его динамическому аналогу

$$-\{L_1, r_{23}\} + \{L_2, r_{13}\} - \{L_3, r_{12}\} + [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

Именно это позволяет рассматривать L-алгебру в этом случае как квазиклассический предел алгебры, порожденной динамическим уравнением Янга-Бакстера (Gervais-Neveu-Felder equation [GNF][22]), которое в форме Gervais-Neveu представляется в виде:

$$R_{12}(x)R_{13}(xq^{H_2})R_{23}(x) = R_{23}(xq^{H_1})R_{13}(x)R_{12}(xq^{H_3}), \tag{37}$$

Известна также L-операторная форма этого уравнения:

$$R_{12}(xq^{-H_3/2})L_{13}(x)L_{23}(x) = L_{23}(x)L_{13}(x)R_{12}(xq^{H_3/2}). \tag{38}$$

Именно она предоставляет способ конструирования квантовых интегрируемых систем, являющийся модифицированным квантовым методом обратной задачи для динамического случая. Основной механизм этого метода заключается в утверждении работы [ABB]:

[22][Ger] J.L. Gervais, A. Neveu, Novel triangle relation and absence of tachyons in Liouville string theory. Nucl. Phys. B 238 (1984) 125.

Предложение 7 *Пусть g-простая алгебра Ли, h-ее картановская подалгебра, $V^{(1)}, ..., V^{(n)}$ конечномерные g-модули, $R_{ij}(\lambda, x)$-мероморфная по спектральному параметру λ функция со значениями в $End(V^{(i)} \otimes V^{(j)})$, удовлетворяющая уравнению (37), а оператор L_{ij}, определенный аналогичным образом, но удовлетворяющий уравнению (38), и кроме того, R_{ij} удовлетворяет условию*

$$[(H_i + H_j)\partial_x, R_{ij}] = 0,$$

тогда алгебра операторов

$$I_n = Tr_{1...n}[L_1(x)...L_n(x)\hat{R}_{12}(xq^{h^{(3,n)}})...\hat{R}_{n-1,n}(x)] \tag{39}$$

где $\hat{R} = PR$, P - оператор перестановки сомножителей в тензорном произведении, $h^{(k,l)} = \sum_{i=k}^{l} h^{(i)}$; сохраняет подпространство нулевого веса в представлении, и будучи ограниченной на это пространство, является коммутативной.

Для получения решений уравнений (38), (37) предлагается рассмотреть квази-хопфову алгебру. Универсальная R-матрица и будет решением уравнения GNF. Ее конструкция основана на квази-хопфовой деформации универсальной матрицы Дринфельда в виде

$$R(x) = F_{21}^{-1}(x)R_{Dr}F_{12}(x),$$

где для определении элемента $F(x)$ используется работа [AB][23], в которой было показано, что квази-хопфов сдвиг удовлетворяет линейному уравнению

$$\hat{R}_{Dr}F_{12}(x) = B_2(x)F_{12}(x)B_2(x)^{-1}, \tag{40}$$

где $B(x) = q^{\sum_{j=1}^{n-1} h_j h^j} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{-h^j}$. Решение уравнения (38) можно строить в виде

$$L = q^{-(H_1+H_2/2)p} R q^{H_2 p/2}, \tag{41}$$

где $p = x\frac{\partial}{\partial x}$. Эта процедура была применена в случае $U_q(sl_n)$. Полученное выражение было рассмотрено в случае матричного n-мерного представления по первому множителю и представления со старшим весом

[23][AB] D. Arnaudon, E. Buffenoir: "Universal solution of quantum dynamical Yang-Baxter equation". q-alg/9712037. Lett. Math. Phys. 44(1998) 201- 214.

(nl,0,...,0) во втором сомножителе. Эти построения привели к гамильтониану

$$\hat{H}_l = \sum_i e^{\frac{\partial}{\partial}t_i} \prod_{k\neq i} \frac{q^{t_i-t_k+l} - q^{-t_i+t_k-l}}{q^{t_i-t_k} - q^{-t_i+t_k}}.$$

Этот гамильтониан является так называемым высшим тригонометрическим гамильтонианом системы Руйсенарса-Шнайдера. Подобные рассмотрения для трехчастичной системы в случае произвольного представления по второму пространству приводят к гамильтониану

$$H = I_1 = q^{2p_1} + q^{2p_2}(1 - e_{12}f_{12}\Phi(x_1)$$
$$+q^{2p_3}(1 - e_{23}f_{23}\Phi(x_2) - (e_{13} - \frac{(q-q^{-1})}{q^{x_2}-1}e_{23}e_{12})(f_{13} + \frac{(q-q^{-1})}{q^{x_2+2}-1}f_{12}f_{23}))$$
$$\times\Phi(x_3). \tag{42}$$

где $\Phi(x) = \frac{(q-q^{-1})^2 q^{x+1}}{(q^x-1)(q^{x+2}-1)}$. Рассмотрим предел при $q \mapsto 1$ фиксируя при этом новые переменные $e^{t_1-t_2} = q^{x_1/2}$, $e^{t_2-t_3} = q^{x_2/2}$. И разложим полученное выражение по параметру $\lambda = \ln(q)$. Получим:

$$H = 1 + \lambda(p_1 + p_2 + p_3)$$
$$+\lambda^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{e_{12}f_{12}}{\sinh(t_1-t_2)} + \frac{e_{23}f_{23}}{\sinh(t_2-t_3)} + \frac{e_{13}f_{13}}{\sinh(t_1-t_3)}) + \ldots$$

Выражение, стоящее при λ^2 есть не что иное, как квантовый или классический гамильтониан спиновой системы CM. Таким образом, была построена деформация спиновой системы Калоджеро-Мозера, которая в бесспиновом вырождении совпадает с системой Руйсенарса-Шнайдера. Для этих систем было получено гамильтоново описание, то есть Пуассонова структура и набор коммутирующих величин. В четвертой части диссертации исследуется L-операторная алгебра в классическом случае для системы проинтегрированной в части 2. В частности для операторов $L(z)$ было найдено r-матричное представление Пуассоновой структуры на матричных элементах

$$\{L^{(1)}(z), L^{(2)}(w)\} = [r_{12}(z-w), L^{(1)}(z)] - [r_{21}(w-z), L^{(2)}(w)] \tag{43}$$

с той же r-матрицей, что и в случае спиновой системы Калоджеро-Мозера. Однако, в данном случае, оператор $L(z)$ не является непосредственным классическим пределом универсальной R-матрицы. В частности, было показано, что гамильтониан выражается в терминах другого оператора

$$\tilde{L}(z) = L_1(z) - L_2(-z) \tag{44}$$

где $L_k(z)$ из (25,26). А именно, было показано, что гамильтониан системы в рациональном случае равен

$$H = Res_0 Tr(\tilde{L}(z)^2). \tag{45}$$

Данное наблюдение позволило установить связь построенной системы со спиновой системой Калоджеро-Мозера. Было обнаружено, что спиновый гамильтониан Калоджеро-Мозера для фазового пространства $(x_i, \lambda_i, f^1_{ij} - f^2_{ij})$ является интегралом движения построенной системы. Этот факт свидетельствует о вложении иерархии, связанной с системой Калоджеро-Мозера, в иерархию, связанную с построенной системой.

3 Основные результаты диссертации

К основным результатам данной работы можно отнести следующие:

- были получены решения матричного уравнения Дэви-Стюартсона, динамика полюсов которых описывается конечномерной спиновой системой 6,...,10 и ее рациональными аналогами;
- используя универсальный подход к описанию гамильтоновой структуры для этих систем были явно построены симплектические формы и гамильтонианы;
- на основе универсального R-матричного подхода была построена деформация квантовой спиновой системы Калоджеро-Мозера, которая в бесспиновом вырождении совпадает с системой Руйсенарса-Шнайдера.

В заключении мне бы хотелось поблагодарить моего научного руководителя доктора физико-математических наук профессора Сабира Меджидовича Гусейн-Заде за всестороннюю поддержку при работе над диссертацией. Хотелось бы выразить глубокую благодарность доктору физико-математических наук Игорю Моисеевичу Кричеверу за ценные обсуждения в ходе этой работе, а также за то, что он познакомил меня с богатейшим и красивейшим аппаратом алгебро-геометрических конструкций в теории солитонов. Я также признателен Оливье Бабелону за внимание и поддержку в части исследовании R-матричной структуры.

Хотелось бы также поблагодарить коллектив лаборатории математической физики в ИТЕФ за плодотворную обстановку и стимулирующее общение, и лично к. ф.-м. н. А. В. Червова, д. ф.-м. н. А. В. Забродина, д. ф.-м. н. С. М. Хорошкина, д. ф.-м. н. А. С. Горского.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Finite gap potentials of the Dirac equation and the related dynamical systems. Journal of Mathematical Physics V6 1999 №4 pp. 471-492.

[2] Универсальный R-матричный формализм в случае спиновой системы Калоджеро-Мозера и ее релятивистского аналога. Рукопись депонирована в ВИНИТИ РАН 24.01.2000 № 132-В00.