Математический институт В.А. Стеклова
Российской академии наук

УДК 514.84, 512.77, 517.938 На правах рукописи

Талалаев
Дмитрий Валерьевич

# Квантовый метод спектральной кривой

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

по специальности геометрия и топология (01.01.04)

Москва 2010 г.

Работа выполнена на кафедре Высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ).

Официальные оппоненты:

- Доктор физико-математических наук, профессор А.М. Вершик
- Доктор физико-математических наук, профессор И.М. Кричевер
- Доктор физико-математических наук, профессор О.К. Шейнман

Ведущая организация:

Математический институт им. С.Л. Соболева СО РАН

Защита диссертации состоится 3 июня 2010 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте В.А. Стеклова по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН.

Автореферат разослан 29 апреля 2010 г.

Ученый секретарь совета Д 002.022.03,
доктор физико-математических наук Н.П. Долбилин

# 1 Общая характеристика работы

## 1.1 Актуальность темы

Главные результаты и основная идея работы имеют непосредственное отношение к двум важнейшим направлениям развития геометрии и топологии 20-го века, связанным с приложениями теории интегрируемых систем и приложениями квантовой физики. Наиболее ярким результатом первого направления является решение проблемы Шоттки [1], основанное на гипотезе С.П. Новикова. Задача характеризации Якобианов среди прочих главно-поляризованных абелевых многообразий была решена в терминах нелинейных уравнений: соответствующая $\theta$-функция удовлетворяет уравнению КП тогда и только тогда, когда абелево многообразие является Якобианом некоторой кривой. Развитием этой деятельности явилось доказательство гипотезы Вельтерса [2], характеризующей Якобианы кривых в терминах тройных секущих соответствующих многообразий Куммера. Второй существенный пласт результатов связан с приложениями квантовой теории поля в задаче построения топологических инвариантов, в том числе в маломерной топологии. Теория инвариантов Джонса-Виттена, или более общо - квантовая топологическая теория поля, обобщает традиционные инварианты узлов: полином Александера и полином Джонса. Собственно инварианты строятся как корелляционные функции некоторой квантовой теории поля [3]. Также с идеями квантовой теории поля связана теория инвариантов Дональдсона [4] и ее развитие Зайбергом и Виттеном. Данный подход оказался исключительно эффективным и привел к таким важным результатам как доказательство гипотезы Тома о степени гладкого вложения кривой в $\mathbb{C}P^2$ [5]. Данное направление развития математики поднимает проблему нахождения эффективных методов решения квантовых задач.

Настоящая работа посвящена построению квантовых аналогов алгебро-геометрических методов, применимых при анализе и решении классических интегрируемых систем. Эти методы основаны на конструкции спектральной кривой и соответствующего отображения Абеля. Кроме приложений в топологии, явное описание решений квантовых интегрируемых систем непосредственно связано с такими геометрическими задачами, как вычисление когомологий $\theta$-дивизора абелева многообразия [6], вычисление когомологий и характеристических классов пространств модулей стабильных голоморфных расслоений [7, 8], а также пространств модулей флагов голоморфных расслоений, в случае базы $\mathbb{C}P^1$ называемых пространствами Ломона [9].

## 1.2 Степень разработанности темы

В работе строится квантовый аналог метода спектральной кривой для рациональной и эллиптической системы Годена [10]. В классификации Хитчина эти случае отвечают роду 0 и 1 базовой кривой. Главная задача работы, родственная нахождению топологических инвариантов квантово-полевого типа, а также тесно связанная с исследованием геометрических свойств разнообразных пространств модулей, состоит в описании спектров рассматриваемых квантовых интегрируемых систем. Полученные результаты, в том числе методологический подход построения квантовой спектральной кривой, позволили описать явно дискретную группу симметрии спектра рассматриваемых интегрируемых систем. Квантование системы Хитчина на кривой произвольного рода и решение соответствующей квантовой задачи потребует использования иной техники, однако, найденная в рассматриваемых случаях геометрическая аналогия может оказаться эффективной и в ситуации общего рода.

## 1.3 Цель и задачи исследования

Основной целью работы является построение квантового аналога метода спектральной кривой, в том числе эффективных квантовых аналогов методов построения и решения интегрируемых систем. Частными задачами являются

- Построение производящей функции коммутативной подалгебры квантовых гамильтонианов Годена в рациональном и эллиптическом случае в виде обобщения детерминантной формулы характеристического полинома оператора Лакса - квантового характеристического полинома.

- Описание спектров квантовых систем рассматриваемого типа в виде условия на монодромию некоторых Фуксовых уравнений.

- Построение семейства симметрий спектров квантовых систем рассматриваемого типа в виде перестроек Гекке на пространстве мероморфных связностей.

- Построение эффективной процедуры описания центра универсальной обертывающей аффинной алгебры Ли $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ на критическом уровне.

- Исследование алгебраических и геометрических свойств квантового характеристического полинома, в том числе нахождение аналога тождества Гамильтона-Кэли для квантового оператора Лакса.

- Построение формализма системы Хитчина для кривых с особенностями типа двойная схемная точка.

## 1.4 Объект и предмет исследования

Основным объектом исследования являются интегрируемые системы Годена рационального и эллиптического типов. Предметом исследования являются методы квантования рассматриваемых систем, а также методы решения квантовых интегрируемых систем, обобщающие классический метод спектральной кривой. Кроме этого, исследуются некоторые приложения данных методов.

## 1.5 Теоретическая основа и методологическая база

В основе методологической базы работы лежит классический метод спектральной кривой, квантовый метод обратной задачи, теория квантовых групп, изомонодромных деформаций, а также методы, связанные с программой Ленглендса и деформационным квантованием. Кроме этого используются некоторые методы математической физики, в частности анзац Бете.

Классический метод спектральной кривой заключается в интерпретации фазового пространства интегрируемых систем в виде расслоения Якобианов. Ключевыми результатами в формировании этой концепции считаются: работа К. Якоби [11], работы 70-х годов прошлого века школы С.П. Новикова [12, 13], а также работа Н. Хитчина [14]. Алгебраическая составляющая метода спектральной кривой связана с методом обратной задачи, открытым в 60-х годах прошлого века в работе [15]. Оказалось, что исключительно эффективным с точки зрения решения динамических систем является так называемое изоспектральное представление динамики, или представление Лакса [16]. Именно представление Лакса позволяет ввести понятие спектральной кривой и использовать методы алгебраической геометрии для построения явных решений [17], решать динамические системы в алгебраических терминах методом проекции [18] или с помощью более общей конструкции грассманиана Сато и $\tau$-функции [19].

Основной метод теории квантовых интегрируемых систем, называемый квантовым методом обратной задачи (КМОЗ), был создан в 70-х годах 20-го века школой Л. Д. Фаддеева [20]. Во многом данный метод полагается на классический метод обратной задачи, в особенности в части гамильтонового описания. Он обобщает некоторые конструкции интегрируемых систем, в частности коммутативных подалгебр. Данный метод был в значительной степени обобщен теорией квантовых групп, введенной Дринфельдом [21]. Концепция алгебр Хопфа оказалась исключительно эффективной в задаче обобщения конструкции инвариантных полиномов на группе. Теория квантовых групп существенно используется в работе для построения квантования систем Годена. В работе также используется более общая конструкция АКС [22], которая, в частности, оказывается ключевой при описании спектра центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ на критическом уровне.

## 1.6 Научная новизна диссертации

Новизна главным образом связана с конструкцией центрального объекта работы - квантовой спектральной кривой модели. Развитие теории квантовых интегрируемых систем в рамках КМОЗ не позволило существенно продвинуться в задаче описания решений квантовых интегрируемых систем на конечном масштабе. Благодаря введению понятия квантовой спектральной кривой в работе строится семейство геометрических симметрий множества решений квантовой задачи. Для построения этих симметрий используется традиционный метод анзаца Бете в альтернативной формулировке, а именно в терминах семейства специальных Фуксовых операторов с конечной монодромией. Такое описание квантовой задачи позволяет реализовать симметрии в терминах известных в теории изомонодромных деформаций преобразований Шлезингера [23] и применять известные решения уравнений изомонодромных деформаций, типа уравнений Пенлеве, для описания вариаций спектров квантовых систем при изменении параметров. В определенном смысле построенное семейство симметрий представляет собой аналог отображения Абеля, являющегося универсальным решением в теории классических интегрируемых систем.

Следует отметить, что постановка задачи нахождения аналога метода спектральной кривой в квантовом случае является новой, КМОЗ ограничивался обобщениями алгебраической теории интегрируемых систем, в то время как квантовый метод спектральной кривой обобщает некоторые алгеброгеометрические методы теории интегрируемых систем.

Новыми результатами являются также: явное построение центра универсальной обертывающей аффинной алгебры Ли $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ на критическом уровне, и, как следствие, более эффективное описание геометрического соответствия Ленглендса над $\mathbb{C}$ на формальном диске с проколом. Кроме этого, получено обобщение тождества Гамильтона-Кэли для квантового оператора Лакса рациональной системы Годена.

## 1.7 Практическая значимость работы

Исследования квантового характеристического полинома для моделей типа Годена позволили систематизировать и существенно повысить эффективность методов решения квантовых интегрируемых систем. Построенные дискретные симметрии спектров рассматриваемых систем выполняют роль обобщенных угловых операторов, то есть позволяют строить семейства собственных векторов модели. Практическая значимость результатов в геометрии и топологии обусловлена возможностью обобщения данной техники на полевые модели, возникающие в топологических квантовых теориях поля, и в теориях поля, используемых при построении инвариантов Дональдсона и Зайберга-Виттена. Кроме этого, полученные результаты в проблеме решения квантовых систем имеют непосредственные приложения в задаче описания колец когомологий пространств модулей голоморфных расслоений, пространств Ломона, а также аффинных Якобианов.

В работе были выявлены многочисленные связи и приложения данного подхода в других областях современной математики и математической физики. В теории представлений полупростых алгебр Ли роль полученных результатов заключается в возможности эффективизации таких классических задач, как формула кратностей. Приложения такого типа возникают благодаря наличию специальных пределов системы Годена, образующие коммутативной подалгебры для которых интерпретируются как центральные элементы некоторых подалгебр в $U(\mathfrak{sl}_n)^{\otimes N}$ [24]. К этой же области приложений относится результат явного описания центра универсальной обертывающей аффинной алгебры на критическом уровне для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. Также следует отметить важность метода квантовой спектральной кривой в геометрическом обобщении соответствия Ленглендса над $\mathbb{C}$ [25], в математической физике и теории конденсированных сред.

## 1.8 Апробация работы

Результаты работы многократно использовались в качестве материалов для докладов на международных конференциях и школах:

- Конференция „Quantum integrable systems“, Прага, июнь 2005. Доклад „Квантование системы Годена“.

- Конференция „Classical and quantum integrable systems“, Дубна, январь 2008. Доклад „Анзац Бете и изомонодромные преобразования“.

- Конференция стипендиатов конкурса Делиня и фонда Династия, Москва, январь 2009. Доклад „Алгебро-геометрическое квантование интегрируемых систем“.

- Конференция „Integrable systems and quantum symmetries“, Прага, июнь 2009. Доклад „Квантовая эллиптическая система Годена“.

- Школа и конференция „Geometry and quantization“, Люксембург, сентябрь 2009. Курс лекций „Квантовые интегрируемые системы и программа Ленглендса“.

- Конференция „Representation theory and quantization“, Цюрих, январь 2010. Доклад „Bethe ansatz and isomonodromic deformations“.

На основе результатов, представленных в работе, были сделаны доклады на Московском математическом обществе в 2007 году, в разные годы на семинарах в ИТЭФ, МГУ, НМУ, МИАН, Paris 6, LPTHE (Париж, Франция), LAPTH (Анси, Франция), LAREMA (Анжэ, Франция). На основе программы алгебро-геометрического квантования были организованы некоторые коллективные научные проекты, одним из которых является действующий грант РФФИ 09-01-00239-а „Квантовые интегрируемые системы и геометрическое соответствие Ленглендса“.

### 1.9 Структура работы и личный вклад соискателя

Раздел 1 посвящен исследованию обобщения конструкции Хитчина на случай кривых с особенностями, важность которого в рамках данной работы связана с определением геометрического контекста рациональной и эллиптической систем Годена. Материал основан на совместных работах с А.В. Червовым [S3], [S4]. В разделе 2 описывается задача квантования интегрируемой системы, строится квантовый характеристический полином и устанавливается связь с традиционными в теории квантовых интегрируемых систем методами их решения. Основной результат получен в работе соискателя [S5]. Анализ традиционного метода анзаца Бете частично основан на совместной работе с О. Бабелоном [S7]. Эллиптическая версия в классической ситуации исследована в работе соискателя [S2], квантование получено в совместной работе с В.Н. Рубцовым и А.В. Силантьевым [S9]. В работе [S1] исследуются основополагающие в теории квантовых интегрируемых систем $\boldsymbol{R}$-матричные структуры. В разделе 3 строится дискретное семейство симметрий на спектре квантовой системы Годена, позволяющее рассматривать рекурсионные соотношения на спектр. Материал основан на работе соискателя [S8]. В разделе 4 описываются некоторые приложения метода квантовой спектральной кривой: конструкция центра универсальной обертывающей алгебры аффинной алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ на критическом уровне и ее роль в геометрическом соответствии Ленглендса, а также некоторые результаты некоммутативной геометрии, связанные со свойствами квантового оператора Лакса для системы Годена. Данные результаты получены в совместной работе с А.В. Червовым [S6].

## 2 Основные положения работы

### 2.1 Основные положения раздела 1

Данный раздел является вводным, он посвящен изложению классического метода спектральной кривой, а также разработке формализма систем типа

Хитчина, отвечающих классу кривых с особенностями, называемыми "двойная схемная точка". Основополагающим в современной теории классических интегрируемых систем оказалось представление типа Лакса [16]:

$$\dot{L}(z) = [M(z), L(z)], \tag{2.1}$$

здесь $M(z), L(z)$ - некоторые матричнозначные функции формальной переменной $z$, матричные элементы которых являются функциями на фазовом пространстве системы. Спектральная кривая модели в этом случае определяется уравнением

$$det(L(z) - \lambda) = 0 \tag{2.2}$$

и является инвариантом динамики. Оказывается, что уравнения, имеющие представление Лакса, допускают универсальное решение с помощью вспомогательной линейной задачи

$$L(z)\Psi(z) = \lambda\Psi(z). \tag{2.3}$$

Данное уравнение определяет линейное расслоения на спектральной кривой. Решение динамической системы, а именно переменные типа „угол“, описывается в терминах линейных координат на пространстве модулей линейных расслоений на кривой, отождествляемом с ее Якобианом. Конструкция Хитчина [14] позволила интерпретировать фазовое пространство широкого класса интегрируемых систем в терминах пространств модулей расслоений на некоторой алгебраической кривой. В разделе 1 строится аналог конструкции Хитчина для кривых с особенностями. В том числе определяется система Годена, как система Хитчина на рациональной и эллиптической кривых с отмеченными точками; рассматривается классический метод спектральной кривой для этой системы и вводится аппарат разделенных переменных, существенным образом используемый в дальнейшем в разделе, посвященном квантованию.

Опишем более подробно класс особенностей, для которых строится обобщение конструкции Хитчина.

Класс особенностей. Рассмотрим кривую $\Sigma^{proj}$, получающуюся склейкой 2-х произвольных подсхем $A(\varepsilon), B(\varepsilon)$ на $\mathbb{C}P^1$ (т.е. кривую, получающуюся добавлением одной гладкой точки $\infty$ к аффинной кривой $\Sigma^{aff} = Spec\{f \in \mathbb{C}[z] : f(A(\varepsilon)) = f(B(\varepsilon))\}$, где $\varepsilon^N = 0$ ). Рассматриваются примеры:

- нильпотентные элементы: $A(\varepsilon) = \varepsilon, B(\varepsilon) = 0$;

- корни из единицы: $A(\varepsilon) = \varepsilon, B(\varepsilon) = \alpha\varepsilon$, где $\alpha^k = 1$;

- геометрически отличные точки:

$$A(\varepsilon)=a_0+a_1\varepsilon+...+a_{N-1}\varepsilon^{N-1},\ \ B(\varepsilon)=b_0+b_1\varepsilon+...+b_{N-1}\varepsilon^{N-1},$$

  так что $a_0\neq b_0$.

Расслоения. Описание пространства модулей голоморфных расслоений для особых кривых рассматриваемого класса производится на алгебраическом языке в терминах модулей над аффинной кривой. Модуль $M_\Lambda$ ранга $n$ в данном случае определяется подпространством в тривиальном модуле векторнозначных функций $s(z)$ на $\mathbb{C}$ элементов, удовлетворяющих условию:

$$s(A(\varepsilon))=\Lambda(\varepsilon)s(B(\varepsilon)),$$

где $\Lambda(\varepsilon)=\sum_{i=0,...,N-1}\Lambda_i\varepsilon^i$ матричнозначный полином. Условие проективности данного модуля $M_\Lambda$ заключается в следующем:

- нильпотентный случай: $\Lambda_0=Id$;
- корень из единицы: $\Lambda(\varepsilon)\Lambda(\alpha\varepsilon)...\Lambda(\alpha^{k-1}\varepsilon)=Id$;
- геометрически отличные точки: $\Lambda_0$ обратим.

Открытая клетка пространства модулей голоморфных расслоений на $\Sigma^{proj}$ получается при рассмотрении фактор-пространства по отношению к действию сопряжением $GL_n$ на пространстве $\Lambda(\varepsilon)$ общего положения.

Дуализирующий пучок и глобальные сечения. Глобальные сечения дуализирующего пучка на $\Sigma^{proj}$ могут быть описаны в терминах мероморфных дифференциалов на $\mathbb{C}$ вида

$$\omega_\phi=Res_\varepsilon\left(\frac{\phi(\varepsilon)dz}{z-A(\varepsilon)}-\frac{\phi(\varepsilon)dz}{z-B(\varepsilon)}\right) \tag{2.4}$$

при произвольном $\phi(\varepsilon)=\sum_{i=0,...,N-1}\phi_i\frac{1}{\varepsilon^{i+1}}$.

Эндоморфизмы модуля $M_\Lambda$ описываются матричнозначными полиномиальными функциями $\Phi(z)$, удовлетворяющими следующему условию

$$\Phi(A(\varepsilon))=\Lambda(\varepsilon)\Phi(B(\varepsilon))\Lambda(\varepsilon)^{-1}.$$

Глобальные сечения $H^0(End(M_\Lambda)\otimes\mathscr{K})$ описываются выражениями:

$$\Phi(z)=Res_\varepsilon\left(\frac{\Phi(\varepsilon)}{z-A(\varepsilon)}dz-\frac{\Lambda(\varepsilon)^{-1}\Phi(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon)}{z-B(\varepsilon)}dz\right), \tag{2.5}$$

где

$$Res_\varepsilon\Big(\Lambda(\varepsilon)\Phi(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon)^{-1}-\Phi(\varepsilon)\Big)=0$$

и $\Phi(\varepsilon)=\sum_i\Phi_i\frac{1}{\varepsilon^{i+1}}$ - матричнозначная функция.

Симплектическая форма на кокасательном расслоении к пространству модулей расслоений может быть описана в терминах гамильтоновой редукции относительно действия сопряжением $GL_n$ по симплектической форме на пространстве пар $\Lambda(\varepsilon),\Phi(\varepsilon)$ заданной выражением:

$$Res_{\varepsilon}Trd(\Lambda(\varepsilon)^{-1}\Phi(\varepsilon))\wedge d\Lambda(\varepsilon). \tag{2.6}$$

Интегрируемость. Система Хитчина на кривой $\Sigma^{proj}$ описывается как система на фазовом пространстве, реализуемом в виде гамильтонового фактора пространства пар $\Lambda(\varepsilon),\Phi(\varepsilon)$. Симплектическая форма задается формулой 2.6. Гамильтонианы задаются коэффициентами разложения функций $Tr(\Phi(z)^k)$ по некоторому базису голоморфных $k$-дифференциалов (то есть сечений $H^0(\mathscr{K}^k)$).

В первой части работы представлено доказательство интегрируемости системы Хитчина на особой кривой, основанное на технике $r$-матричных вычислений.

Также в данном разделе описывается система Годена как обобщенная система Хитчина, соответствующая рациональной кривой $\Sigma=\mathbb{C}P^1$ с $N$ отмеченными точками $z_1,\dots,z_N$. Поле Хиггса в данном случае представляется рациональным сечением типа $\Phi=L(z)dz$, где

$$L(z)=\sum_{i=1\dots N}\frac{\Phi_i}{z-z_i}. \tag{2.7}$$

Вычеты оператора Лакса системы Годена $\Phi_i$ являются $n\times n$-матрицами, матричные элементы которых лежат в $\mathfrak{gl}_n\oplus\dots\oplus\mathfrak{gl}_n$. $(\Phi_i)_{kl}$ совпадает с $kl$-ым генератором $i$-ой копии $\mathfrak{gl}_n$. В данном случае генераторы алгебры Ли интерпретируются как функции на двойственном пространстве $\mathfrak{gl}_n^*$. Симметрическая алгебра $S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}\simeq\mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n^*\oplus\dots\oplus\mathfrak{gl}_n^*]$ снабжена Пуассоновой структурой, задаваемой скобкой Кириллова-Костанта на двойственном пространстве к алгебре Ли:

$$\{(\Phi_i)_{kl},(\Phi_j)_{mn}\}=\delta_{ij}(\delta_{lm}(\Phi_i)_{kn}-\delta_{nk}(\Phi_i)_{ml}).$$

Интегралы движения могут быть получены как коэффициенты характеристического полинома

$$det(L(z)-\lambda)=\sum_{k=0}^{n}I_k(z)\lambda^{n-k}. \tag{2.8}$$

Традиционные квадратичные Гамильтонианы могут быть получены следующим образом

$$H_{2,k}=Res_{z=z_k}TrL^2(z)=\sum_{j\neq k}\frac{2Tr\Phi_k\Phi_j}{(z_k-z_j)}=2\sum_{j\neq k}\frac{\sum_{lm}e^{(k)}_{lm}e^{(j)}_{ml}}{z_k-z_j}.$$

Эта система описывает модель магнетика, состоящего из набора парно взаимодействующих частиц на прямой с внутренними спиновыми степенями свободы.

Спектральная кривая системы Годена $\tilde{\Sigma}$ описывается уравнением

$$det(L(z)-\lambda)=0. \tag{2.9}$$

Для построения неособой компактификации кривой необходимо рассмотреть тотальное пространство расслоения, в котором лежат собственные значения оператора Лакса

$$\Phi(z)=L(z)dz\in H^0(\mathbb{C}P^1, End(\mathscr{O}^n)\otimes\Lambda),$$

где $\Lambda=\mathscr{K}(k)=\mathscr{O}(k-2)$. Слоение Хитчина позволяет сопоставить точке пространства модулей $\mathscr{M}$ спектральную кривую и линейное расслоение на ней $\mathscr{L}$, строящееся как собственное подрасслоение в $\pi^*\mathscr{O}^n$ по отношению к действию оператора Лакса. В данном разделе, в частности, вычисляется род спектральной кривой

$$g(\Sigma)=\frac{(k-2)n(n-1)}{2}-(n-1) \tag{2.10}$$

и степень данного расслоения

$$deg(\mathscr{L})=g+n-1-\nu.$$

Также в разделе 1 излагается традиционная конструкция разделенных переменных для системы Годена

## 2.2 Основные положения раздела 2

Второй раздел работы является основным, в нем определяется центральный объект описываемого метода, а именно, квантовый характеристический полином, и исследуются некоторые его свойства. Прежде всего, ставится задача квантования в „строгом“ смысле, при котором деформируется пара: Пуассонова алгебра + коммутативная подалгебра в ней, соответствующая некоторой интегрируемой системе. Строгая задача квантования предполагает также нахождение аналога спектральной кривой модели и соответствующих разделенных переменных. Квантование в указанном смысле далее называется алгебро-геометрическим.

Базовым примером Пуассонова многообразия работы является двойственное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$ с соответствующей классической алгеброй наблюдаемых $S(\mathfrak{gl}_n)$. Квантованием в данном случае является универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{gl}_n)$ с естественной процедурой классического предела, заданного отображением

$$lim: U(\mathfrak{gl}_n)\to Gr(U(\mathfrak{gl}_n))=\oplus_i\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i-1}=S(\mathfrak{gl}_n). \tag{2.11}$$

В случае рациональной системы Годена классическая пара определяется следующими объектами: Пуассонова алгебра и коммутативная подалгебра

$$\begin{array}{lcl} \mathscr{A}_{cl} & = & S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n^* \oplus \ldots \oplus \mathfrak{gl}_n^*]; \\ \mathscr{H}_{cl} & - & \text{подалгебра порожденная Гамильтонианами Годена (2.8).} \end{array}$$

Алгебраическая часть задачи квантования сводится к построению пары, в которой квантовая алгебра наблюдаемых совпадает с тензорной степенью универсальной обертывающей алгебры:

$$\mathscr{A} = U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N},$$

а коммутативная подалгебра $\mathscr{H}$ является деформацией подалгебры, порожденной классическими Гамильтонианами Годена.

Для определения деформации подалгебры используется обобщение понятия определителя матрицы для пространства матриц с некоммутирующими элементами, а именно полностью симметризованный определитель:

$$det(B) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau,\sigma \in \Sigma_n} (-1)^{\tau\sigma} B_{\tau(1),\sigma(1)} \ldots B_{\tau(n),\sigma(n)}.$$

Далее определяется квантовый оператор Лакса:

$$L(z) = \sum_{ij} E_{ij} \otimes \sum_{s=1}^{N} \frac{e_{ij}^{(s)}}{z - z_s}.$$

$L(z)$ является рациональной функцией переменной $z$ со значениями в $End(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$. Квантовым характеристическим полиномом квантового оператора Лакса называется выражение

$$det(L(z) - \partial_z) = \sum_{k=0}^{n} QI_k(z) \partial_z^{n-k}. \tag{2.12}$$

Следующая теорема говорит о том, что именно такая деформация классического характеристического полинома (2.8) позволяет строить производящую функцию квантовых Гамильтонианов.

Теорема 2.1. Коэффициенты $QI_k(z)$ коммутируют

$$[QI_k(z), QI_m(u)] = 0$$

и квантуют классические Гамильтонианы Годена в следующем смысле

$$lim(QI_k) = I_k.$$

Доказательство этого факта использует существенные результаты теории квантовых групп, такие как конструкция Янгиана, его подалгебры Бете и в общем укладывается в концепцию квантового метода обратной задачи. Строится предел подалгебры Бете, при этом существенным оказывается рассмотрение квантового характеристического полинома для Янгиана, именно его коэффициенты оказываются однородными выражениями в рассматриваемом пределе и ведут себя контролируемым образом. В разделе 2 вводятся необходимые определения и приводится набросок доказательства теоремы квантования системы Годена.

Далее излагается традиционный для квантовых интегрируемых систем метод анзаца Бете и квантовый метод разделения переменных и описывается эквивалентная форма анзаца Бете в терминах свойств монодромии некоторой Фуксовой системы, непосредственно связанной с квантовым характеристическим полиномом модели.

В $\mathfrak{sl}_2$ случае для системы Годена известно, что если $\Omega$ - общий собственный вектор Бете в представлении $V_\lambda = \otimes_i V_{\lambda_i}$, где $V_{\lambda_i}$ конечномерное неприводимое представление старшего веса $\lambda_i$, с собственными значениями $H_i^\Omega$, тогда уравнение

$$\left(\partial^2 - \frac{1}{4}\sum_i \frac{\lambda_i(\lambda_i+2)}{(z-z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i^\Omega}{z-z_i}\right)\Psi(z) = 0 \tag{2.13}$$

имеет решение вида

$$\Psi(z) = \prod_i (z-z_i)^{-\lambda_i/2} \prod_j (z-\mu_j),$$

где набор параметров $\mu_j$ удовлетворяет системе уравнений Бете.

Рассмотрим квантовый характеристический полином:

$$det(L(z)-\partial_z) = \partial_z^2 - \sum_i \frac{C_i^{(2)}}{(z-z_i)^2} - \sum_i \frac{H_i}{z-z_i}$$

Пусть $\mathscr{H}$ - алгебра, порожденная коэффициентами квантового характеристического полинома. Назовем $\chi$ - характер алгебры $\mathscr{H}$ - допустимым, если на центральных элементах он совпадает с центральным характером данного представления: $\chi(C_i^{(2)}) = \frac{1}{4}(\lambda_i+2)\lambda_i$. Ниже приводится теорема Варченко, Мухина и Тарасова, демонстрирующая связь квантового характеристического полинома и задачи описания спектра квантовой системы.

Теорема 2.2 ([26]). Имеется взаимнооднозначное соответствие между множеством допустимых характеров $\chi$, для которых дифференциальное уравнение

$$\chi(det(L(z)-\partial_z))\Psi(z) = 0$$

имеет монодромию $\pm 1$, и множеством общих собственных векторов системы Годена в представлении $V_\lambda$.

В заключении раздела 2 описывается процедура, аналогичная представленной выше, квантования эллиптической системы Годена. Классическая система в данном случае отвечает пространству модулей голоморфных полустабильных расслоений с тривиальным детерминантным расслоением на эллиптической кривой с набором отмеченных точек. Модули расслоений параметризуются набором точек эллиптической кривой $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, удовлетворяющим условию $\sum_i \lambda_i = 0$. Соответствующее сечение расслоения эндоморфизмов или оператор Лакса представляется выражением вида:

$$\mathscr{L}(z;\lambda) = \sum_{ij=1}^{n} E_{ij} \otimes e_{ji}(z;\lambda),$$

где

$$e_{ii}(z;\lambda) = \sum_{s=1}^{N} \frac{\theta'(z-z_s)}{\theta(z-z_s)} e_{ii}^{(s)}, \tag{2.14}$$

$$e_{ij}(z;\lambda) = \sum_{s=1}^{N} \frac{\theta(z-z_s+\lambda_{ij})}{\theta(z-z_s)\theta(\lambda_{ij})} e_{ij}^{(s)}. \tag{2.15}$$

В данных формулах используются обозначения $\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, а также обозначения нечетных $\theta$-функций Римана на эллиптической кривой: пусть $\tau \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ параметр эллиптической кривой $\mathbb{C}/\Gamma$, где $\Gamma = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ решетка периодов, нечетная $\theta$-функция $\theta(z) = -\theta(-z)$ определяется соотношениями

$$\theta(z+1) = -\theta(z), \qquad \theta(z+\tau) = -e^{-2\pi i z - \pi i \tau}\theta(z), \qquad \theta'(0) = 1. \tag{2.16}$$

Для построения квантового характеристического полинома используется модифицированная подлежащая алгебраическая структура, а именно $\mathfrak{gl}_n$ динамическое эллиптическое $RLL$ уравнение, соответствующее представлению „динамической эллиптической квантовой группы“ $E_{\tau,\hbar}(\mathfrak{gl}_n)$, определенной в [27]. Квантовая алгебра наблюдаемых в данном случае задается тензорным произведением $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \otimes Diff(T^n)$, где под $Diff(T^n)$ понимается алгебра дифференциальных операторов на $n$-ой степени эллиптической кривой $T^n$ с мероморфными коэффициентами. Коммутативность в динамическом случае подразумевается по модулю диагональной подалгебры Картана $\mathfrak{h} \subset U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$. Для получения интегрируемой системы требуется ограничить построенное семейство на пространство нулевого веса в представлении относительно диагонального действия алгебры Ли.

Теорема 2.3. Введем обозначение:

$$D_\lambda = \sum_k E_{kk} \partial_{\lambda_k}.$$

Тогда коэффициенты выражения

$$Q(z,\partial_z)=\det\Big(\frac{\partial}{\partial z}-D_\lambda+\mathscr{L}(z;\lambda)\Big)=\sum_{m=0}^{n}s_m(z)\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{n-m}$$

коммутируют в следующем смысле

$$s_m(z)s_l(u)=s_l(u)s_m(z) \mod \mathfrak{h}.$$

## 2.3 Основные положения раздела 3

Данный раздел посвящен исследованию роли квантового характеристического полинома в проблеме решения квантовых интегрируемых систем. Традиционные методы решения конечных квантовых интегрируемых систем позволяют сводить задачу диагонализации квантовых гамильтонианов к задаче исследования системы алгебраических уравнений Бете. Однако, сама система уравнений допускает явные решения только в специальных случаях, например, в случае термодинамического предела. Основой метода, изложенного в этом разделе, является эквивалентная формулировка квантовой спектральной задачи в терминах Фуксовых систем со специальными представлениями монодромии. В случае алгебры ли $\mathfrak{sl}_2$ исследуются симметрии множества операторов Штурма-Лиувилля типа 2.13.

Для построения данного семейства преобразований в первую очередь находится „матричная“ форма Фуксовой системы. Оказывается, что для любого оператора типа 2.13 с монодромией $\pm1$ может быть найдена Фуксова система

$$(\partial_z-A(z))\Psi(z)=0 \tag{2.17}$$

с монодромией $\pm1$, определяемая связностью в тривиальном расслоении ранга 2 на диске с проколами вида:

$$A(z)=\begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z)\\ a_{21}(z) & a_{22}(z)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{z-z_i}, \tag{2.18}$$

вычеты которой удовлетворяют условиям

$$Tr(A_i)=0;\quad Det(A_i)=-d_i^2;\quad \sum_i A_i=\begin{pmatrix}\kappa & 0\\ 0 & -\kappa\end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

В компонентах эта система может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned}\psi_1' &= a_{11}\psi_1+a_{12}\psi_2,\\ \psi_2' &= a_{21}\psi_1+a_{22}\psi_2.\end{aligned}$$

Связь между матричной и скалярной задачами в одну сторону тривиальна: выражение $\Phi = \psi_1/\chi$, где $\chi = \sqrt{a_{12}}$, удовлетворяет уравнению Штурма-Лиувилля

$$\Phi'' + U\Phi = 0,$$

в котором потенциал определяется формулой

$$U = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{-3/4}{(z-w_j)^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1/4 + detA_i}{(z-z_i)^2} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{H_{w_j}}{z-w_j} + \sum_{i=1}^{k} \frac{H_{z_i}}{z-z_i}, \tag{2.20}$$

дополнительные полюса $w_j$ являются нулями $a_{12}(z)$, а коэффициенты разложения задаются формулами

$$\begin{aligned} H_{w_j} &= a_{11}(w_j) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\neq j} \frac{1}{w_j - w_i} - \sum_{i} \frac{1}{w_j - z_i}\right), \\ H_{z_i} &= \left(\frac{1}{2} + a_{11}^i\right) \sum_{j} \frac{1}{z_i - w_j} - \sum_{j\neq i} \frac{Tr(A_iA_j) + a_{11}^i + a_{11}^j + 1/2}{z_i - z_j}. \end{aligned}$$

Обратное соответствие строится столь же явно. А именно, по скалярному $\mathfrak{sl}_2$-оперу, имеющему тривиальную монодромию в смысле уравнений Бете, строится связность ранга 2 вида (2.17) также с монодромией в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Теорема 2.4. Если набор чисел $\gamma_i$, где $i = 1, \dots, M$, удовлетворяет системе уравнений Бете, соответствующей набору полюсов $\{z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_{k-2}\}$ и набору старших весов $\{2s_1 - 1, \dots, 2s_k - 1, 1, \dots, 1\}$, то вектор

$$\Psi = \prod_{i=1}^{k} (z - z_i)^{-s_i} \begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \prod_{j=1}^{M} (z - \gamma_j), \\ \phi_2/\phi_1 &= \sum_{j=1}^{M} \frac{\alpha_j}{z - \gamma_j}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

а коэффициенты $\alpha_j$ задаются выражениями

$$\alpha_j = \frac{\prod_i (\gamma_j - z_i)}{\prod_i (\gamma_j - w_i)}, \tag{2.23}$$

решает матричную линейную задачу (2.17), для которой

$$a^i_{12} \;=\; \frac{\prod_j (z_i - w_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)}.$$

Предъявленное соответствие позволило построить дискретную группу преобразований, которые сохраняют форму связности (2.17) и, более того, не меняют класс представления монодромии. Тем не менее, эти преобразования меняют характеристические экспоненты уравнений в особых точках на полуцелые значения специфическим образом. В терминах соответствующей квантовой модели возникает семейство рекурсионных операторов, действующих на множестве собственных векторов семейства моделей Годена, меняющих значения параметров неоднородности, а также старшие веса представлений.

Такие преобразования называются преобразованиями Шлезингера, Гекке или Бэклунда в зависимости от контекста. Они имеют простую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим кривую $C$, $F$ - голоморфное расслоение на ней, $\mathscr{F}$ - соответствующий пучок сечений, дополнительный набор данных: точка кривой $x\in C$ и точка двойственного пространства к слою расслоения $F$ в точке $x$ $l\in F^*_x$. „Нижнее“ преобразование Гекке $T_{(x,l)}F$ определяется подпучком $\mathscr{F}' = \{s\in\mathscr{F} : (s(x),l) = 0\}$.

Действие преобразований Гекке на классах расслоений может быть продолжено на множество пар: (расслоение, связность с дополнительными условиями совместности). Опишем подробнее индуцированное действие. Связностью называется отображение пучков модулей, удовлетворяющее тождеству Лейбница, по отношению к операции умножения на функцию:

$$\Delta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}\otimes\Omega^1.$$

Преобразования Гекке могут быть определены на пространстве связностей, которые сохраняют $Ann_l = \{v\in\mathscr{F}_x :< l,v >= 0\}$

$$\Delta_x : Ann_l \to Ann_l \otimes \Omega^1_x.$$

В работе явно вычисляется действие таких преобразований в терминах связности ранга 2. Локальные рассмотрения в окрестностях полюсов показывают, что собственные значения вычетов $A_i$ преобразуются по следующим 4-правилам в зависимости от выбора верхнего или нижнего преобразования Гекке и выбора разных собственных направлений вычета:

$$\begin{aligned}
(\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots) &\longmapsto (\ldots,\lambda_i+1,\ldots,\lambda_j-1,\ldots),\\
(\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots) &\longmapsto (\ldots,\lambda_i+1,\ldots,\lambda_j+1,\ldots),\\
(\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots) &\longmapsto (\ldots,\lambda_i-1,\ldots,\lambda_j-1,\ldots),\\
(\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots) &\longmapsto (\ldots,\lambda_i-1,\ldots,\lambda_j+1,\ldots).
\end{aligned}$$

Полученный результат позволяет рассматривать рекурсионные соотношения на множестве решений уравнений Бете для семейства систем Годена. Последовательным применением таких преобразований, в частности, можно понизить старшие веса до нулевого значения, которое соответствует тривиальному представлению квантовой алгебры, и, соответственно, тривиальной задаче диагонализации квантовых гамильтонианов.

В эллиптическом случае системы Годена также существует семейство операторов, действующих на множестве собственных векторов семейства моделей. Центральным оказывается соответствие между эллиптическими операторами Штурма-Лиувилля с тривиальной монодромией и связностями в расслоении ранга 2 на эллиптической кривой с тривиальной монодромией.

В эллиптическом случае также имеется подход Бете к описанию собственных векторов квантовой системы. Собственный вектор соответствует решению эллиптического уравнения Штурма-Лиувилля

$$\left(\partial_u^2-\sum_i c_i\wp(u-u_i)-\sum_i d_i\frac{\theta'(u-u_i)}{\theta(u-u_i)}\right)\psi(u)=0 \tag{2.24}$$

частного вида:

$$\psi(u)=\prod_i\theta^{-\Lambda_i/2}(u-u_i)\prod_j\theta(u-\gamma_j).$$

Это условие эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
c_i &= \Lambda_i^2/4+\Lambda_i/2,\\
d_i &= \Lambda_i\left(\sum_j\frac{\theta'(u_i-\gamma_j)}{\theta(u_i-\gamma_j)}-\sum_{j\neq i}\frac{\Lambda_j\theta'(u_i-u_j)}{2\theta(u_i-u_j)}\right),\\
0 &= \sum_i\Lambda_i/2\frac{\theta'(\gamma_j-u_i)}{\theta(\gamma_j-u_i)}-\sum_{i\neq j}\frac{\theta'(\gamma_j-\gamma_i)}{\theta(\gamma_j-\gamma_i)}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Последнее семейство уравнений называется эллиптической системой Бете.

По скалярной задаче строится матричная Фуксова система вида

$$(\partial_u-A(u))\Psi(u)=0, \tag{2.26}$$

где

$$\Psi(u)=\begin{pmatrix}\psi_1(u)\\ \psi_2(u)\end{pmatrix},$$

$$A(u)=\begin{pmatrix}a_{11}(u) & a_{12}(u)\\ a_{21}(u) & a_{22}(u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum a_{11}^i\frac{\theta'(u-z_i)}{\theta(u-z_i)} & \sum a_{12}^i\frac{\theta(u-z_i-\lambda)}{\theta(u-z_i)\theta(-\lambda)}\\ \sum a_{21}^i\frac{\theta(u-z_i+\lambda)}{\theta(u-z_i)\theta(\lambda)} & \sum a_{11}^i\frac{\theta'(u-z_i)}{\theta(u-z_i)}\end{pmatrix}.$$

Связь скалярной и матричной формы Фуксовых систем выражается условием, что функция $w = \psi_1/\sqrt{a_{12}}$, полученная по решению матричной формы, решает скалярное уравнение 2.24 с потенциалом, старший член которого дается формулой:

$$U(u) = -\sum(1/4 + det(A_i))\wp(u - z_i) + \sum 3/4\wp(u - w_i) + \dots$$

Здесь точки $w_j$ определяются условием

$$a_{12}(u) = c\frac{\prod \theta(u - w_i)}{\prod \theta(u - z_i)}.$$

В свою очередь $A_i$ являются вычетами $A(u)$ в точках $z_i$.

Оказывается, что метод построения матричной задачи по оператору Штурма-Лиувилля также является явным.

Теорема 2.5. Рассмотрим скалярную задачу 2.24, соответствующую набору отмеченных точек $\{z_1, \dots, z_l, w_1, \dots, w_l\}$, набору старших весов $2s_1 - 1, \dots, 2s_k - 1, 1, \dots, 1\}$ и набору корней Бете $\{\gamma_1, \dots, \gamma_\rho\}$. В этом случае 2-вектор функция $\Psi$ с компонентами:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \prod_{i=1}^{k} \theta(u - u_i)^{s_i} \prod_{j=1}^{\rho} \theta(u - \gamma_j), \\ \psi_2 &= \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\alpha_j \theta(u - \gamma_j + \lambda)}{\theta(u - \gamma_j)} \psi_1, \end{aligned} \tag{2.27}$$

коэффициенты $\alpha_j$ которой заданы формулой

$$\alpha_j = \frac{\prod_i \theta(\gamma_j - w_i)}{\prod_i \theta(\gamma_j - u_i)},$$

удовлетворяет матричному уравнению 2.26.

Данная теорема также используется для построения семейства преобразований на множестве решений эллиптических уравнений Бете. Как и в рациональном случае, эти преобразования меняют параметры системы: набор отмеченных точек и набор старших весов в представлении.

## 2.4 Основные положения раздела 4

Раздел 4 посвящен двум основным приложениям метода спектральной кривой. Первое приложение связано с геометрическим соответствием Ленглендса и главным образом состоит в эффективном описании центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ который, в свою очередь, имеет ключевую роль в конструкции Бейлинсона и Дринфельда квантования системы Хитчина. Заметим, что данная задача имеет непосредственное отношение к теории представлений аффинных алгебр Ли. Опишем сначала конструкцию центра $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$. Прокомментируем обозначение $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$, которое соответствует локальному пополнению $U(\widehat{\mathfrak{gl}_n})/\{C-crit\}$, где $C$-центральный элемент, а $crit=-h^{\vee}=-n$ критическое значение, обратное дуальному числу Кокстера алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. В работе [29] было доказано, что $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ имеет центр, изоморфный как линейное пространство алгебре полиномов от подалгебры Картана. Не смотря на наличие геометрического описания центра, отсутствовала явная конструкция семейства генераторов этой коммутативной подалгебры. Для решения этой задачи в настоящей работе используется схема Адлера-Костанта-Сима. Определим производящие функции $\Phi_k$ для генераторов алгебры токов $e_{ij}^{(k)}=e_{ij}t^k$ выражением

$$\Phi_k=\sum_{ij}E_{ij}\otimes e_{ij}^{(k)}.$$

Введем следующие операторы Лакса:

$$\begin{aligned} L(z) &= \sum_{k>0}\Phi_k z^{-k-1}, \\ L_{full}(z) &= \sum_{k}\Phi_k z^{-k-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим естественную проекцию $\varphi: U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}))\to U(t\mathfrak{gl}_n[t])$ и ограничим ее на центр $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}))$. В 4-й части работы доказывается следующая

Теорема 2.6. Коммутативная подалгебра в $U(t\mathfrak{gl}_n[t])$, определенная с помощью квантового характеристического полинома $det(L(z)-\partial_z)$, совпадает с подалгеброй, полученной из $\mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}))$ с помощью проекции $\varphi: U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})\to U(t\mathfrak{gl}_n[t])$.

Аналогичным рассуждением доказывается более общее утверждение, связанное с разложением алгебры Ли токов в сумму положительных и отрицательных компонент.

Теорема 2.7. Центр $U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n})$ изоморфен как коммутативная подалгебра подалгебре в $U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}]\oplus t\mathfrak{gl}_n^{op}[t])$ определенной формулой $det(L_{full}(z)-\partial_z)$. Изоморфизм определяется отображением

$$I: U(\mathfrak{gl}_n[t^{-1}])\otimes U(t\mathfrak{gl}_n^{op}[t])\to U_{crit}(\widehat{\mathfrak{gl}_n}), \qquad I: h_1\otimes h_2\to h_1h_2 \tag{2.28}$$

Заметим, что благодаря данному описанию центра, геометрическое соответствие Ленглендса на проколотом диске над $\mathbb{C}$ [30] выражается следующей диаграммой:

$$D\text{-модуль Хитчина} \overset{FF,\ BD}{\Leftrightarrow} \text{Характер } \chi \text{ на } \mathfrak{z}(U_{crit}(\widehat{\mathfrak{g}})) \overset{CT}{\Leftrightarrow} \chi det(L_{full} - \partial_z),$$

устанавливая соответствие между $D$-модулями Хитчина с автоморфной стороны и представлениями монодромии плоской связности, ассоциированной с дифференциальным оператором $\chi det(L_{full} - \partial_z)$ со стороны Галуа.

Во второй половине части 4 работы исследуются некоторые свойства квантового оператора Лакса, находящиеся в области некоммутативной геометрии. Пусть $L(z) \in Mat_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \otimes Fun(z)$ - квантовый оператор Лакса модели Годена, здесь $Fun(z)$ означает пространство рациональных функций параметра $z$. Обозначим $L^{[i]}(z)$ квантовые степени оператора Лакса, определяемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} L^{[0]} &= Id, \\ L^{[i]} &= L^{[i-1]}L + \partial_z L^{[i-1]}. \end{aligned}$$

Теорема 2.8. Выражение $C(z) \in Mat_n \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N} \otimes Fun(z)$, определенное формулой

$$C(z) = \begin{pmatrix} v \\ vL \\ \dots \\ vL^{[n-1]} \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

где $v \in \mathbb{C}^n$ - вектор общего положения, задает следующее калибровочное преобразование

$$C(z)(L(z) - \partial_z) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ QH_n & QH_{n-1} & ... & QH_2 & QH_1 \end{pmatrix} - \partial_z \right) C(z). \tag{2.30}$$

Коэффициенты нижней строки правой части определяются квантовым характеристическим полиномом

$$\begin{aligned} det(L(z) - \partial_z) &= TrA_n(L_1(z) - \partial_z)\dots(L_n(z) - \partial_z) \\ &= (-1)^n(\partial_z^n - \sum_i QH_{n-i}\partial_z^i). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Данная теорема позволяет установить очевидную связь уравнения

$$det(L(z) - \partial_z)\Psi(z) = 0 \tag{2.32}$$

и уравнения Книжника-Замолодчикова (КЗ):

Теорема 2.9. Пусть $S(z)$ решает уравнение КЗ

$$(L(z)-\partial_z)S(z)=0$$

где $S(z)$ - функция переменной $z$ со значениями в $\mathbb{C}^n\otimes V_\lambda$, где $V_\lambda$ - конечномерное представление $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$. Тогда любая компонента по пространству $\mathbb{C}^n$ решения $S_i(z)$ решает уравнение Бакстера 2.32.

Важным следствием данной теоремы является тождество Гамильтона-Кэли для квантового оператора Лакса:

Следствие 2.9.1. Квантовые степени оператора Лакса удовлетворяют квантовому тождеству Гамильтона-Кэли

$$L^{[n]}(z)=\sum_{i=1}^{n}QH_i(z)L^{[n-i]}(z). \tag{2.33}$$

# 3 Публикации по теме диссертации


[S1] Talalaev D., Universal R-matrix formalism for the spin Calogero-Moser system and its difference counterpart, IMRN 2000, No. 11.

[S2] Талалаев Д., Эллиптическая система Годена со спином, Теоретическая и Математическая Физика (ТМФ), 2002, 130:3, 426–441.

[S3] Талалаев Д., Червов А., Система Хитчина на особых кривых, Теоретическая и Математическая Физика (ТМФ), 2004, 140:2, 179–215.

[S4] Chervov A., Talalaev D., Hitchin systems on singular curves II. Gluing subschemes, Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys.4:751-787,2007.

[S5] Талалаев Д., Квантовая система Годена, Функциональный Анализ и его приложения 40 No. 1 pp.86-91 (2006).

[S6] Талалаев Д., Червов А., Уравнение КЗ, G-оперы, квантовая редукция Дринфельда-Соколова и квантовое тождество Гамильтона-Кэли, Записки Научных семинаров ПОМИ, Выпуск 360, «Теория представлений, Динамические системы, Комбинаторные методы. Часть 16», стр. 246-260.

[S7] Babelon O., Talalaev D., On the Bethe Ansatz for the Jaynes-Cummings-Gaudin model, J. Stat. Mech. (2007) P06013.

[S8] Талалаев Д., Анзац Бете и изомонодромные преобразования, Теоретическая и математическая физика, ТМФ, 2009, том 159, номер 2, стр. 252–265.

[S9] Rubtsov V., Silantiev A., Talalaev D., Manin Matrices, Quantum Elliptic Commutative Families and Char-acteristic Polynomial of Elliptic Gaudin model, SIGMA 5 (2009), 110-131.

# Список литературы

[1] Shiota T., Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, Invent. Math., 83(2):333–382, 1986.

[2] Krichever I., Integrable linear equations and the Riemann-Schottky problem, in: Algebraic Geometry and Number Theory, Birkhäuser, Boston, 2006.

Krichever I., Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer Variety, arXiv:math/0605625.

[3] Атья М., Геометрия и физика узлов. М. Мир 1995.

[4] Donaldson S., An application of gauge theory to four- dimensional topology, J. Differential Geometry 18 A983, 279-315.

[5] Kronheimer P.B., Mrowka T.S., The genus of embedded surfaces in the protective plane, Math. Research Letters 1 A994, 797-808.

[6] Nakayashiki, A., On the cohomologies of theta divisors of hyperelliptic Jacobians, Contemporary Math. 309 (2002), 177-183.

Nakayashiki, A. and Smirnov, F., Euler characteristics of theta divisors of Jacobians for spectral curves, CRM Proc. and Lect. Notes 32, Vadim B. Kuznetsov, ed. (2002), 239-246.

[7] Thaddeus M. Conformal field theory and the cohomology of the moduli space of stable bundles, J. Differential Geom. 1992. V. 35, № 1. P. 131-149.

[8] Барановский В.Ю., Кольцо когомологий пространства модулей стабильных расслоений с нечетным детерминантом, Изв. РАН. Сер. матем., 1994, том 58, выпуск 4, страницы 204–210.

[9] Feigin B., Finkelberg M., Negut A., Rybnikov L., Yangians and cohomology rings of Laumon spaces, arXiv:0812.4656.

Feigin B., Finkelberg M., Frenkel I., Rybnikov L., Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces, arXiv:0806.0072.

[10] Gaudin M., La Fonction d' Onde de Bethe, Masson, Paris (1983).

[11] Якоби К., Лекции по динамике. Москва 1936.

[12] Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Вриза, конечнозонные линейные операторы и Абелевы многообразия. УМН, 31, 1, 56-136 (1976).

Кричевер И.М., Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений, УМН 1977 32 №4 180-208.

[13] Веселов А.П., Новиков С.П., О скобках Пуассона, совместимых с алгебраической геометрией и динамикой КдФ на множестве конечнозонных потенциалов.— Докл. АН СССР, 1982, 266, № 3.

[14] Hitchin N., Stable bundles and integrable systems. Duke Math. Journal 1987 V 54 N1 91-114.

[15] Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys.Rev.Lett. 1967. V. 19. P. 1095-1097.

[16] Lax P., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. № 5. P. 467-490.

[17] Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П., Интегрируемые системы, I. Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, том 4.

[18] Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли, М. Наука, 1990.

[19] Демидов Е.Е., Иерархия Кадомцева–Петвиашвили и проблема Шоттки, Фундаментальная и прикладная математика 1998, т. 4, выпуск 1, стр. 367-460.

[20] Склянин Е. К., Фаддеев Л. Д. Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля ДАН СССР.—1978.— Т. 243, № 6—С. 1430—1433.

Склянин Е. К. Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера ДАН СССР.—1978.—Т. 244, № 6.—С. 1337— 1341.

Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантовый метод обратной задачи. Теор. и мат. физика.—1979.— Т. 40, №2.— С. 194—220.

[21] Дринфельд В.Г., Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга—Бакстера ДАН СССР. 1985. Т.283, №5.

[22] Adler M., On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for the KdV type equations, Invent. Math. (1979) 50, 219-248.

Kostant B., Quantization and Representation Theory, in: Representation Theory of Lie Groups, Proc. SRC/LMS Res. Symp., Oxford 1977. London Math. Soc. Lecture Notes Series, 34, 287-316, 1979.

Symes W.W., Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory. Invent. Math. 59, 13-51 (1980).

[23] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M., From Gauss to Painleve, A modern theory of special functions, 1991.

[24] Chervov A., Falqui G., Rybnikov L., Limits of Gaudin Systems: Classical and Quantum Cases, arXiv:0903.1604v1 [math.QA].

[25] Chervov A., Talalaev D., Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence, hep-th/0604128.

[26] Mukhin E., Tarasov V., Varchenko A., The B. and M. Shapiro conjecture in real algebraic geometry and the Bethe ansatz, math.AG/0512299.

[27] Felder G., Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves. Proc. ICM Zürich 1994, 1247-55, Birkhäuser (1994); Elliptic quantum groups, Proc. ICMP Paris 1994, 211-8, International Press (1995).

[28] Talalaev D., Bethe ansatz and Isomonodromic deformations, Theor. Math. Phys. 2009, Vol 159, 2, pp. 252-265, math-ph:0802.0383v2.

[29] Feigin B., Frenkel E., Int. J. Mod. Phys. A7, Suppl. 1A 1992, 197-215.

[30] Frenkel E., Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory, hep-th/0512172.