Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 517.957

ТАЛАЛАЕВ

Дмитрий Валерьевич

R-матричный подход в задачах конечнозонного интегрирования

Механико-математический факультет

кафедра высшей геометрии и топологии

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор С. М. Гусейн-Заде

Содержание

1

Введение.

Конечномерные динамические системы теории солитонов первоначально воспринимались в значительной степени лишь как модельные примеры в теории интегрируемых систем. Как оказалось впоследствии, ряд таких систем тесно связан с фундаментальными проблемами математики и математической физики. Так в пионерской работе [1] впервые была обнаружена связь между рациональными или эллиптическими решениями уравнения КдФ, и рациональной или эллиптической системой Calogero-Moser(CM [2]). Наиболее полное понимании природы такой связи возникло с приходом алгебро-геометрического метода обратной задачи, разработанного в работах [3],[4]. А именно, было установлено, что условие существования собственной функции специального вида у вспомогательного линейного оператора, построенного по представлению Лакса, эквивалентно тому, что динамика полюсов решения нелинейного уравнения описывается системой такого типа. В работе [5] был установлен изоморфизм между эллиптическими решениями матричного уравнения КП и решениями спиновой системы CM. В работе [6] в качестве нелинейного уравнения было взято разностно-дифференциальное уравнение двумеризованной цепочки Тода. Роль системы, описывающей динамику полюсов решения уравнения, выполняет спиновая система Ruijsenaars-Schneider(RS [7]).

Алебро-геометрические конструкции прямой и обратной задачи, используемые в работах [5],[6], представляют богатейший математический аппарат. Алгебраические объекты, “живущие” на кривой, такие как пространства функций Бейкера-Ахиезера, пространства абелевых дифференциалов, обладающие высокой степенью симметричности, позволяют явно конструировать решения динамической системы и нелинейного уравнения в терминах θ-функций на Якобиане кривой.

Существенным при всех дальнейших рассмотрениях является наличие у нелинейного уравнения представления Лакса

$$\dot{\mathcal{L}} = [\mathcal{M}, \mathcal{L}]$$

или представления нулевой кривизны

$$[\partial_t - \mathcal{L}, \partial_y - \mathcal{M}] = 0.$$

Оказывается, что факт существования решения вспомогательной линейной задачи

$$(\partial_t - \mathcal{L})\Psi = 0$$

для оператора с двоякопериодическими коэффициентами в виде двоякоблоховской функции Ψ является столь ограничительным условием, что в ряде случаев позволяет однозначно восстанавливать $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ пару, а следовательно и решение нелинейного уравнения. Пространство двоякоблоховских функций с фиксированным количеством полюсов при каждом значении t может быть рассмотрено как конечномерное пространство. Оператор, фигурирующий во вспомогательной линейной задаче отображает это пространство в пространство большей размерности. Именно поэтому на коэффициенты разложения по базису решения Ψ возникает переопределенная система уравнений, в большинстве случаев имеющая вид:

$$(L - k)C = 0, \tag{1.1}$$

$$(\partial_t - A)C = 0, \tag{1.2}$$

где L - уже конечномерный оператор, зависящий от спектрального параметра z, параметризующего вместе с параметром k пространство блоховских факторов. Условие совместности этих уравнений, то есть уравнение Лакса, является конечномерной динамической системой на полюса x_i собственной функции. Существование решения уравнения (1.1) задает уравнение кривой в виде

$$det(L - k) = 0.$$

Коэффициенты этого полинома не зависят от t и предоставляют набор интегралов системы. Кроме того, данная собственная функция при некоторой нормировке имеет аналитические свойства на кривой, характеризующие так называемую функцию Бейкера-Ахиезера. Благодаря методам обратной задачи, функция, обладающая такими свойствами, однозначно восстанавливается и имеет явное выражение в терминах тета-функций. Таким образом, помимо связи решения нелинейного уравнения и динамической системы, было установлено фундаментальное соответствие этих решений набору алгебро-геометрических данных.

Эта конструкция является одной из многочисленных демонстраций того богатства математических структур, связанных с этими системами, которое обусловило неослабевающий уже более 20 лет интерес к ним. В последнее время существенный интерес к этим системам основан на установленной в серии работ [8],[9] связи между их геометрической природой и $N = 2$ суперсимметричной теорией Зайберга-Виттена. В частности, набор спектральных данных в теории Зайберга-Виттена полностью соответствует спектральным данным прямой и обратной задачи теории алгебро-геометрического интегрирования, и такой фундаментальный объект на спектральной кривой, как 1-форма $d\lambda$ позволяет строить предпотенциал теории, а периоды этой формы параметризуют вакуумное пространство. С этой проблематикой тесным образом связана настоящая работа, предметом которой является исследование гамильтоновой структуры динамических систем теории солитонов, возникающих как системы полюсной динамики.

Существует ряд подходов к гамильтонову описанию подобных систем, затрагивающих широкий спектр математических методов. В их числе можно перечислить универсальный метод построения гамильтоновой структуры в терминах алгебро-геометрических конструкций прямой и обратной задачи, разработанный в трудах [10],[11]; метод гамильтоновой редукции, использованный в работах [12],[13]; а также метод, базирующийся на конструкции динамической R-матрицы [14],[15]. Основными задачами всех этих подходов является описание симплектической структуры, коммутативной алгебры интегралов, канонических переменных и т. д. Важность исследований в этой области нельзя переоценить. Помимо того, что гамильтонов формализм является хорошо структурированным языком в теории интегрируемых систем, он иногда является средством для решения системы, позволяет находить ее квантование.

Вышеупомянутый универсальный метод построения гамильтоновой структуры, изначально введенный для уравнений в частных производных, оказался весьма эффективным и при анализе конечномерных динамических систем. В работах [10],[11] была предложена симплектическая форма

$$\omega = \frac{1}{2} Res_{\infty} < \Psi^* \delta L \wedge \delta \Psi > dk,$$

на пространстве периодических операторов, зависящих от спектрального параметра. Она выражается в терминах функционалов на этом пространстве δL и $\delta\Psi$, где Ψ - собственная функция оператора, являющаяся также функционалом на этом пространстве. Как было показано, эта форма является замкнутой, невырожденной и дает полное гамильтоново описание динамической системы на пространстве таких операторов. Универсальность данного выражения симплектической формы заключается еще и в том, что в конечномерном случае, в большинстве известных динамических систем, симплектическая структура может быть выражена таким же образом. Достоинством этого представления является то, что оно позволяет явно строить переменные "действие-угол", в терминах которых симплектическая форма приобретает вид

$$\omega = 2 \sum_{s=1}^{g} dE(\gamma_s) \wedge \delta k(\gamma_s), \tag{1.3}$$

где γ_s - полюса собственной функции на кривой, где E - энергия, а k - квазиимпульс собственной функции. Отметим, что для интегрируемых систем связанных с гиперэллиптическими кривыми форма (1.3) была предложена в работе [16]. Вышеупомянутая 1-форма, играющая важную роль в теории Зайберга-Виттена, тесно связана с переменными "действие-угол" и имеет следующее выражение $d\lambda = kdE$. В разделе 2 данной работы будет продемонстрирован универсальный метод построения гамильтоновой структуры на примере системы, связанной с матричным уравнением Дэви-Стюартсона. В этом случае его применение позволило впервые получить явное выражение для симплектической структуры и гамильтониана этой динамической системы.

Еще один подход к исследованию гамильтоновой структуры систем полюсной динамики имеет в своей основе метод гамильтоновой редукции и был удачно применен в построении целого класса интегрируемых систем, называемых системами Хитчина. В работе [17] Хитчин рассмотрел семейство интегрируемых систем, фазовым пространством для которых является кокасательное расслоение к пространству $\mathcal{N}$ стабильных голоморфных векторных расслоений ранга n для группы $GL_n(C)$ на компактной римановой поверхности Γ рода $g > 1$ с особенностями. На кокасательном расслоении к пространству $\mathcal{A}^s$ комплексных структур на гладком векторном расслоении со слоем V, изоморфным C^n имеется каноническая симплектическая структура и канонический набор интегралов, отвечающий свободной системе. Однако после редукции на нулевой уровень отображения момента, система перестает быть тривиальной, при этом интегрируемая структура, то есть требуемый набор интегралов в инволюции, сохраняется. К наиболее важным примерам применения этого метода можно отнести системы:

Годен:

$$H_a = \sum_{b \neq a} \frac{Tr(p_b p_a)}{(x_b - x_a)};$$

CM:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i,j} \frac{S_{ij}}{sinh^2(\frac{z_i - z_j}{2})}$$

$$S_{ij} = \sum_{s,s\prime} (p_s)_{ij} (p_{s\prime})_{ji}.$$

Эллиптические системы Годена, Калоджеро-Мозера, а также система Макдональда и ее $SU(N)$ аналог, который есть не что иное, как рациональная система RS, также могут быть получены в рамках метода гамильтоновой редукции.

Научная новизна данной работы заключается, прежде всего, в привлечении аппарата квантовых групп в алгебро-геометрическую теорию интегрирования. И связано это с понятием так называемой универсальной R-матрицы. Понятие классической r-матрицы и следующее описание пуассоновой структуры

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \tag{1.4}$$

систем имеющих представление Лакса было введено в работах [18], [19]. Однако, как было замечено в работе [20], некоторое обобщение данного представления, является следствием инволютивности набора собственных значений L-оператора интегрируемой конечномерной системы. А именно, было показано, что для любой такой системы по крайней мере локально существует представление Лакса с операторами, принимающими значения в некоторой алгебре Ли, и сущестует представление пуассоновой структуры в форме (1.4). Кроме того, если для системы существуют глобальные переменные “действие-угол”, то и данные представления выполняются глобально. Привлечение аппарата универсальной динамической R-матрицы основывается на работе [14], в которой было замечено, что r-матрица для системы CM, удовлетворяет не классическому уравнению Янга-Бакстера, а его динамическому аналогу. Это и позволило обнаружить структуру квази-хопфовой алгебры в квантовой деформированной системе CM. Оказалось, что эта связь является довольно универсальной и, как было показано в [14], стартуя с любой простой квази-хопфовой алгебры, может быть построена интегрируемая система, то есть набор интегралов в инволюции и пуассонова структура как в квантовом, так и в классическом случае. Основным при построении является тот факт, что понятие квази-хопфовой алгебры предполагает наличие универсальной R-матрицы, которая в квазикоассоциативном случае является универсальным решением динамического квантового уравнения Янга-Бакстера, иначе называемого уравнением Gervais-Neveu-Felder, представимого в виде

$$R_{12}(x)R_{13}(xq^{H_2})R_{23}(x) = R_{23}(xq^{H_1})R_{13}(x)R_{12}(xq^{H_3}).$$

Это решение при правильно подобранных параметрах представления квази-хопфовой алгебры и подходящих обертывающих преобразованиях в пределе по параметру q дает выражения для квантовых и классических гамильтонианов системы, для классической r-матрицы, для L-оператора. То есть в структуре квази-хопфовой алгебры содержится информация об основных алгебро-геометрических объектах интегрируемой системы. В том числе, о представлении Лакса, о гамильтонианах, о пуассоновой структуре на L-алгебре. Кроме того, это построение позволяет строить квантование системы и в ряде случаев полностью решить квантовую задачу. Фундаментальной задачей в этой области остается процедура построения квази-хопфовой структуры по данным спектральной кривой. Такие попытки уже предпринимались в работе [21]. Целью настоящей работы является исследование примеров построения такой структуры, согласованной с имеющимися алгебро-геометрическими объектами. В разделе 3 такая задача будет рассмотрена для системы CM. В разделе 4.2 будет обсуждаться квази-хопфова структура, связанная с системой, решенной в разделе 2.

Одной из целей данной работы, помимо изложенных выше, является исследование гамильтоновой структуры спиновой системы RS, чему будет посвящен раздел 3.5. Аппарат квантовых групп в этом случае представляет исключительный интерес. Связано это с квантовой интерпретацией конструкции релятивистского аналога динамической системы. Эта процедура в терминах спектральной кривой выражается в виде замены фундаментальных дифференциалов второго рода(для системы CM) на дифференциалы 3-го рода(для системы RS), то есть с расщеплением особенности. В алгебраических терминах взятие релятивистского аналога связано с q-деформацией алгебры, что представляется более простым механизмом ее анализа. Было замечено, что до взятия предела по q описанные с помощью R-матрицы структуры для системы CM соответствуют системе RS. В работе [15] это было продемонстрировано для двухчастичной системы. В главе 3 подобное построение будет проведено для общего случая. Заметим, что универсальный гамильтонов подход для релятивистских аналогов спиновых систем не дает явного выражения для симплектической структуры в терминах фазового пространства. Остальные существующие методы также не дают исчерпывающих ответов в отношении спиновой системы RS. В работе [22], используя первый описанный метод, было получено выражение для гамильтониана этой системы

$$H = \sum_{i=1}^{N} (b_i^+ a_i),$$

однако выражение для симплектической структуры было получено в явном виде только для бесспинового вырождения $L_{ij} = f_i \Phi(x_i - x_j - \eta, z)$.

Метод гамильтоновой редукции для спиновой рациональной системы RS, использованный в работах [12],[13], привел к описанию симплектической структуры. Однако для описания пуассоновой структуры авторами были введены дополнительные фазовые переменные. Открытым остается вопрос о построении замкнутого описания гамильтоновой структуры. Использованный в разделе 3 данной работы R-матричный метод построения интегрируемых систем изначально ориентирован на замкнутое описание пуассоновой структуры. Она естественным образом наследуется из структуры алгебры Ли универсальной обертывающей алгебры. Канонические координаты и импульсы также оказываются естественным образом разделены со спиновыми переменными. В этой конструкции спиновый и бесспиновый случаи отличаются тем, какое представление $U_q(sl_n)$ берется. Будет рассмотрен случай, когда размерность пространства нулевого веса неприводимого конечномерного представления равна 1. Но даже для этого случая разные представления старших весов приводят к построению квантовых интегрируемых систем с гамильтонианом

$$\hat{H}_l = \sum_i e^{\frac{\partial}{\partial} t_i} \prod_{k \neq i} \frac{q^{t_i - t_k + l} - q^{-t_i + t_k - l}}{q^{t_i - t_k} - q^{-t_i + t_k}}. \tag{1.5}$$

Также будет построена квантовая интегрированная система соответствующая алгебре $U_{q,x}(sl_3)$, предел по параметру деформации которой является квантовой спиновой системой Калоджеро-Мозера. Заметим, что конструкция квантовой RS системы также производилось в работах [23, 24] с помощью нединамической R-матрицы. Однако, в данном случае строится представление алгебры в разностных операторах, что является аналогом процедуры динамической деформации.

Построение подобной системы было осуществлено в работе [25] с привлечением аппарата гамильтоновой редукции по отношению к действию группы G на пространстве $T^*\hat{G}$, где $\hat{G}$ - соответствующая аффинная группа Ли. Полученный гамильтониан записывется в виде:

$$H_{\pm} = \sum_i (e^{i\theta_i} \pm e^{-i\theta_i}) \prod_{j \neq i} f(q_{ij}),$$

где

$$f^2(q) = (1 - \frac{sin^2(\pi\nu/kN)}{sin^2(\pi q/k)}).$$

Заметим, что построение квантовой интегрируемой системы с гамильтонианом, являющимся эллиптическим аналогом гамильтониана (1.5), было предложено в работе [26]. Ее метод также основан на R-матричном формализме, однако для построения гамильтонианов использовался метод “fusion”.

Суммируя все вышесказанное в качестве целей данной работы можно назвать следующие:

1. Построение гамильтонова формализма для системы, связанной с матричным оператором Дирака (раздел 2);

2. Установление связи R-матричного подхода с уже имеющимися конструкциями в области исследования гамильтоновой структуры конечномерных систем теории солитонов на примерах спиновой системы CM и вышеупомянутой системы (раздел 3.5)

3. Исследование гамильтоновой структуры спиновой системы RS (раздел 3.5).

К новым результатам, полученным в этой работе можно отнести следующие:

1. Построение, интегрирование и описание гамильтоновой структуры для спиновой системы, связанной с матричным уравнением Дэви-Стюартсона;

2. Гамильтоново описание системы CM и ее релятивистского аналога - системы RS, полученное с применением аппарата универсальной динамической R-матрицы;

3. Построение релятивистского аналога спиновой системы СМ с помощью аппарата универсальной динамической R-матрицы;

4. Исследование r-матричной природы системы, связанной с матричным уравнением Дэви-Стюартсона.

2

Система динамики полюсов конечнозонного решения уравнения Дэви-Стюартсона

2.1 Уравнение Дэви-Стюартсона

В этом разделе настоящей работы будет продемонстрирован алгебро-геометрический подход решения нелинейного уравнения на примере матричного аналога уравнения Дэви-Стюартсона. Будет построена и проинтегрирована система, связанная с полюсной динамикой такого решения. Также будет установлен изоморфизм между решениями интегрируемой системы и набором алгебро-геометрических данных. Уравнение Дэви-Стюартсона $DS2^-$ представляется в виде

$$iu_t + u_{xx} - u_{yy} + u\phi = 0 \qquad \phi_{xx} + \phi_{yy} = 2(|u|^2_{xx} - |u|^2_{yy}). \tag{2.1}$$

В работе [27] было замечено, что данное уравнение обладает представлением Лакса $\dot{L} = [L, M]$ где

$$L = \begin{pmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} \qquad z = x + iy.$$

Рассмотрим многомерное обобщение вспомогательной линейной задачи, которая в данном случае представляется как задача нахождения собственной функции многомерного оператора Дирака:

$$\left(\partial_t + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\partial_x + \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}\right)\Psi = D_A\Psi = 0, \tag{2.2}$$

где A_1, A_2- $l*l$-матрицы, $d_1 = E, d_2 = -E$, где E- единичная $l*l$-матрица. В качестве фазового пространства будем рассматривать пространство с координатами $x_i, \lambda_i, a_1^i, a_2^i, {b_1^i}^+, {b_2^i}^+$, где $i = 1, ..., n$, x_i, λ_i - скаляры, а остальные величины являются векторами в l-мерном пространстве. Системы, полученные при рассмотрении линейной задачи (2.2), как будет показано в данном разделе, приобретают вид:

эллиптический случай:

$$\dot{a}_1^j - \frac{\lambda_j}{2}a_1^j + \sum_{l\neq j} a_1^l({b_1^l}^+ a_2^j)\zeta(x_j - x_l) = 0, \qquad \dot{a}_2^j + \frac{\lambda_j}{2}a_2^j + \sum_{l\neq j} a_2^l({b_2^l}^+ a_1^j)\zeta(x_j - x_l) = 0; \tag{2.3}$$

$$\dot{b}_1^j - \frac{\lambda_j}{2}b_1^j + \sum_{l\neq j} b_1^l({b_2^j}^+ a_1^l)\zeta(x_j - x_l) = 0, \qquad \dot{b}_2^j + \frac{\lambda_j}{2}b_2^j + \sum_{l\neq j} b_2^l({b_1^j}^+ a_2^l)\zeta(x_j - x_l) = 0; \tag{2.4}$$

$$\ddot{x}_j = \sum_{l\neq j}\Big(({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) + ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l))\Big)\zeta(x_j - x_l); \tag{2.5}$$

$$\dot{\lambda}_j = \sum_{l\neq j}(({b_2^j}^+ a_1^l)({b_1^l}^+ a_2^j) - ({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j))\wp(x_j - x_l)^2. \tag{2.6}$$

рациональный случай при $\eta = 0$**:**

$$\dot{a}_1^j - \frac{\lambda_j}{2}a_1^j + \sum_{l\neq j} a_1^l({b_1^l}^+ a_2^j)\frac{1}{x_j - x_l} = 0, \qquad \dot{a}_2^j + \frac{\lambda_j}{2}a_2^j + \sum_{l\neq j} a_2^l({b_2^l}^+ a_1^j)\frac{1}{x_j - x_l} = 0; \tag{2.7}$$

$$\dot{b}_1^j - \frac{\lambda_j}{2}b_1^j + \sum_{l\neq j} b_1^l({b_2^j}^+ a_1^l)\frac{1}{x_j - x_l} = 0, \qquad \dot{b}_2^j + \frac{\lambda_j}{2}b_2^j + \sum_{l\neq j} b_2^l({b_1^j}^+ a_2^l)\frac{1}{x_j - x_l} = 0; \tag{2.8}$$

$$\ddot{x}_j = \sum_{l\neq j}\frac{({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) + ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l)}{x_j - x_l}; \tag{2.9}$$

$$\dot{\lambda}_j = \sum_{l\neq j}\frac{({b_2^j}^+ a_1^l)({b_1^l}^+ a_2^j) - ({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j)}{(x_j - x_l)^2}. \tag{2.10}$$

общий рациональный случай:

$$\dot{a}_1^j - \frac{\lambda_j}{2}a_1^j + \sum_{l\neq j} a_1^l({b_1^l}^+ a_2^j)(\frac{1}{x_j - x_l} - \frac{1}{\eta}) = 0,$$

$$\dot{a}_2^j + \frac{\lambda_j}{2}a_2^j + \sum_{l\neq j} a_2^l({b_2^l}^+ a_1^j)(\frac{1}{x_j - x_l} + \frac{1}{\eta}) = 0; \tag{2.11}$$

$$\dot{b}_1^j - \frac{\lambda_j}{2}b_1^j + \sum_{l\neq j} b_1^l({b_2^j}^+ a_1^l)(\frac{1}{x_j - x_l} - \frac{1}{\eta}) = 0,$$

$$\dot{b}_2^j + \frac{\lambda_j}{2}b_2^j + \sum_{l\neq j} b_2^l({b_1^j}^+ a_2^l)(\frac{1}{x_j - x_l} + \frac{1}{\eta}) = 0; \tag{2.12}$$

$$\ddot{x}_j = \sum_{l\neq j} \frac{({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) + ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l)}{x_j - x_l} + \frac{1}{\eta}\sum_{l\neq j}\Big(({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) - ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l)\Big)\,; \tag{2.13}$$

$$\dot{\lambda}_j = \sum_{l\neq j} \frac{({b_2^j}^+ a_1^l)({b_1^l}^+ a_2^j) - ({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j)}{(x_j - x_l)^2}. \tag{2.14}$$

Во всех дальнейших рассмотрениях будем ограничивать систему на инвариантное подмногообразие

$$\dot{x}_j^2 - 1 = ({b_1^j}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^j). \tag{2.15}$$

Помимо своего оригинального смысла описания некоторых интегрируемых динамических систем частиц на прямой с парным потенциалом взаимодействия, эти системы непосредственно связаны с решением матричного аналога уравнения (2.1). Установлению этой связи посвящено утверждение 1. В разделе 2.4 будет показано, что эти системы являются гамильтоновыми. Будут предъявлены явные выражения для гамильтонианов и симплектических форм, полученные с помощью универсального подхода к построению гамильтоновой структуры.

2.2 Прямая спектральная задача

Рассмотрим уравнение (2.2) с эллиптическим потенциалом специального вида

$$A_k = \sum_{j=1}^{n} a_k^j {b_k^j}^+ \zeta(x - x_j) \qquad k = 1, 2, \tag{2.16}$$

при условии $\sum_{j=1}^n a_k^j {b_k^j}^+ = 0$. Как уже отмечалось, собственная функция ищется в классе блоховских функций, то есть функций удовлетворяющих следующим свойствам:

$$\Psi(x + 2\omega_l, t) = \Psi(x, t)B_l,$$

где ω_l-выбранные полупериоды решетки, а B_l-блоховские факторы не зависящие от x. Оказывается, при условии, что собственная функция имеет n полюсов по x и ее поведение в бесконечности описывается существенной особенностью $e^{(k-1/k)x}$, пространство блоховских функций имеет базис вида $\Phi(x - x_i, z)e^{(k-1/k)x}$, где

$$\Phi(z, x) = \frac{\sigma(z - x)}{\sigma(x)\sigma(z)}\exp(\zeta(z)x).$$

Величины k, z в данном случае будут параметризовать пространство блоховских факторов. Заметим также, что по переменной z функция Φ является эллиптической.

Итак, рассмотрим решение уравнения (2.2) с потенциалом специального вида (2.16), представляемое в разложении по базису в форме

$$\Psi=\sum_{j=1}^{n} S^j\Phi(z,x-x_j)\exp(ky_+ + \frac{1}{k}y_-), \tag{2.17}$$

где $y_\pm=\frac{1}{2}(t\pm x)$. Кроме того будем рассматривать решение двойственного уравнения

$$\Psi^+D_A=0 \tag{2.18}$$

представимое в форме

$$\Psi^+=\sum_{j=1}^{n} S^{j+}\Phi(z,x_j-x)\exp(-ky_+ - \frac{1}{k}y_-). \tag{2.19}$$

Предложение 1 *Уравнение (2.2) с эллиптическим потенциалом (2.16) имеет решение вида (2.17), а двойственное уравнение (2.18) имеет решение вида (2.19) тогда и только тогда, когда выполняется следующая система уравнений*

$$\dot a_1^j+\lambda_1^j a_1^j+\sum_{l\neq j} a_1^l({b_1^l}^+a_2^j)\zeta(x_j-x_l)=0; \tag{2.20}$$

$$\dot a_2^j+\lambda_2^j a_2^j+\sum_{l\neq j} a_2^l({b_2^l}^+a_1^j)\zeta(x_j-x_l)=0; \tag{2.21}$$

$$\dot b_1^j-\lambda_2^j b_1^j+\sum_{l\neq j} b_1^l({b_2^j}^+a_1^l)\zeta(x_j-x_l)=0; \tag{2.22}$$

$$\dot b_2^j-\lambda_1^j b_2^j+\sum_{l\neq j} b_2^l({b_1^j}^+a_2^l)\zeta(x_j-x_l)=0; \tag{2.23}$$

$$\ddot x_j=\sum_{l\neq j}\left(({b_1^j}^+a_2^l)({b_2^l}^+a_1^j)+({b_1^l}^+a_2^j)({b_2^j}^+a_1^l)\right)\zeta(x_j-x_l); \tag{2.24}$$

$$\dot\lambda_1^j-\dot\lambda_2^j=\sum_{l\neq j}(({b_2^j}^+a_1^l)({b_1^l}^+a_2^j)-({b_1^j}^+a_2^l)({b_2^l}^+a_1^j))\wp(x_j-x_l). \tag{2.25}$$

Заметим, что эта система приводится преобразованием

$$a_k^j\mapsto a_k^j e^{-\int\frac{\lambda_1^j+\lambda_2^j}{2}}\qquad b_k^j\mapsto b_k^j e^{\int\frac{\lambda_1^j+\lambda_2^j}{2}} \tag{2.26}$$

к виду (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) где $\lambda_j=\lambda_2^j-\lambda_1^j$.

Доказательство Основным фактом, используемым при доказательстве будет следующее наблюдение: блоховская функция, не имеющая полюсов, и обладающая такими же трансляционными свойствами, как функция Φ, и с такой же существенной особенностью равна нулю. Это следует из того, что не существует эллиптической функции с единственным полюсом. Далее подставим выражение (2.17) в уравнение (2.2), сократим экспоненциальную часть и найдем коэффициенты ряда Лорана с номерами -1,-2 получившегося выражения в точках $x=x_j$. Условие обнуления этих коэффициентов приобретает вид следующих систем уравнений:

при $(x-x_j)^{-2}$ **:**

$$S_1^j(\dot{x}_j-1)+a_1^j{b_1^j}^+S_2^j=0; \tag{2.27}$$

$$S_2^j(\dot{x}_j+1)+a_2^j{b_2^j}^+S_1^j=0. \tag{2.28}$$

Такой же коэффициент в разложении для двойственного уравнения приводит к системе:

$${S_1^j}^+(\dot{x}_j-1)+{S_2^j}^+a_2^j{b_2^j}^+=0; \tag{2.29}$$

$${S_2^j}^+(\dot{x}_j+1)+{S_1^j}^+a_1^j{b_1^j}^+=0. \tag{2.30}$$

Эти две системы приводят к уравнению (2.15) и кроме того при удачном выборе калибровки векторов a_k^l, b_k^l, сохраняющей вид потенциала, такой что:

$$1-\dot{x}_j=({b_1^j}^+a_2^j), \qquad -1-\dot{x}_j=({b_2^j}^+a_1^j),$$

получим

$$S_k^j=c^ja_k^j, \qquad {S_k^j}^+={c^j}^+b_{\bar{k}}^j \qquad \bar{k}=3-k. \tag{2.31}$$

при $(x-x_j)^{-1}$**:** после подстановки в полученное уравнение условия (2.31) получим

$$\dot{a}_1^j+\lambda_1^ja_1^j+\sum_{l\neq j}a_1^l({b_1^l}^+a_2^j)\zeta(x_j-x_l)=0; \tag{2.32}$$

$$\dot{a}_2^j+\lambda_2^ja_2^j+\sum_{l\neq j}a_2^l({b_2^l}^+a_1^j)\zeta(x_j-x_l)=0; \tag{2.33}$$

и

$$\dot{c}_j+kc_j-\lambda_1^jc_j+\sum_{l\neq j}({b_1^j}^+a_2^l)c_l\Phi(z,x_j-x_l)=0;$$

$$\dot{c}_j+\frac{1}{k}c_j-\lambda_2^jc_j+\sum_{l\neq j}({b_2^j}^+a_1^l)c_l\Phi(z,x_j-x_l)=0.$$

Последная пара уравнений может быть представлена в виде

$$(\partial_t+kI+L_1)C=0; \tag{2.34}$$

$$(\partial_t+\frac{1}{k}I+L_2)C=0, \tag{2.35}$$

где

$$(L_1)_{ij}=\delta_{ij}(-\lambda_1^i)+(1-\delta_{ij})({b_1^i}^+a_2^j)\Phi(z,x_j-x_i);$$

$$(L_2)_{ij}=\delta_{ij}(-\lambda_2^i)+(1-\delta_{ij})({b_2^i}^+a_1^j)\Phi(z,x_j-x_i).$$

Условие совместности этой системы представляется в виде

$$\partial_t(L_2 - L_1) + [L_1, L_2] = 0. \tag{2.36}$$

Это уравнение эквивалентно уравнениям (2.24),(2.25), что с учетом (2.32),(2.33) и соответствующих результатов рассмотрения двойственного уравнения доказывает утверждение. □

В отношении рационального случая применимо аналогичное утверждение, кроме того случай при $\eta = 0$ может быть получен рациональным вырождением базовой эллиптической кривой. Приведем аналогичные результаты рассмотрения рационального случая. В качестве собственной функции в этом случае берется

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_1 = \sum_{j=1}^{n} S_1^j \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x - x_j}\right) \exp{(ky_+ + \frac{1}{k}y_-)},$$

$$\Psi_2 = \sum_{j=1}^{n} S_2^j \left(\frac{1}{z+\eta} + \frac{1}{x - x_j}\right) \exp{(ky_+ + \frac{1}{k}y_-)}.$$

Потенциал:

$$A_k = A_k^0 + \sum_{j=1}^{n} a_k^j {b_k^j}^+ \frac{1}{x - x_j} \qquad k = 1, 2. \tag{2.37}$$

Подставляя функцию в уравнение, получим систему на коэффициенты ряда Лорана. Единственным отличием от эллиптического случая будет то, что нужно еще потребовать $lim_{x \mapsto \infty} = 0$, действительно, функция, не имеющая полюсов в конечных точках и имеющая предел в бесконечности равный нулю является тождественно нулевой функцией.

Предложение 2 *Уравнение (2.2) с рациональным потенциалом (2.37) имеет решение в виде рациональной собственной функции и то же верно для двойственного уравнения (2.18) тогда и только тогда, когда выполняется следующая система уравнений*

при $\eta \neq 0$**:**

$$\dot{a}_1^j + \lambda_1^j a_1^j + \sum_{l \neq j} a_1^l ({b_1^l}^+ a_2^j)(\frac{1}{x_j - x_l} - \frac{1}{\eta}) = 0;$$

$$\dot{a}_2^j + \lambda_2^j a_2^j + \sum_{l \neq j} a_2^l ({b_2^l}^+ a_1^j)(\frac{1}{x_j - x_l} + \frac{1}{\eta}) = 0;$$

$$\dot{b}_1^j - \lambda_2^j b_1^j + \sum_{l\neq j} b_1^l ({b_2^j}^+ a_1^l)(\frac{1}{x_j - x_l} - \frac{1}{\eta}) = 0;$$

$$\dot{b}_2^j - \lambda_1^j b_2^j + \sum_{l\neq j} b_2^l ({b_1^j}^+ a_2^l)(\frac{1}{x_j - x_l} + \frac{1}{\eta}) = 0;$$

$$\ddot{x}_j = \sum_{l\neq j} \frac{({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) + ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l)}{x_j - x_l} + \frac{1}{\eta}\sum_{l\neq j}\Big(({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) - ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l)\Big);$$

$$\dot{\lambda}_1^j - \dot{\lambda}_2^j = \sum_{l\neq j} \frac{({b_2^j}^+ a_1^l)({b_1^l}^+ a_2^j) - ({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j)}{(x_j - x_l)^2};$$

при $\eta = 0$:

$$\dot{a}_1^j + \lambda_1^j a_1^j + \sum_{l\neq j} a_1^l ({b_1^l}^+ a_2^j)\frac{1}{x_j - x_l} = 0;$$

$$\dot{a}_2^j + \lambda_2^j a_2^j + \sum_{l\neq j} a_2^l ({b_2^l}^+ a_1^j)\frac{1}{x_j - x_l} = 0;$$

$$\dot{b}_1^j - \lambda_2^j b_1^j + \sum_{l\neq j} b_1^l ({b_2^j}^+ a_1^l)\frac{1}{x_j - x_l} = 0;$$

$$\dot{b}_2^j - \lambda_1^j b_2^j + \sum_{l\neq j} b_2^l ({b_1^j}^+ a_2^l)\frac{1}{x_j - x_l} = 0;$$

$$\ddot{x}_j = \sum_{l\neq j} \frac{({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j) + ({b_1^l}^+ a_2^j)({b_2^j}^+ a_1^l)}{x_j - x_l};$$

$$\dot{\lambda}_1^j - \dot{\lambda}_2^j = \sum_{l\neq j} \frac{({b_2^j}^+ a_1^l)({b_1^l}^+ a_2^j) - ({b_1^j}^+ a_2^l)({b_2^l}^+ a_1^j)}{(x_j - x_l)^2}.$$

Эти системы приводятся преобразованием (2.26) к системам (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) и (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) соответственно. Доказательство утверждения 2 выглядит аналогично. Полученное представление совместности системы в виде (2.36) в рациональном случае записывается в терминах операторов:

$$(L_1)_{jl} = \delta_{jl}(-\lambda_1^j + \frac{1}{z+\eta}({b_1^j}^+ a_2^j)) + (1-\delta_{jl})({b_1^j}^+ a_2^l)(\frac{1}{x_j - x_l} + \frac{1}{z+\eta});$$

$$(L_2)_{jl} = \delta_{jl}(-\lambda_2^j + \frac{1}{z}({b_2^j}^+ a_1^j)) + (1-\delta_{jl})({b_2^j}^+ a_1^l)(\frac{1}{x_j - x_l} + \frac{1}{z}).$$

2.2.1 Спектральная кривая

Понятие спектральной кривой неявно содержится в предыдущих рассуждениях. Вычитая выражения (2.34) и (2.35), получим следующее уравнение

$$((k - \frac{1}{k})I + L)C = 0,$$

где $L = L_1 - L_2$. Уравнение кривой представляется как равенство нулю определителя этого линейного оператора

$$det((k - \frac{1}{k})I + L) = 0. \tag{2.38}$$

Действительно, коэффициенты данного полинома являются интегралами движения системы. Это следует из представления Лакса. Для удобства перейдем к другой кривой Γ, полученной из этой отождествлением k и $-\frac{1}{k}$. На языке уравнения кривой это преобразование выглядит как переход к новым координатам $\kappa = \frac{1}{2}k - \frac{1}{k}, z$. Этот переход обоснован тем, что в действительности собственная функция Ψ зависит только от этих параметров, то есть на разных листах этого двулистного накрытия собственная функция принимает одинаковые значения.

Лемма 1 *В эллиптическом случае уравнение кривой преобретает вид*

$$R(\kappa, z) = \sum_{i=0}^{n} r_i(z)\kappa^i$$

где $r_i(z)$ - эллиптические функции переменной z, которые не зависят от t, x и имеют вид

$$r_i(z) = I_i^0 + \sum_{s=0}^{n-i-2} I_{is}\partial_z^s\wp(z).$$

Кроме того, в окрестности $z = 0$ верно следующее

$$R(\kappa, z) = 2^n \prod_{i=1}^{n}(\kappa + \nu_i z^{-1} + h_i(z)) \tag{2.39}$$

где $h_i(z)$ - регулярные функции и $\nu_i = 1$ если $i > 2l$.

Доказательство Матричные элементы L_{ij} являются эллиптическими функциями переменной z с существенной особенностью в $z = 0$, однако $r_i(z)$ являются мероморфными, так как $L(t, z)$ представима в форме

$$L(t, z) = G(t, z)\tilde{L}(t, z)G^{-1}(t, z), G_{ij} = \delta_{ij}\exp(\zeta(z)x_i(t)).$$

В окрестности $z = 0$ имеем разложение

$$\tilde{L}(t, z) = -\frac{1}{z}(F(t) - 2I) + O(z^0)$$

где $F_{ij} = ((b_1^{i+}a_2^j) - (b_2^{i+}a_1^j)), F_{ii} = 2$. Так как $r_i(z)$ имеет полюс только при $z = 0$ и степени не больше $n - i$, то верно представление (2.39), где $2\nu_i$ - собственные значения $F - 2I$. А так как $F(t)$ имеет ранг $2l$, то собственное значение 1 имеет кратность $n - 2l$.$\square$

В рациональном случае уравнение кривой представляет собой равенство нулю полинома по $\kappa, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+\eta}$, где степень по $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+\eta}$ равна l, а по κ равна n. A priori, R - полином по $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+\eta}$ степени n, но учитывая то, что при степенях $\frac{1}{z}$ и $\frac{1}{z+\eta}$ стоят миноры матрицы ранга l, получим требуемый результат.

Лемма 2 *В разложении $R(\kappa, z)$ в ряд в точке $z = \infty$ по степеням $\frac{1}{z}$*

$$R(\kappa, z) = R_0(\kappa) + \frac{1}{z}R_1(\kappa) + ...$$

верно $R_1(\kappa) = d_\kappa R_0(\kappa)$.

Доказательство

$$[X, L(t, \infty)] = F - 2I,$$

где $X = diag(x_j)$,

$$L(t, z) + 2\kappa I = L(t, \infty) + \frac{1}{z}[X, L(t, \infty)] + 2(\kappa + \frac{1}{z})I + O(\frac{1}{z^2})$$

$$= (I + \frac{1}{z}X)(L(t, \infty) + 2(\kappa + \frac{1}{z})I)(I + \frac{1}{z}X)^{-1} + O(\frac{1}{z^2}).$$

Таким образом $R(\kappa, z) = R_0(\kappa + \frac{1}{z}) + O(\frac{1}{z^2}) = R_0(\kappa) + \frac{1}{z}d_\kappa R_0(\kappa) + O(\frac{1}{z^2})$, $\square$.

Лемма 3 *Род спектральной кривой в рациональном случае $g = (l-1)(n-1)+(n-l)l$.*

Доказательство В рациональном случае имеет место следующее представление для R в точке $z = 0$

$$R = 2^n \prod_{j=1}^{l}(\kappa + \nu_j \frac{1}{z} + h_j(z)) \prod_{j=l+1}^{n} (\kappa + h_j(z)), \tag{2.40}$$

которое позволяет представить Γ как n-листное накрытие над плоскостью z. Тогда по теореме Римана-Гурвица

$2(g-1) = -2n + \nu$ где ν количество точек ветвления, т.е. количество нулей функции $\partial_\kappa R(\kappa, z)$ на Γ, но так как она мероморфна, то имеет столько же нулей, сколько и полюсов. Полюса могут находиться только над $z = 0$ или $z = -\eta$. Используя представление (2.40) получим, что порядок полюса $d_\kappa R$ равен $l(n-1) + (n-l)l$, и такой же над $z = -\eta$. $\square$

В отличие от спиновых систем CM и RS, в данном случае при $l = 1$ кривая не является рациональной.

Лемма 4 *Род спектральной кривой в эллиптическом случае*

$$g = 2nl - l(2l+1) + 1.$$

Доказательство Дословно повторяет доказательство утверждения 3.4 [5] с заменой l на $2l$ и использует представление (2.39). $\square$

В силу представления Лакса $C(t,P) = S(t,P)C(0,P)$, где $S(t,P)$ - фундаментальное решение уравнения $(\partial_t + k + L_1)S(t,P) = 0$, нормированное условием $S(0,P)$ - единичная матрица, поэтому $C(t,P)$ имеет те же полюса, что и $C(0,P)$. Подсчитаем их количество m.

Лемма 5 *В рациональном случае* $m = g + n - 1$, *а в эллиптическом* $m = g - 1$.

Доказательство. Построим функцию

$$W(z) = (det(c_i(M_j)))^2$$

где M_j точки кривой над z. Эта функция имеет двойные полюса в полюсах C и нули в точках ветвления порядка 1. Поэтому $m = \frac{\nu}{2}$, $\square$.

2.2.2 Аналитические свойства собственных функций

Рациональный случай

Представим $c^j = \exp(-\kappa t)d^j$, тогда из (1.17) следует

$$\lambda_1^j d^j = \frac{1}{z+\eta}(b_1^{j+} a_2^j)d^j + \partial_t d^j + \sum_{l\neq j}(b_1^{j+} a_2^l)(\frac{1}{z+\eta} + \frac{1}{x_j - x_l})d^l \qquad (2.41)$$

и $(2\kappa I + L)D = 0$.

Лемма 6 $d_\kappa \frac{1}{z} = -1$ *в точках кривой* Γ *над* $z = \infty$.

Доказательство.Продифференцируем $R_0(\kappa) + \frac{1}{z}d_\kappa R_0(\kappa) + O(\frac{1}{z^2})$ по κ в этих точках. $\square$

Лемма 7 *В точках* Q_j *над* $z = \infty$ *верно*

$$\partial_\kappa d^i = (\mu_j + t - x_i)d^i.$$

Доказательство. Представим

$$(2\kappa I + L)D = (L(t,\infty) + 2\kappa I + \frac{1}{z}F_1 + \frac{1}{z+\eta}F_2)D = 0,$$

и продифференцируем по κ в точках над $z=\infty$. Получим

$$(L(t,\infty) + 2\kappa_j I)\partial_\kappa D = (F-2I)D.$$

Кроме того $L(t,Q_j)(-XD) = [X,L]D = (F-2I)D$. Отсюда следует, что

$$\partial_\kappa D(t,Q_j) = -XD(t,Q_j) + \mu_j(t)D(t,Q_j). \tag{2.42}$$

Найдем функцию $\mu_j(t)$. Для этого продифференцируем (2.42) по t и воспользуемся (2.41), которое запишем в виде $\dot{D} = MD$.

$$\partial_\kappa MD + M\partial_\kappa D = -XMD - \dot{X}D + \dot{\mu_j}(t)D + \mu_j(t)MD,$$

кроме того $[M,X] = F_1 + \dot{X} + I$ и $\partial_\kappa M = F_1$. Из всего этого следует, что $\dot{\mu_j}(t) = -1$, а приняв условия нормировки $d^1(0) = 1, \partial_\kappa d^1(0) = 0$ получим $\mu_j = \mu_j(0) = x_1(0), \mu_j(t) = -t + \mu_j$. $\square$

Лемма 8 *Функция Ψ удовлетворяет свойству*

$$\partial_\kappa \Psi = \mu_j \Psi \tag{2.43}$$

в точках Q_j.

Доказательство. Используя введенные коэффициенты d^j, представим Ψ_1 в виде

$$\Psi_1 = \sum \tilde{S}_1^i(\frac{1}{z} + \frac{1}{x-x_i})\exp\kappa(x-t) \tag{2.44}$$

где $\tilde{S}_1^i = d^i a_1^i$. Тогда

$$\partial_\kappa\Psi_1 - \mu_j\Psi_1 =$$
$$((x-t-\mu_j)\sum a_1^i d^i(\frac{1}{z} + \frac{1}{x-x_i}) + \partial_\kappa\frac{1}{z}\sum a_1^i d^i + \sum a_1^i\partial_\kappa d_i(\frac{1}{z} + \frac{1}{x-x_i}))\exp\kappa(x-t)$$

Учитывая лемму 6 найдем значения вычетов этого выражения в точках $x = x_i$

$$a_1^i((x_i - t - \mu_j)d^i + \partial_\kappa d^i)\exp\kappa_j(x-t),$$

которые обращаются в нуль в силу леммы 7. При $x \mapsto \infty$ обращение в нуль тавтологично. Этим и доказывается лемма. Для Ψ_2 рассуждения аналогичны.

Для выяснения свойств собственной функции нам еще потребуется следующая лемма. Обозначим $\tilde{\Psi}$ матрицу в которой столбцами являются разложения в ряд по локальному параметру в точках $\kappa = \infty$ функций $\Psi^q, q = 1, ..., 2l$.

$$\tilde{\Psi} = (\sum_{j=-1}^{+\infty} F_j \eta^{-j}) \exp(\eta(t + \sigma x)), \tag{2.45}$$

где $\frac{1}{\eta}$ -локальный параметр.

Лемма 9 *F_{-1} не зависит от t, x.*

Доказательство. Зависимости от x не будет поскольку при $\frac{1}{z}$ стоит функция независящая от x. Подставим $\tilde{\Psi}$ в уравнение (2.2), коэффициент при η^2 в полученном ряде таков

$$F_{-1} + \sigma F_{-1} \sigma = 0, \tag{2.46}$$

где $\sigma = Diag(\underbrace{1, \cdots, 1}_{l}, \overbrace{1, \cdots, 1}^{l})$ а при η

$$\partial_t F_{-1} + F_0 + \sigma F_0 \sigma + A F_{-1} = 0, \tag{2.47}$$

что с учетом (2.46),то есть блочной структуры матрицы F_{-1} дает $\partial_t F_{-1} = 0$, так как в ненулевых для $\partial_t F_{-1}$ блоках оставшееся выражение в (2.47) обращается в 0.$\square$

Таким образом верно следующее

Предложение 3 *Функция Ψ определена на кривой Γ рода g и имеет $2l$ существенных особенностей в точках $P_i^+(\kappa = \infty, z = 0), P_i^-(\kappa = \infty, z = -\eta), i = 1...l$, вида*

$$(\Psi_+^{-1} \kappa + \Psi_+^0 + ...) \exp \kappa(x - t)$$

в P_i^+ и

$$(\Psi_-^{-1} \kappa + \Psi_-^0 + ...) \exp \kappa(x + t)$$

в P_i^-, имеет $g + n - 1$ полюсов $\gamma_1, ...\gamma_{g+n-1}$, независящих от t, x, удовлетворяет свойствам (2.43). Кроме того Ψ^{-1} не зависит от t, x.

Предложение 4 *Функция Ψ^+ определена на кривой Γ рода g и имеет $2l$ особенностей вида*

$$(\Psi_+^{-1+} \kappa + \Psi_+^{0\,+} + ...) \exp(-\kappa(x - t))$$

в P_i^+ и

$$(\Psi_-^{-1+} \kappa + \Psi_-^{0\,+} + ...) \exp(-\kappa(x + t))$$

в P_i^-, имеет $g + n - 1$ полюсов $\gamma_1{}^+, ...\gamma_{g+n-1}{}^+$, независящих от t, x, удовлетворяет свойствам (2.43). Кроме того Ψ^{-1+} не зависит от t, x.

Эллиптический случай

Предложение 5 *Функция Ψ определена на кривой Γ рода g и является мероморфной вне $2l$ точек P_i, имеет $g-1$ полюсов $\gamma_1, ..., \gamma_{g-1}$, не зависящих от t, x. В окрестности $P_i, i = 1, ..., l$ она имеет вид*

$$\Psi_\alpha(x,t,P) = (\chi_0^{\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{\alpha i}(x,t) z^s) \exp(\lambda_i(x+t)) \Psi_1(0,0,P)$$

при $i = l+1, ..., 2l$

$$\Psi_\alpha(x,t,P) = (\chi_0^{\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{\alpha i}(x,t) z^s) \exp(\lambda_i(x-t)) \Psi_1(0,0,P)$$

где $\lambda_i(z) = (1-\nu_i)z^{-1} - h_i(z))$ где h_i регулярна в окрестности $z = 0$ и $\chi_0^{\alpha i}$ - константа.

Доказательство. Что касается независимости полюсов, то она следует из представления Лакса аналогично рациональному случаю. Теперь обозначим $\tilde{C} = Ce^{\frac{1}{\kappa}t}$, получим

$$(2\kappa + L)\tilde{C} = 0$$

$$(\partial_t + L_2)\tilde{C} = 0 \tag{2.48}$$

$$(\partial_t + 2\kappa + L_1)\tilde{C} = 0. \tag{2.49}$$

Функция Ψ выражается в виде

$$\Psi = \sum \tilde{S}_j \Phi(z, x - x_j) \exp(\kappa(x+t))$$

где $\tilde{S}_j = S_j \exp(\frac{1}{\kappa}t)$.

Матрицы L_1, L_2 в окрестности $z = 0$ представляются в виде

$$L_1 = -\frac{1}{z}(F_1 - \dot{X} + I) + O(z^0), \qquad L_2 = -\frac{1}{z}(F_2 + \dot{X} + I) + O(z^0),$$

где $F_1 = (b_1^{i+} a_2^j), F_2 = (b_2^{i+} a_1^j), \dot{X} = Diag(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n), F = F_1 - F_2, v_i$ - собственные значения $F, v_i = 0, i > 2l, \nu_i = 1 - \frac{v_i}{2}$. Заметим, что F имеет ранг $2l$ в общем положении, а F_1, F_2 имеют ранг l, поэтому можно так занумеровать v_i, e_i- собственные вектора, что для $i < l+1$ $F_1 e_i = v_i e_i, F_2 e_i = 0$, при $i = l+1, ..., 2l, F_1 e_i = 0, F_2 e_i = -v_i e_i$ и при $i > 2l, F_1 e_i = 0, F_2 e_i = 0$. Рассмотрим в окрестности $P_i, i < l+1$ уравнение (2.49):

$$(\partial_t + 2\kappa_i - \frac{1}{z}(v_i + \dot{X} - I) + O(z^0))\tilde{C} = 0$$

следовательно $\tilde{C}(t) = \exp(-\frac{1}{z}t + X(t)\frac{1}{z})\bar{C}(t)$, где $\bar{C}(t)$ - регулярная в окрестности P_i функция. Утверждение при $i < l+1$ тем самым доказано. В точках $P_i, i = l+1, ..., 2l$ рассматривая уравнение (2.48) имеем

$$(\partial_t - \frac{1}{z}(-v_i + \dot{X} + I) + O(z^0))\tilde{C} = 0 \qquad (2.50)$$

поэтому $\tilde{C}(t) = \exp(\frac{1}{z}(X(t) + t) - \frac{1}{z}v_i t)\bar{C}(t)$, где $\bar{C}(t)$ - регулярная в окрестности P_i функция. Заметим, что $\frac{1}{z}(1-v_i)+\kappa_i = -\kappa_i - \frac{1}{z} + O(z^0)$, поэтому в P_i при $i = l+1, ..., 2l$ особенность будет также иметь указанный вид.

Докажем, что при $i > 2l$ существенной особенности не будет. Из (2.50) следует, что $\tilde{C}(t) = \exp(\frac{1}{z}(X(t) + t))\bar{C}$, что при $\kappa_i = \frac{1}{z} + \mu_i$ и влечет желаемое.

Независимость $\chi_0^{\alpha i}$ от t, x доказывается аналогично рациональному случаю. □

Предложение 6 *Решение двойственного уравнения Ψ^+ является функцией на кривой Γ, мероморфной вне $P_i, i = 1, ..., 2l$. Она имеет $g-1$ полюсов $\gamma_1^+, ..., \gamma_{g-1}^+$, не зависящих от t, x. В окрестности $P_i, i = 1, ..., l$ она имеет вид*

$$\Psi_\alpha^+(x,t,P) = (\chi_0^{+,\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{+,\alpha i}(x,t)z^s)\exp(-\lambda_i(x+t))\Psi_1^+(0,0,P),$$

при $i = l+1, ..., 2l$

$$\Psi_\alpha^+(x,t,P) = (\chi_0^{+,\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} \chi_s^{+,\alpha i}(x,t)z^s)\exp(-\lambda_i(x-t))\Psi_1^+(0,0,P),$$

где $\chi_0^{+,\alpha i}$- константа.

Заметим, что $\Psi_1(0,0,P)$ имеет $2l$ полюсов в точках $P_i, i = 1, ..., 2l$, а в остальных P_i полюсов нет, так как $c_j(0,P) = (c_j^{(i)}(0) + O(z))\exp(x_j(0) - x_1(0))$ при $\sum_j F_{kj}c_j^{(i)}(t) = 2(1-\nu_i)c_k^{(i)}(t)$.

В дальнейшем будем использовать не Ψ а $\tilde{\Psi} = \Psi f$, где f имеет нули в точках γ_i и $P_i^{\pm}$ и имеет полюса в Q_j и $2l$ фиксированных полюсов $\tilde{\gamma}_i$. Такая функция единственна и имеет еще $g-1$ полюс $\tilde{\gamma}_{2l+i}$. В дальнейшем будем опускать тильду.

Таким образом мы получили следующий набор спектральных данных:

1. кривая рода g специального вида (2.39), в рациональном случае с дополнительным условием леммы 2, что свидетельствует о том, что не любая риманова поверхность предписанного вида может быть получена рациональным вырождением базовой эллиптической кривой;

2. набор полюсов собственной функции γ_i и набор коэффициентов μ_j в рациональном случае;

3. фиксированный вид особенностей собственных функций, который определяется в предложениях 3, 5.

Кроме того аналогичными свойствами обладают двойственные функции.

2.3 Обратная спектральная задача

В этом разделе по набору спектральных данных будет построена функция Бейкера-Ахиезера. Будет доказано, что построенная функция является решением вспомогательной задачи (2.2). Кроме того, будут найдены все решения систем, полученных в разделе 2.2.

2.3.1 Рациональный случай

Рассмотрим кривую Γ рода g, задаваемую следующим уравнением: $R(\kappa, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+\eta}) = 0$, где R - полином по $\kappa, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+\eta}$ степеней n, l, l соответственно. От полинома R потребуем, чтобы в разложении в точке $z = \infty$, $R = R_0 + \frac{1}{z}R_1 + O(\frac{1}{z^2})$ выполнялось $R_1 = d_\kappa R_0$. На этой кривой рассмотрим пространство функций, имеющих $2l$ существенных особенностей в точках $P_i^\pm$ вида

$$\Psi_\alpha = (f_0^{\alpha i} + \sum_{s=1}^{\infty} f_s^{\alpha i} \kappa^{-s}) e^{\kappa(x \mp t)}, \tag{2.51}$$

имеющих $g + 2l - 1$ полюсов γ_k , n полюсов Q_j, для которых выполняется условие (2.43) записанное для функции $\frac{\Psi}{f}$. По теореме Римана-Роха размерность этого пространства равна $2l$, так что, приняв в качестве нормировки условия $f_0^{\alpha j} = \delta^{\alpha j}$, мы полностью определим функцию Ψ. Аналогично работе [5] рассмотрим функции $g_j(P)$, обладающие свойствами:

1. имеют полюса в γ_k,

2. имеют полюс с вычетом 1 в точке Q_j,

3. $g_j(P_k^+) = 0$,

4. имеют особенности в точках P_k^- вида

$$(\frac{1}{\kappa}g_{-1}+...)e^{2\kappa t}.$$

Для этого рассмотрим единственный голоморфный вне P_k^- дифференциал $d\Omega$, имеющий вид $d\Omega = d(\kappa + O(\frac{1}{\kappa}))$ в точках P_k^- и имеющий нулевые a-периоды. Тогда

$$g_j(P) = e^{2\Omega t}\frac{\theta(A(P)+Ut+R_0)\prod_{i=1}^{2l}\theta(A(P)+S_i)\theta(A(P)+S_0)}{\theta(A(P)+R_0)\prod_{i=1}^{2l-1}\theta(A(P)+R_i)\theta(A(P)+R^*)}$$

с точностью до константы, нормирующей вычет, где

$$R_0 = -K - \sum_{s=1}^{g} A(\gamma_s), \qquad R_i = -K - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s) - A(\gamma_{g-1+i}),$$

$$S_i = -K - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s) - A(P_i), \qquad S_0 = \sum R_i - \sum S_i + R^*,$$

$$R^* = -K - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s) - A(Q_j),$$

$A(P)$ - преобразование Абеля, K - вектор римановых констант, $\Omega = \int_{P_0}^{P} d\Omega$, $U = \frac{1}{2\pi i}\int_{b_i} d\Omega$, P_0-точка участвующая в преобразовании Абеля, θ - функция Веерштрасса. Аналогично строятся функции $h_\alpha(P)$, имеющие полюса в точках γ_k, обладающие следующими особенностями в точках P_i^-

$$h_\alpha(P) = (\delta_\alpha^{l+i}+...)e^{2\kappa t},$$

и такие, что $h_\alpha(P_i^+) = \delta_{\alpha i}$, Все эти функции определены однозначно. Функцию Ψ можно записать в виде:

$$\Psi_\alpha(P,x,t) = (h_\alpha(P,t) + \sum_{j=1}^{n} g_j(P,t) r_{j\alpha}(x,t))e^{\kappa(x-t)}. \tag{2.52}$$

Заметим, что в отличие от CM и RS функции g_j и h_α не являются рациональными.

Лемма 10 *Ψ_α можно записать в виде*

$$\Psi_\alpha = \frac{det\begin{pmatrix} h_\alpha(P,t) & g_1(P,t) & \dots & g_N(P,t) \\ h_\alpha(Q_1,t) & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \theta_{ij} & \vdots \\ h_\alpha(Q_N,t) & \vdots & \dots & \ddots \end{pmatrix}}{det(\theta_{ij})} e^{\kappa(x-t)}, \tag{2.53}$$

где $\theta_{ij} = g_j(Q_i), \theta_{ii} = x - t + g_i^{(1)} + \sigma_i$, где $\sigma_j = \mu_j + \frac{f_j^1}{f_j^0}$. Из этого видно, что полюса по x этой функции $x_j(t)$ находятся из условия $det\theta(x_j(t),t) = 0$.

Доказательство. В точке Q_j имеет место

$$\partial_k \frac{\Psi_\alpha}{f} = \mu_j \frac{\Psi_\alpha}{f}. \tag{2.54}$$

В точке Q_j

$$\Psi_\alpha = \frac{R^{-1}_{j\alpha}(x,t)}{\kappa - \kappa_j} + R^0_{j\alpha}(x,t) + O(\kappa - \kappa_j), \qquad f = \frac{f^0_j}{\kappa - \kappa_j} + f^1_j + O(\kappa - \kappa_j)$$

отсюда

$$\frac{\Psi_\alpha}{f} = \frac{R^{-1}_{j\alpha}(x,t)}{f^0_j} + (\kappa - \kappa_j)(\frac{R^0_{j\alpha}}{f^0_j} - \frac{f^1_j}{{f^0_j}^2} R^{-1}_{j\alpha}) + O(\kappa - \kappa_j)^2.$$

Подставляя последнее в (2.54), получим

$$R^0_{j\alpha} = (\mu_j + \frac{f^1_j}{f^0_j}) R^{-1}_{j\alpha}.$$

Подставляя сюда

$$R^{-1}_{j\alpha} = "exp"(\kappa_j) r_{j\alpha}(x,t), R^0_{j\alpha} = "exp"(\kappa_j)((g^{(1)}_j + x - t) r_{j\alpha} + \sum_{k \neq j} g_k(Q_j) r_{k\alpha} + h_\alpha(Q_j))$$

получим систему линейных уравнений

$$\sum_k \theta_{jk}(x,t) r_{k\alpha} = -h_\alpha(Q_j)$$

$\square$.

Лемма 11 *Функцию Ψ можно представить в виде*

$$\Psi_1 = \sum S^j_1 (\frac{1}{z} + \frac{1}{x - x_j}) e^{\kappa(x-t)}$$

$$\Psi_2 = \sum S^j_2 (\frac{1}{z+\eta} + \frac{1}{x - x_j}) e^{\kappa(x-t)}.$$

Доказательство. Представим Ψ в виде

$$\Psi_\alpha = (h_\alpha + \sum_i S_{i\alpha}(t,P) \frac{1}{x - x_i(t)}) e^{\kappa(x-t)}. \tag{2.55}$$

Рассмотрим сумму вычетов выражения (2.53) без экспоненциальной части по x в точках x_j. Сравнивая полученное выражение с вычетом в бесконечности, несложно проверить, что $\sum_i S_{i\alpha} = -\sum_j g_j(P,t) h_\alpha(Q_j,t)$. Докажем, что

$$-\sum g_j(P,t) h_\alpha(Q_j,t) = h_\alpha(P,t) z$$

при $\alpha = 1...l$ и

$$-\sum g_j(P,t)h_\alpha(Q_j,t) = h_\alpha(P,t)(z+\eta)$$

при $\alpha = l+1...2l$. Рассмотрим первый случай. Правая и левая часть выражения имеют одинаковые вычеты в точках Q_j, имеют нули в точках P_i^+. Рассмотрим разность правой и левой частей. Эта функция имеет $g+2l-1$ полюсов и l нулей. Размерность пространства таких функций составляет l по теореме Римана-Роха. Заметим, что в точках P_i^- в разложении этой функции по параметру первый коэффициент обращается в нуль, что влечет l дополнительных линейных однородных условий. Из этого следует, что разность будет нулевая.

Докажем, что

$$S_{i\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k^{(i)} g_k(P)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} det\Theta_\alpha^{(i)}(t), \tag{2.56}$$

где $\Theta_\alpha^{(i)}(t)$ получается из Θ заменой первого столбца на $h_\alpha(Q_j)$ и подстановкой $x = x_i(t)$. Так как $Det\Theta(x_i,t) = 0$, то можно записать условие линейной зависимости столбцов в виде

$$\theta_{k1}(x_i,t) = \sum_{j=2}^N \lambda_j^i(t)\theta_{kj}(x_i,t). \tag{2.57}$$

Кроме того $Det\Theta$ можно записать в виде $\prod_j(1+\frac{1}{\kappa_j^2})\prod_j(x-x_j(t))$.
Из числителя дроби в выражении (2.53) вклад в вычет будет давать $\sum_j g_j(P)det\Theta_\alpha^{ij}$ где Θ_α^{ij} получается из Θ при $x = x_i$ и заменой j-го столбца на столбец $h_\alpha(Q_k)$, но учитывая (2.57) получим $\Theta_\alpha^{ij} = \lambda_j\Theta_\alpha^{i1} = \lambda_j\Theta_\alpha^{(i)}$, что при условии $\lambda_1 = -1$ доказывает правильность (2.56). □

Предложение 7 *Функция Ψ является решением уравнения*

$$(\partial_t - \sigma\partial_x + A)\Psi = 0,$$

где $A = -(f^1 - \sigma f^1\sigma)$.

Доказательство. Производится аналогично работе [5]. Введем матрицу $\tilde\Psi$ состоящую из $2l$ столбцов представления типа (2.51) функции Ψ в точках P_k. Матрицу $\tilde\Psi$ можно представить в виде $\tilde\Psi = \Phi e^{\eta(t+\sigma x)}$, где $\frac{1}{\eta}$ формальный локальный параметр в точках P_k. Φ имеет вид $I + \Phi_1\frac{1}{\eta} + \ldots$. Подействуем на Ψ, а вместе с этим и на $\tilde\Psi$ оператором $\partial_t - \sigma\partial_x$, получим

$$(\eta(I - \sigma I\sigma) + (\Phi_1 - \sigma\Phi_1\sigma) + \ldots)e^{\eta(t+\sigma x)}. \tag{2.58}$$

Прибавляя к этому выражению $-(\Phi_1 - \sigma\Phi_1\sigma)\tilde{\Psi}$, получим матрицу для некоторой функции, обладающей теми же аналитическими свойствами, что и функция Ψ, но с условиями нормировки $\Phi_0 = 0$. Заметим, что данные условия представляют из себя однородную систему уравнений на пространстве функций Бейкера-Ахиезера, размерности $2l$, как было показано в начале этого раздела. Поэтому результат применения оператора к функции Бейкера-Ахиезера является нулевой функцией. $\Box$

A будет иметь вид $A = A_0 + \sum \frac{p_i}{x-x_i}$. Из (2.56) будет следовать,что p_i имеет ранг один.

Докажем, что $A_0^1 = -\frac{1}{\eta}\sum p_i^1, A_0^2 = \frac{1}{\eta}\sum p_i^2$. Это следует из леммы 11, так как в точке P_i^- коэффициент при $\frac{1}{\kappa}$ у $\sum S_1^i \frac{1}{z}$ отличается от такого же коэффициента в разложении $\sum S_1^i$ ровно в $-\frac{1}{\eta}$. Аналогично получим второе утвеждение.

Введем двойственную функцию Ψ^+. Для этого определим мероморфный дифференциал $d\Omega_1$ имеющий полюса порядка 2 в P_j и обращающийся в 0 в $g+2l-1$ точках γ_k. Пусть γ_k^+ остальные $g+2l-1$ нулей $d\Omega_1$. Тогда двойственную функцию определим подобным образом. В качестве полюсов возьмем γ_k^+ и при выполнении свойства, аналогичного (2.54), положим

$$\sigma_j^+ = -\sigma_j. \tag{2.59}$$

Предложение 8 *Функция Ψ^+ является решением уравнения*

$$\Psi^+(\partial_t - \sigma\partial_x + A) = 0,$$

где A тот же, что в предложении 7.

Доказательство. То, что Ψ^+ будет решением данного уравнения с

$$A^+ = -(\Phi_1^+ - \sigma\Phi_1^+\sigma)$$

доказывается аналогично. Докажем, что $A^+ = A$. Для этого подсчитаем сумму вычетов мероморфного дифференциала $\psi^{+p}\psi_\alpha d\Omega_1$. С одной стороны она равна нулю, с другой - сумме вычетов в точках Q_j, что с использованием (2.59) равно сумме вычетов в P_j, что равно $\Phi_1^{ij+} + \Phi_{ij}^1 = 0$. Это и доказывает равенство потенциалов прямого и двойственного уравнений. $\Box$

Решение системы. Решена система (2.11)...(2.14) в следующем виде:

$x_i(t)$ - корни полинома по x $det\Theta$, где Θ- матрица, состоящая из элементов

$$\theta_{ii} = x - t + g_i^{(1)} + \sigma_i, \theta_{ij} = g_j(Q_i);$$

a^i, b^i находятся с точностью до пропорциональности

$$a^i_\alpha = det\Theta^{(i)}_\alpha, \qquad b^{ij} = \left(\frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k^{(i)} g_k^{1j}}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \right).$$

где матрица $\Theta^{(i)}_\alpha(t)$ получается из Θ заменой первого столбца на столбец $h_\alpha(Q_j)$ и подстановкой $x = x_i(t)$.

2.3.2 Эллиптический случай

Стандартным является утверждение о том, что существует единственная функция со следующими свойствами:

1. $\Psi_\alpha(x,t,P)$ на кривой Γ рода g имеет $g+2l-1$ полюс $\gamma_1, ..., \gamma_{g+2l-1}$
2. имеет существенные особенности в точках $P_j, j = 1,..,l$ вида

$$\Psi_\alpha(x,t,P) = e^{w_j^{-1}(x+t)}(\delta_{\alpha j} + \sum_s^{\alpha j} F(x,t) w_j^s)$$

и при $j = l+1, ..., 2l$

$$\Psi_\alpha(x,t,P) = e^{w_j^{-1}(x-t)}(\delta_{\alpha j} + \sum_s^{\alpha j} F(x,t) w_j^s)$$

где $w_j(P)$ - локальный параметр в P_j

Единственность следует из теоремы Римана-Роха, а существование доказывается конструктивно: пусть $d\Omega^1, d\Omega^2$ единственные мероморфные дифференциалы, голоморфные вне P_j, такие что:

$$d\Omega^1 = d(w_j^{-1} + O(w_j))\text{в точках}P_j$$

$$d\Omega^2 = \begin{cases} d(w_j^{-1} + O(w_j)) & \text{в точках } P_j \text{ при } j = 1, ..., l \\ d(-w_j^{-1} + O(w_j)) & \text{в точках } P_j \text{ при } j = l+1, ..., 2l \end{cases}$$

нормированные условием $\int_{a_j} d\Omega^k = 0$.

Определим $U_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b_j} d\Omega^k$, тогда с точностью до нормировочной константы

$$\Psi_\alpha(x,t,P) = \frac{\theta(A(P) + U^{(1)}x + U^{(2)}t + Z_\alpha)\theta(Z_0)\prod_{j\neq\alpha}\theta(A(P)+S_j)}{\theta(A(P)+Z_\alpha)\theta(U^{(1)}x + U^{(2)}t + Z_0)\prod_{i=1}^{2l}\theta(A(P)+R_i)} e^{x\Omega^{(1)}(P) + t\Omega^{(2)}(P)} \tag{2.60}$$

где R_i, S_i равны введенным величинам для рационального случая,

$$Z_0 = -K - \sum_{i=1}^{g+2l-1} A(\gamma_i) + \sum_{j=1}^{2l} A(P_j), \qquad Z_\alpha = Z_0 - A(P_\alpha),$$

$\Omega^{(k)} = \int_{P_0}^{P} d\Omega^k$. Аналогично строится двойственная функция

$$\Psi_\alpha^+(x,t,P) = \frac{\theta(A(P) - U^{(1)}x - U^{(2)}t + Z_\alpha^+)\theta(Z_0^+)\prod_{j\neq\alpha}\theta(A(P)+S_j^+)}{\theta(A(P)+Z_\alpha^+)\theta(U^{(1)}x+U^{(2)}t - Z_0^+)\prod_{i=1}^{2l}\theta(A(P)+R_i^+)} e^{-x\Omega^{(1)}(P)-t\Omega^{(2)}(P)}$$

где

$$S_j^+ = -K - A(P_j) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s^+), \qquad R_i^+ = -K - A(\gamma_{g-1+i}^+),$$

$$K_0 = \sum_{i=1}^{g+2l-1}(A(\gamma_i) + A(\gamma_i^+)) - 2\sum_{j=1}^{2l} A(P_j), \qquad Z_0^+ = Z_0 - 2K - K_0, \qquad Z_\alpha^+ = Z_0^+ - A(P_\alpha).$$

Рассмотрим кривую Г специального вида, заданную уравнением

$$R(k,z) = k^n + \sum_{i+0}^{n-1} r_i(z)k^i = 0$$

где $r_i(z)$ эллиптические функции, голоморфные вне $z=0$. Кроме того потребуем, чтобы $k(P)$ имела n простых полюсов $P_1,...,P_n$ над $z=0$ с вычетами $\nu_i = 1$ при $i > 2l$. Тогда верно представление

$$R(k,z) = \prod_{i=1}^{n}(k + \nu_i z^{-1} + O(z^0))$$

в окрестности $z=0$.

Предложение 9 *Функция Ψ определенная по данной кривой может быть представлена в виде*

$$\Psi(x,t,P) = \sum_{i=1}^{n}\tilde{S}_i(t,P)\Phi(x - x_i(t), z)e^{kx}. \tag{2.61}$$

Доказательство. Докажем, что

$$\Psi(x + 2\omega_i, t, P) = \phi_i(P)\Psi(x,t,P) \tag{2.62}$$

где $\phi_i(P) = e^{2(k+\zeta(z))\omega_i - 2\eta_i z}$ и $2\omega_i$ - периоды базовой эллиптической кривой и $\eta_i = \zeta(\omega_i)$. Функция $\phi_i(P)$ корректно определена и имеет следующее представление в отмеченных точках P_j

$$\phi_i(P) = (1 + O(z))e^{2\omega_i(k_j(z)+\zeta(z))}.$$

Это представление влечет то, что правая и левая часть (2.62) имеют одинаковые полюса и одинаковые особенности в точках P_j. Следовательно, правая и левая части совпадают. Заметим, что (2.60) свидетельствует о том, что полюса Ψ по x не зависят от точки на кривой P. Поэтому существуют коэффициенты $\tilde{S}_i(t,P)$ такие что

$$F(x,t,P) = \Psi(x,t,P) - \sum_{i=1}^{n}\tilde{S}_i(t,P)\Phi(x - x_i(t), z)e^{kx}$$

голоморфная функция по x в фундаментальной области базовой эллиптической кривой. Существует единственная такая функция $F = 0$.$\square$

Аналогично доказывается, что

$$\Psi^{+}(x,t,P) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_i^{+}(t,P)\Phi(x - x_i(t), -z)e^{-kx}.$$

Как и в рациональном случае выполняется следующее

Предложение 10

$$(\partial_t - \sigma\partial_x + A)\Psi = 0,$$

$$\Psi^{+}(\partial_t - \sigma\partial_x + A) = 0,$$

где $A = -(F_1 - \sigma F_1 \sigma)$.

Из этого уравнения следует, что A является эллиптической функцией по переменной x. Таким образом A представляется в виде $A_0 + \sum A_i \zeta(x - x_i(t))$. Но $A_0 = 0$ в связи с представлением доказанным в (9). Утверждение 10 приводит к тому, что

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & A_i^1 \\ A_i^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $rank A_i^k = 1$. Рассмотрим функцию $\Psi^0_{\alpha,i}(t,P) = res_{x=x_i(t)}\Psi_\alpha(x,t,P)$, которая имеет следующие аналитические свойства как функция от P:

1. она мероморфна вне P_j и имеет полюса в точках $\gamma_1, ..., \gamma_{g+2l-1}$,

2. в окрестности точек P_j она представляется в виде

$$\Psi^0_{\alpha i} = \exp(w_j^{-1}x_i(t) \pm w_j^{-1}t)O(w_j).$$

По теореме Римана-Роха такая функция единственна с точностью до умножения на константу. Введем обозначения $\Psi^0_{\alpha,i}(t,P) = \phi_\alpha(t)\psi_{i0}(t,P)$. Тогда для компоненты функции Бейкера-Ахиезера верно представление:

$$\Psi_\alpha(x,t,P) = \frac{\phi_\alpha(t)\psi_{i0}(t,P)}{x - x_i(t)} + O((x - x_i(t))^0).$$

Поэтому $F_1 = \frac{\rho_i(t)}{x - x_i} + O((x - x_i(t))^0)$ где ранг $\rho_i = 1$. Следовательно ранг $rank A_i^k$ тоже равен 1.

Решение. Выражения

$$\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t + Z_0) = 0,$$

$$\tilde{a}_{i,\alpha}(t) = Q_i^{-1}(t)\frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t + Z_\alpha)}{\theta(Z_\alpha)\theta(S_\alpha)},$$

$$\tilde{b}_i^\alpha(t) = Q_i^{-1}(t)\frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha^+)}{\theta(Z_\alpha^+)\theta(S_\alpha^+)},$$

$$Q_i^2(t) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2l}\frac{\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha)\theta(U^{(1)}x_i(t) + U^{(2)}t - Z_\alpha^+)}{\theta(Z_\alpha)\theta(Z_\alpha^+)\theta(S_\alpha)\theta(S_\alpha^+)}$$

$$a_{i,\alpha}^1 = 2\tilde{a}_{i,\alpha}, a_{i,\alpha}^2 = 2\tilde{a}_{i,\alpha+l}$$

$$b_i^{\alpha 1} = \tilde{b}_i^{\alpha+l}, b_i^{\alpha 2} = \tilde{b}_i^\alpha$$

дают решение системы (2.3),...,(2.6).

Заметим, что это в действительности все решения системы так как на спектральные данные не налагалось никаких дополнительных ограничений и условия прямой спектральной задачи полностью согласованы с результатами обратной.

Заметим еще раз, что рациональный случай при $\eta = 0$ $A_0 = 0$ является непосредственным вырождением эллиптического случая $\zeta(x) \mapsto \frac{1}{x}$ и $\Phi(x,z) \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{z}$. К сожалению построить эллиптический аналог рационального случая при $\eta \neq 0$ не удалось.

2.4 Универсальный подход при построении гамильтоновой структуры

Полученные в разделе 2.2 системы были решены явно. Оказывается, что они являются гамильтоновыми. В этом разделе будет предъявлены их гамильтонианы и симплектические структуры на фазовом пространстве. Гамильтонианы будут построены явно, то есть в терминах фазового пространства. Симплектическая форма, как и в работах [22], [28], представляется в виде

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} res_{P_i}(< C^*(\delta L + \delta\kappa) \wedge \delta C >)dz, \tag{2.63}$$

где C^* - собственный вектор матрицы L, удовлетворяющий нормировке $< C^*C >= 1$. Обозначение κ соответствует удвоенному значению этого параметра, использованного в разделе 2.2. Заметим, что представление Лакса является описанием динамической системы на пространстве операторов L. Именно эта система и имеет описанную выше симплектическую структуру. Однако, в данном случае оператор является конечномерным и его матричные коэффициенты выражаются через координаты на фазовом пространстве рассматриваемой системы. Как будет показано далее эта симплектическая форма может быть преобразована в выражение в терминах фазовых переменных системы и будет определять симплектическую структуру фазового пространства.

Заметим, что уравнения (2.3),...,(2.10) инвариантны относительно преобразований

$$a_i^1 \mapsto W_1^{-1} a_i^1,$$

$$b_i^{2+} \mapsto b_i^{2+} W_1^{-1},$$

$$a_i^2 \mapsto W_2^{-1} a_i^2,$$

$$b_i^{1+} \mapsto b_i^{1+} W_2^{-1}.$$

Зафиксируем калибровку W_1, W_2 таким образом, что матрицы

$$W_1^{-1} \sum_i a_i^1 b_i^{2+} W_1, \qquad W_2^{-1} \sum_i a_i^2 b_i^{1+} W_2 \tag{2.64}$$

были диагональными. Будем обозначать преобразованные величины большими буквами A_i^k, B_j^m. Свойство диагональности матриц (2.64) приобретает вид:

$$\sum_i A_{il}^1 B_{im}^2 = \delta_{lm} k_l^1,$$

$$\sum_i A_{il}^2 B_{im}^1 = \delta_{lm} k_l^2.$$

Действительно, главная часть оператора Лакса в общем рациональном случае в точках $P_l, z = 0$ равна $(B_i^{1+} A_j^2)$. Собственный вектор в этих точках, согласно выбранной калибровке, будет пропорционален вектору B_{*m}^1 по нижнему индексу. Аналогично получим, что в точках $P_l, z = -\eta$, собственный вектор пропорционален B_{*m}^2. В эллиптическом и рациональном специальном случае необходимо принять в расчет, что

$$\sum_i A_{il}^1 B_{im}^1 = 0,$$

$$\sum_i A_{il}^2 B_{im}^2 = 0,$$

и это свойство инвариантно относительно калибровочных преобразований. Главная часть оператора Лакса в точках $P_l, z = 0$ равна $(B_i^{1+} A_j^2) - (B_i^{2+} A_j^1)$. Подставляя вектор B_{*m}^1 в этот оператор, получим

$$\sum_j ((B_i^{1+} A_j^2) - (B_i^{2+} A_j^1)) B_{jm}^1 = \sum_j (B_i^{1+} A_j^2) B_{jm}^1 = k_m B_{im}^1.$$

Аналогично показывается, что вектор B^2_{*m} также является собственным. В эллиптическом случае собственные вектора оператора Лакса в точках P_j имеют представление

$$c_i = z(c_i^j + O(z))e^{-\zeta(z)x_i}, \text{ при } j \le 2l, c_i = (c_i^j + O(z))e^{-\zeta(z)x_i}, \text{ при } j > 2l.$$

Вектора c^j по нижнему индексу будут пропорциональны векторам B^j. Выбирая в качестве условий нормировки на эти величины

$$\sum_{i=1}^{N} A_{im} c_i^j = \delta_{jm}, j \le 2l,$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_{im} c_i^j = 0, j > 2l,$$

получим для собственной функции Бейкера-Ахиезера уже известные условия нормировки в точках P_j

$$\Psi_q = (\delta_{jq} + O(z)) \exp(k_j x).$$

Это равенство эквивалентно требуемым условиям нормализации собственных функций. Заметим, что "угловые" переменные, определенные как дивизор полюсов решения вспомогательной линейной задачи, согласованы с приведенной нормировкой и полностью определяются условием:

$$\sum_{m=1}^{2l} \sum_{i=1}^{N} A_{im} c_i \Phi(-x_i, z) = 1.$$

Как и в работе [22] верно следующее

Предложение 11 *Симплектическая форма ω равна*

$$\omega = \sum_s \delta z(\gamma_s) \wedge \delta\kappa(\gamma_s). \qquad (2.65)$$

Доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 3.1. [22]. Выражение (2.65) имеет следующий смысл: спектральная кривая, возникающая при рассмотрении прямой и обратной задачи, снабжена парой функций на ней k, z. Значения этих функций в полюсах собственной функции γ_i определяют функции на пространстве спектральных данных. Тем самым универсальный подход к построению гамильтоновой структуры имеет свое описание в терминах пространства спектральных данных и динамической системы на нем. Этот факт является ключевым при построении переменных "действие-угол". Приведем теперь основные идеи доказательства этого предложения. Дифференциал $\Omega =< \Psi^* \delta L \wedge \delta\Psi >$ является мероморфным дифференциалом на спектральной кривой (существенные особенности сокращаются). Поэтому сумма вычетов этого выражения в отмеченных точках равна сумме всех остальных вычетов с отрицательным знаком. Среди остальных встречаются вычеты в полюсах функции Ψ, γ_i. Учитывая условие нормировки двойственной функции $< \Psi^* \Psi >= 1$ получим

$$res_{\gamma_s} \Omega =< \Psi^* \delta L \Psi > \wedge \delta z(\gamma_s) = \delta k(\gamma_s) \wedge \delta z(\gamma_s).$$

Кроме того, могут быть ненулевыми вычеты в точках ветвления поверхности, там где имеет полюс функция Ψ^*. Однако в этих точках дифференциал dz рассматриваемый как дифференциал на поверхности имеет ноль, поэтому этим исчерпываются все остальные полюса дифференциала Ω.

Предложение 12 *Симплектическая форма ω может быть представлена в виде*

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} (\delta \lambda_i \wedge \delta x_i + \delta B_i^{q1} \wedge \delta A_{iq}^2 - \delta B_i^{q2} \wedge \delta A_{iq}^1). \tag{2.66}$$

Доказательство этого факта полностью соответствует доказательству теоремы 3.2. [22] с заменой l на $2l$ при нумерации векторов:

$$A_i = (A_{i1}^2, \cdots, A_{il}^2, -A_{i1}^1, \cdots, -A_{il}^1);$$

$$B_i = (B_{i1}^1, \cdots, B_{il}^1, B_{i1}^2, \cdots, B_{il}^2).$$

А именно, производится прямое вычисление выражения (2.63). Приведем его для эллиптического случая. Представим $L = G\tilde{L}G^{-1}, \Psi = GC$ где $G = Diag(e^{\zeta(z)x_i})$. Тогда

$$\omega = \frac{1}{2} res_{z=0} Tr[\delta \tilde{L} \wedge \delta h + \hat{C}^{-1}(\delta \tilde{L} \delta \hat{C} + [\delta h, \tilde{L}] \wedge \delta \hat{C} - \delta h \hat{C} \wedge \delta \hat{k})].$$

Где значки с галочкой обозначают векторнозначные функции от z, каждая компонента которой соответствует разным собственным значениям оператора Лакса и $\delta h = G^{-1} \delta G = diag(-\delta x_i \zeta(z))$. Учитывая

$$Tr(C^{-1}[\delta h, L] \wedge \delta C) = -Tr(C^{-1} \delta h \wedge (\delta L \hat{C} - \hat{C} \delta \hat{k})),$$

получим

$$\omega = \frac{1}{2} res_{z=0} Tr(2\delta \tilde{L} \wedge \delta h + \hat{C}^{-1} \delta L \wedge \delta C).$$

Первая часть этого выражения дает $\sum_i \delta\lambda_i \wedge \delta x_i$. Вторая часть с учетом нормировочных условий

$$\sum_{j=1}^{N}(A_{j\alpha}\delta c_j^k + \delta A_{j\alpha} c_j^k) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N}(c_{kj}^* \delta B_{j\alpha} + \delta c_{kj}^* B_j^{\alpha}) = 0,$$

дает остальную часть выражения (2.66).

Предложение 13 *Система уравнений (2.7)...(2.10) является гамильтоновой по отношению к симплектической форме ω и с гамильтонианом*

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i (B_2^{i+} A_1^i + B_1^{i+} A_2^i) + \sum_{i\neq j} \frac{(B_1^{i+} A_2^j)(B_2^{i+} A_1^i)}{x_i - x_j}. \qquad (2.67)$$

Системы (2.11)...(2.14) и (2.3)... (2.6) также являются гамильтоновыми по отношению к той же симплектической форме с гамильтонианами соответственно

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i (B_2^{i+} A_1^i + B_1^{i+} A_2^i) + \sum_{i\neq j} (B_1^{i+} A_2^j)(B_2^{i+} A_1^i)(\frac{1}{x_i - x_j} - \frac{1}{\eta}) \qquad (2.68)$$

и

$$H = \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i (B_2^{i+} A_1^i + B_1^{i+} A_2^i) + \sum_{i\neq j} (B_1^{i+} A_2^j)(B_2^{i+} A_1^i)\zeta(x_i - x_j). \qquad (2.69)$$

Доказательство По определению некоторое поле ∂_t является гамильтоновым на симплектическом пространстве по отношению к симплектической форме ω если выражение $i_{\partial_t}\omega(X) = \omega(X, \partial_t)$ является точной 1-формой $dH(X)$ для некоторой функции H. Эта функция называется гамильтонианом для векторного поля ∂_t. Принимая во внимание равенство $\partial_t(L_1 - L_2) = [L_1, L_2]$, $\partial_t k = 0$ и выражение

$$\partial_t C(t, P) = L_2 C(t, P) + \mu(t, P) C(t, P), \qquad (2.70)$$

где $\mu(t, P)$ - скалярная функция, найдем

$$i_{\partial_t}\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} res_{P_i}(< C^*(\delta L - \delta\kappa)C > - < C^*[L_2, L_1]\delta C >)dz, \qquad (2.71)$$

Сумма вычетов выражения $< C^*\Lambda C > dz$ равна нулю если матрица Λ голоморфна вне отмеченных точек P_i. Таким образом

$$i_{\partial_t}\omega = \sum_{i=1}^{N} res_{P_i}\delta\kappa\mu(t, P)dz. \qquad (2.72)$$

Заметим, что функция μ равна коэффициенту при t экспоненциальной части собственного вектора C. Следовательно, в точках $P_i, i = 1...l, \mu = \frac{1}{2}\kappa$ а в точках $P_i, i = l+1, ..., 2l, \mu = -\frac{1}{2}\kappa$.

$$i_{\partial_t}\omega = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{l} res_{P_i}\delta\kappa^2 dz - \frac{1}{4}\sum_{i=l+1}^{2l} res_{P_i}\delta\kappa^2 dz =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{l} res_{P_i}\delta < C^* L^2 C > dz - \frac{1}{4}\sum_{i=l+1}^{2l} res_{P_i}\delta < C^* L^2 C > dz$$

Используя разложение в точках P_i

$$L = \frac{1}{z}(L_1^{-1} - L_2^{-1}) + L_1^0 - L_2^0 + O(z)$$

получим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\delta < C^* L_1^{-1}(L_1^0 - L_2^0)C >_{P_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=l+1}^{2l}\delta < C^* L_2^{-1}(L_1^0 - L_2^0)C >_{P_i} .$$

Это выражение равно

$$\frac{1}{2}\delta Tr(L_1^{-1} + L_2^{-1})(L_1^0 - L_2^0). \tag{2.73}$$

Подставляя в эту формулу значения коэффициентов разложения Лаксовых операторов в рациональном специальном случае, получим:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(B_2^{i+}A_1^i + B_1^{i+}A_2^i) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{(B_1^{i+}A_2^j + B_2^{i+}A_1^j)(B_1^{j+}A_2^i - B_2^{j+}A_1^i)}{x_i - x_j}.$$

Это выражение равно гамильтониану (2.67).

Доказательство в эллиптическом и рациональном обобщенном случае проводится аналогично.

3

R-матричный подход на примере системы CM и ее разностного аналога RS

3.1 Основания R-матричного подхода

Как уже отмечалось, возникновение понятия квантовых групп в области интегрируемых систем теории солитонов связано с установленной в работах [18, 19] связью между r-матричной формой пуассоновой структуры L-алгебры

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]; \tag{3.1}$$

и представления Лакса

$$\dot{L} = [L, M]$$

В выражении (3.1) r лежит в тензорном квадрате $Mat(n)^{\otimes 2}$, и $L_1 = L \otimes id, L_2 = id \otimes L$. В работе [20] было отмечено, что, во-первых, существование представления Лакса для динамической системы является следствием ее интегрируемости и, во-вторых, r-матричное представление пуассоновой структуры на L-алгебре является следствием инволютивности интегралов движения, отвечающих собственным значениям L-оператора.

Было замечено, что в случае спиновой системы CM представление (3.1) выполняется только на подмногообразии фазового пространства, выделяемым условием

$$f_{ii} - f_{jj} = 0,$$

где $f_{ii} = (b_i{}^+ a_i)$. Эти фундаментальные свойства и предоставляют возможность квантования системы, которая была удачно использована в работах [14], [15]. В первой из них было замечено, что r-матрица для спиновой системы CM удовлетворяет не классическому уравнению Янга-Бакстера, а его динамическому аналогу

$$-\{L_1, r_{23}\} + \{L_2, r_{13}\} - \{L_3, r_{12}\} + [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

Именно это позволяет рассматривать L-алгебру в этом случае как квазиклассический предел алгебры, порожденной динамическим уравнением Янга-Бакстера (Gervais-Neveu-Felder equation [30]), которое в форме Gervais-Neveu представляется в виде:

$$R_{12}(x)R_{13}(xq^{H_2})R_{23}(x) = R_{23}(xq^{H_1})R_{13}(x)R_{12}(xq^{H_3}), \tag{3.2}$$

$R(x)$ в данном случае лежит в $U_q(sl_n) \otimes U_q(sl_n)$. Существенным также является рассмотрение представлений этого выражения. Известна также L-операторная форма этого уравнения:

$$R_{12}(xq^{-H_3/2})L_{13}(x)L_{23}(x) = L_{23}(x)L_{13}(x)R_{12}(xq^{H_3/2}). \tag{3.3}$$

Именно она предоставляет способ конструирования квантовых интегрируемых систем. Основной механизм этого метода заключается в утверждении работы [14]:

Предложение 14 *Пусть g-простая алгебра Ли, h-ее картановская подалгебра, $V^{(1)}, ..., V^{(n)}$ конечномерные g-модули, $R_{ij}(\lambda, x)$-мероморфная по спектральному параметру λ функция со значениями в $End(V^{(i)} \otimes V^{(j)})$, удовлетворяющая уравнению (3.2), а оператор L_{ij} определенный аналогичным образом, но удовлетворяющий уравнению (3.3), и кроме того, R_{ij} удовлетворяет условию*

$$[(H_i + H_j)\partial_x, R_{ij}] = 0,$$

тогда алгебра операторов

$$I_n = Tr_{1...n}[L_1(x)...L_n(x)\hat{R}_{12}(xq^{h^{(3,n)}})...\hat{R}_{n-1,n}(x)] \tag{3.4}$$

где $\hat{R} = PR$, P - оператор перестановки сомножителей в тензорном произведении, $h^{(k,l)} = \sum_{i=k}^{l} h^{(i)}$; сохраняет подпространство нулевого веса в представлении, и будучи ограниченной на это пространство, является коммутативной.

Для получения решений уравнений (3.3), (3.2) предлагается рассмотреть квази-хопфову алгебру. Универсальная R-матрица и будет решением уравнения GNF. Хорошо известна конструкция Дринфельда для нединамической универсальной R-матрицы. Для любой простой алгебры ли g на $U_q(g)$ может быть введена структура алгебры Хопфа, и благодаря конструкции дубля Дринфельда было доказано, что эта алгебра Хопфа является квази-треугольной, то есть операция коумножения Δ удовлетворяет свойству

$$\Delta R = R\sigma\Delta,$$

где R лежит в тензорном квадрате $U_q(g) \otimes U_q(g)$, а σ-оператор перестановки в тензорном квадрате. Конструкция динамической R-матрицы связана с деформацией квазитреугольной алгебры Хопфа вида

$$\Delta \mapsto \Delta_x = F_{12}^{-1}(x)\Delta F_{12}(x),$$

где $F_{12}(x)$ функция x со значениями в $U_q(g) \otimes U_q(g)$, удовлетворяющая условию "деформированного коцикла"

$$[(id \otimes \Delta)F(x)][id \otimes F(x)] = [(\Delta \otimes id)F(x)][F(xq^{H_3}) \otimes id].$$

Полученная биалгебра является квазитреугольной с новой R-матрицей

$$R(x) = F_{21}^{-1}(x)RF_{12}(x),$$

однако, она не является алгеброй Хопфа, так как условие коассоацивности деформируется

$$(id \otimes \Delta_x)\Delta_x = (\Delta_{xq^{H_3}} \otimes id)\Delta_x.$$

Построенная биалгебра называется квази-хопфовой. Полученная динамическая R-матрица является решением динамического уравнения Янга-Бакстера.

Проблема построения дринфельдовской R-матрицы для алгебры $U_q(sl_n)$ была рассмотрена в работах [31, 32, 33]. Способы нахождения динамической деформации предложены в работах [34, 35]. В работе [35] было показано, что квази-хопфов сдвиг $F(x)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\hat{R}_{12}F_{12}(x) = B_2(x)F_{12}(x)B_2(x)^{-1}, \tag{3.5}$$

где $B(x) = q^{\sum_{j=1}^{n-1}(h_j h^j)} \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{-h^j}$ и R-нединамическая универсальная R-матрица. Этот метод будет использован в разделе 3 при построении динамической R-матрицы.

Решение уравнения (3.3) можно строить в виде

$$L = q^{-(H_1+H_2/2)p} R q^{H_2 p/2}, \tag{3.6}$$

где $p = x\frac{\partial}{\partial x}$, а само выражение рассматривается в тензорном произведении представлений $\rho \otimes \rho_q$, где ρ - фундаментальное представление ρ_q - некоторое, квантовое представление.

3.2 Универсальная R-матрица

Как уже отмечалось, конструкция универсальной R-матрицы для деформаций простых алгебр связана с понятием дубля Дринфельда. А именно, данная деформация $U_q(sl_n)$ может быть представлена в виде дубля для подалгебры $U_q(N_-)$. Алгебра $U_q(sl_n)$ описывается набором генераторов $f_\alpha, e_\alpha, h_\alpha$; для примитивных коней α_i будем их обозначать для простоты f_i, e_i, h_i, $i = 1, ..., n-1$. Эти генераторы удовлетворяют соотношениям:

$$[h_i, h_j] = \delta_{ij}, \qquad [e_i, f_j] = \delta_{ij}\frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}$$

$$[h_i, e_j] = (\delta_{ij}2 - \delta_{i,j\pm1})e_j, \qquad [h_i, f_j] = (-\delta_{ij}2 + \delta_{i,j\pm1})f_j.$$

Соотношения Серра в данном случае преобретают вид

$$[e_i, e_j] = 0 \qquad |i-j| > 1 \qquad [f_i, f_j] = 0 \qquad |i-j| > 1$$

$$e_i e_i e_{i+1} + e_{i+1} e_i e_i = (q + q^{-1}) e_i e_{i+1} e_i,$$

и аналогичные для генераторов f_i.

В работах [32],[33] была предложена рекуррентная процедура построения канонических генераторов, отвечающих любому положительному корню. При наличие некоторого упорядочивания на пространстве положительных корней канонические генераторы отвечающие сумме двух корней $\alpha, \beta, \alpha+\beta$, для которых генераторы уже построены и выполняется соотношение $\alpha < \alpha+\beta < \beta$, и не выполняется $\alpha < \delta < \alpha+\beta < \gamma < \beta$ при $\delta + \gamma = \alpha + \beta$, то выражение для генераторов отвечающих сумме корней задаются формулами

$$e_{\alpha+\beta} = e_\alpha e_\beta - q e_\beta e_\alpha \qquad f_{\alpha+\beta} = f_\beta f_\alpha - q^{-1} f_\alpha f_\beta.$$

Введем на множестве положительных корней лексикографический порядок, то есть $(12), (13), ...(1,n), (2,3), ...(n-1,n)$ в порядке возрастания. Обозначим $e_{i,i+1}, f_{i,i+1}$ генераторы e_i, f_i и определим по индукции

$$e_{ij} = e_{ik}e_{kj} - qe_{kj}e_{ik}, \qquad f_{ij} = f_{kj}f_{ik} - q^{-1}f_{ik}f_{kj} \qquad i < k < j.$$

Благодаря соотношениям Серра это определение корректно, то есть не зависит от выбора k. The

Базис Пуанкаре-Биркгофа-Витта в данном случае для $U_q(N_+)$ (соотв.$U_q(N_-)$) задается выражениями:

$$e^p = \prod_{\alpha\in\Phi+}^{>}(e_{ij})^{p_{ij}} \qquad (\text{resp.} f^p = \prod_{\alpha\in\Phi+}^{>}(f_{ij})^{p_{ij}}). \tag{3.7}$$

Выражение для R-матрицы в терминах этих образующих может быть представлено:

$$R = K\hat{R}, \qquad K = \prod_{j=1}^{n-1} q^{h_i\otimes h^i}, \qquad \hat{R} = \prod_{\Phi+,>}\hat{R}_\alpha,$$

где $\hat{R}_\alpha = \exp_q((q-q^{-1})e_\alpha \otimes f_\alpha)$. q-экспонента определяется следующим образом:

$$\exp_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[n]!}z^n,$$

где $[n] = (q^n - q^{-n})/(q-q^{-1})$.

В рассматриваемых вычислениях либо первый, либо второй сомножитель тензорного произведения рассматривается в фундаментальном представлении. Следовательно в выражении для q-экспоненты сохранятся коэффициенты только нулевой и первой степени. Таким образом, формула для R-матрицы приобретает вид:

$$\hat{R} = \prod_{ij,>}(1 + (q-q^{-1})e_{ij}\otimes f_{ij}).$$

Рассмотрим отдельно два случая:

фундаментальное представление по первому пространству: e_{ij} в этом случае это матричные единицы δ_{ij} при $i<j$. Принимая во внимая порядок в произведении для R-матрицы и замечая, что $\delta_{ij}\delta_{km} = 0$ if $(ij) > (km)$, получим

$$\hat{R} = 1 + (q-q^{-1})\sum_{i<j} e_{ij}\otimes f_{ij};$$

фундаментальное представление по второму сомножителю: в данном случае генераторы f_{ij} являются матричными единицами δ_{ji} при $i < j$ и выражение для R-матрицы приобретает форму:

$$\hat{R} = 1 + \sum_{i<j} (\sum e_{i_{m-1}i_m} ... e_{i_1 i_2} (q - q^{-1})^{m-1}) \otimes f_{ij}.$$

Внутреннее суммирование берется по всем разбиениям вида $i = i_1 < i_2 < ... < i_m = j$.

3.3 Квази-хопфова деформация

Рассмотрим представление $U_q(sl_n)$ на квантовом пространстве в виде представления старшего веса (nl,0,...,0). Характерным свойством этого представления является то, что все весовые пространства являются одномерными. Например, на пространстве нулевого веса все элементы вида $f_{i_{m-1}i_m} ... f_{i_1 i_2}$ с одинаковыми i_1, i_m являются пропорциональными. Исследуя представления подалгебр $U_q(sl_2)$, отвечающих положительным корням нашей алгебры можно найти коэффициенты пропорциональности:

$$f_{i_{m-1}i_m} ... f_{i_1 i_2} v_0 = ([l+1] q^{-l})^{(m-1-i_m+i_1)} f^*_{i_1 i_m} v_0$$

где $f^*_{ij} = f_{j-1,j} f_{j-2,j-1} ... f_{i,i+1}$ и v_0 - вектор, порождающий пространство нулевого веса. Введем также элемент $e^*_{ij} = e_{j-1,j} e_{j-2,j-1} ... e_{i,i+1}$. На пространстве, порожденном вектором $f^*_{ij} v_0$, получим

$$e_{i_{m-1}i_m} ... e_{i_1 i_2} v_0 = ([l] q^{l})^{(m-1-i_m+i_1)} e^*_{i_1 i_m}.$$

Следует отметить, что эти соотношения сохраняются при домножении справа и слева на генераторы $e_{i_m j}$ и $f_{i_m j}$ соответственно. И последний необходимый факт из теории представлений заключается в равенстве

$$e^*_{ij} f^*_{ij} v_0 = ([l][l+1])^{j-i} v_0. \tag{3.8}$$

Такая структура представления приводит к тому, что в случае фундаментального представления по второму сомножителю выражение для R-матрицы приобретает вид:

$$\hat{R}_{21} = 1 + \sum_{i<j} f_{ij} \otimes e^*_{ij} (q^l [l]^{-1})^{j-i-1}. \tag{3.9}$$

Явная конструкция квази-хопфовой деформации $F_{12}(x)$ основана на утверждении работы [35], в которой было найдено линейное уравнение, которому удовлетворяет элемент $F_{12}(x)$:

$$F_{12}(x)B_2(x) = \hat{R}_{12}^{-1}B_2(x)F_{12}(x).$$

Запишем это уравнение в эквивалентной форме:

$$\hat{R}_{12}F_{12}(x) = B_2(x)F_{12}(x)B_2(x)^{-1} \tag{3.10}$$

где $B(x) = q^{\sum_{j=1}^{n-1}(h_j h^j - x_j h^j)}$. Кроме того утверждается, что выражение для $F_{12}(x)$ должно принимать форму:

$$F(x) = \sum_{p,r} e^p \otimes f^r \phi_{p,r}(x) \tag{3.11}$$

где суммирование берется по элементам базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта (3.7) с одинаковым весом. Введем переменные y_j такие что $x_i = q^{y_{i+1}-y_i}$. Тогда будет верно следующее $Bf_{ij}B^{-1} = f_{ij}q^{y_j-y_i-2h_{ij}+2}$ где $h_{ij} = \sum_{k=i}^{<j} h_k$. Подставляя затем выражение для F в форме:

$$F_{12}(x) = 1 + \sum_{i<j} e_{ij} \otimes f_{ij}^* \Phi_{ij}(x)$$

в правую часть уравнения (3.10), получим

$$B_2 F_{12} B_2^{-1} = 1 + \sum_{i<j} e_{ij} \otimes f_{ij}^* \Phi_{ij}(x) q^{y_j-y_i+2},$$

где выражения уже ограничены на подпространство нулевого веса. Это ограничение в этом месте корректно, так как предварительно все эллементы картановской подалгебры были перенесены направо. Аналогичная процедура по отношению к левой части уравнения (3.10) приводят к следующей системе уравнений:

$$\hat{R}_{12}F_{12}(x) = 1 + \sum_{i<j} e_{ij} \otimes (f_{ij}^*\Phi_{ij} + f_{ij}(q-q^{-1})$$
$$+(q^2-1)\sum_{k,i<k<j} f_{j-1,j}...f_{k+1,k+2}(f_{k,k+1}f_{ik} - f_{i,k+1})\Phi_{kj}).$$

Сокращая пропорциональные члены получим:

$$\hat{R}_{12}F_{12}(x) = 1 + \sum_{i<j} e_{ij} \otimes f_{ij}^*(\Phi_{ij} + q_l^{i-j+1}(q-q^{-1}) + (q^2-1)\sum_{k,i<k<j} q_l^{i-k}(q_l-1)\Phi_{kj}),$$

где $q_l = [l+1]q^{-l}$. Сравнивая две части уравнения (3.10) получим систему уравнений на функции, фигурирующие в представлении квази-хопфового преобразования Φ_{ij}:

$$\Phi_{ij}(q^{y_j-y_i+2}-1) = q_l^{i-j-1}(q-q^{-1}) + \sum_{k,i<k<j}(q^2-1)(q_l-1)q_l^{i-k}\Phi_{kj}.$$

Это приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{i+1,j} q_l^{-1} \frac{q^{y_j - y_{i+1} + 2} - q^{-2l}}{q^{y_j - y_i + 2} - 1}, \qquad \Phi_{j-1,j} = \frac{q - q^{-}1}{q^{y_j - y_{j-1} + 2} - 1}. \tag{3.12}$$

Для вычисления элемента F_{21}^{-1} перепишем (3.10) в эквивалентной форме:

$$F_{21}^{-1} = B_1 F_{21}^{-1} B_1 \hat{R}_{21}. \tag{3.13}$$

Из общего вида F_{21}^{-1} (3.11) следует, что в данном случае он может быть представлен в виде:

$$F_{21}^{-1} = 1 + \sum_{i<j} \Psi_{ij} f_{ij} \otimes e_{ij}^*.$$

Используя это выражение, получим:

$$B_1 F_{21}^{-1} B_1^{-1} = 1 + \sum_{i<j} \Psi_{ij} q^{y_j - y_i} f_{ij} \otimes e_{ij}^*,$$

и подставляя выражение(3.9) для R_{21} в (3.13) найдем выражение для правой части уравнения (3.13):

$$B_1 F_{21}^{-1} B_1^{-1} \hat{R}_{21} = 1 + \sum_{i<j} f_{ij} \otimes e_{ij}^* (\Psi_{ij} q^{y_j - y_i} + (q - q^{-1})(q^l [l]^{-1})^{j-i-1}$$
$$+ \sum_{k, i<k<j} \Psi_{kj} q^{y_j - y_k} (q - q^{-1})(q^l [l]^{-1})^{k-i-1}).$$

Сопоставляя выражения правой и левой частей, получим систему уравнений на функции Ψ_{ij}:

$$\Psi_{ij}(1 - q^{y_j - y_i}) = (q - q^{-1})(q^l [l]^{-1})^{j-i-1} + \sum_{k, i<k<j} \Psi_{kj} q^{y_j - y_k} (q - q^{-1})(q^l [l]^{-1})^{k-i-1}).$$

Решение этой системы представляется в рекуррентной форме:

$$\Psi_{ij} = q^{-l} [l]^{-1} \frac{q^{y_j - y_{i+1}} - q^{2l}}{q^{y_j - y_i} - 1} \Psi_{i+1,j} \qquad \Psi_{j-1,j} = \frac{q - q^{-1}}{1 - q^{y_j - y_{j-1}}}. \tag{3.14}$$

3.4 Построение гамильтонианов

При построении гамильтонианов все вычисления проводятся при фиксации фундаментального представления по первому пространству и при ограничении на подпространство нулевого веса в представления старшего веса (nl,0,...,0) на так называемом квантовом пространстве. Для построения универсальной динамической R-матрицы требуется найти произведение:

$$F_{21}^{-1} K \hat{R}_{12} F_{12}$$

где

$$K\hat{R}_{12}F_{12}(x) = 1 + \sum_{i<j} e_{ij} \otimes f^*_{ij}\Phi_{ij}(y)q^{y_j - y_i + 1}.$$

Так как в процедуре построения гамильтонианов фигурирует операция взятия следа будем вычислять только диагональные элементы $R_{12}(x)$. Они могут быть вычислены по формуле:

$$R_{12}(y)_{jj} = 1 + \sum_{i<j} e^*_{ij} f^*_{ij}\Phi_{ij}(y)\Psi_{ij}(y)q^{y_j - y_i + 1},$$

которая с учетом (3.8) переписывается в упрощенной форме:

$$R_{12}(y)_{jj} = 1 + \sum_{i<j} \Phi_{ij}(y)\Psi_{ij}(y)q^{y_j - y_i + 1}([l][l+1])^{j-i}.$$

Введем обозначения для неполных сумм такого вида

$$R_{12}(y)^k_{jj} = 1 + \sum_{i=k}^{i<j} \Phi_{ij}(y)\Psi_{ij}(y)q^{y_j - y_i + 1}([l][l+1])^{j-i}.$$

Лемма 12 *Для* $\tilde{R}^k_j = R_{12}(y)^k_{jj}$ *верно следующее:*

$$\tilde{R}^k_j = \prod_{i=k}^{i<j}(1 - [l][l+1]\xi(y_j - y_i))$$

где

$$\xi(y) = \frac{(q - q^{-1})^2 q^{y+1}}{(q^y - 1)(q^{y+2} - 1)}.$$

Доказательство Для $k = j - 1$ это верно. Будем доказывать по индукции. Предположим, что утверждение леммы верно для $k < m$. Это эквивалентно следующему:

$$\tilde{R}^k_j = \tilde{R}^{k+1}_j(1 - [l][l+1]\xi(y_j - y_k)).$$

Для шага индукции тогда достаточно доказать, что

$$\Phi_{kj}\Psi_{kj}q^{y_j - y_k + 1}([l][l+1])^{j-k} = -[l][l+1]\xi(y_j - y_k)\prod_{i=k+1}^{i<j}(1 - [l][l+1]\xi(y_j - y_i)). \quad (3.15)$$

Для доказательства (3.15) также воспользуемся индукцией. Необходимо доказать, что

$$\frac{\Phi_{k-1,j}}{\Phi_{kj}}\frac{\Psi_{k-1,j}}{\Psi_{kj}}q^{y_k - y_{k-1}} = \frac{\xi(y_j - y_{k-1})}{\xi(y_j - y_k)}(1 - [l][l+1]\xi(y_j - y_k)).$$

Но это проверяется непосредственной подстановкой соотношений для Φ и Ψ полученных в (3.12) и (3.14). □

Предложение 15 *Гамильтониан системы в данном случае имеет форму:*

$$H = I_1 = \sum_{i=1}^{n} e^{p_i} \prod_{k<i} (1 - [l][l+1]\xi(y_i - y_k))$$

где $p_i = 2\frac{\partial}{\partial_{y_i}}$

Доказательство Основное, что нужно доказать, это то, выражение $q^{pH} = q^{\sum \tilde{p}_i h^i}$ в (3.6) в фундаментальном представлении есть не что иное как матричные элементы $e^{p_i}\delta_{ii}$, p_i из формулировки утверждения. Переменные, использованные в работе связаны с используемыми здесь следующим образом: $\tilde{x}_i = q^{-\frac{y_{i+1}-y_i}{2}}$. Оператор сдвига $\tilde{p}_i = \tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial_{\tilde{x}_i}}$ используемый в [14] связан с определенным здесь так, что $\tilde{p}_i$ равно $q^{\tilde{p}_i} = e^{p_{i+1}-p_i}$. В фундаментальном представлении элементы $h^{i-1} - h^i$, $h^0 = h^n = 0$, это диагональные матричные единицы δ_{ii}. Таким образом,

$$q^{\sum \tilde{p}_i h^i} = e^{\sum h^i (p_{i+1} - p_i)} = e^{\sum p_i (h^{i-1} - h^i)} = \sum \delta_{ii} e^{p_i}.$$

□

Вводя новые переменные $t_i = y_i/2, t = y/2$ получим

$$\xi(y) = \frac{(q - q^{-1})^2}{(q^t - q^{-t})(q^{t+1} - q^{-t-1})}.$$

И "одевая" гамильтониан

$$\hat{H}_l = f H_l f^{-1}$$

с помощью функции $f(t_1, .., t_n) = \prod_{i<k} g(t_i - t_k)$ где $g(t) = ((q^{t+1} - q^{-t-1})...(q^{t+l} - q^{-t-l}))^{-1}$ получим

$$\hat{H}_l = \sum_i e^{\frac{\partial}{\partial} t_i} \prod_{k \neq i} \frac{q^{t_i - t_k + l} - q^{-t_i + t_k - l}}{q^{t_i - t_k} - q^{-t_i + t_k}}.$$

3.5 Спиновая система RS

Спиновая система RS является наименее изученной с точки зрения гамильтоновой структуры из известных систем теории алгебро-геометрического интегрирования. Система динамических уравнений в этом случае представляется в виде:

$$\ddot{x}_i = \sum_{i \neq j} (b_i{}^+ a_j)(b_j{}^+ a_i)(V(x_i - x_j) - V(x_j - x_i)) \tag{3.16}$$

$$\dot{a}_i = \sum_{i \neq j} a_j (b_j{}^+ a_i) V(x_i - x_j) \tag{3.17}$$

$$\dot{b}_i = \sum_{i \neq j} b_j (b_i{}^+ a_j) V(x_j - x_i), \tag{3.18}$$

где функция $V(x) = \zeta(x+\eta) - \zeta(x)$ в эллиптическом случае, рассматриваются также вырождения. Универсальное выражение для симплектической формы спиновой системы RS

$$\omega = 2 \sum_{s=1}^{g+l-1} \delta z(\gamma_s) \wedge \delta lnk(\gamma_s)$$

приобретает следующий вид в терминах L-оператора

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} res_{P_i} (< \Psi^* (\delta L L^{-1} + \delta lnk) \wedge \delta \Psi >) dz.$$

Однако, в работе [22] удалось обратить оператор L только в бесспиновом случае, то есть когда матрица $\{f_{ij}\}$ имеет ранг 1.

В работах [12], [13] гамильтонова структура для этой системы была построена при использовании метода гамильтоновой редукции. А именно, на пространстве $T^*G \times \mathcal{G}^*$, где $G = GL(N,C), \mathcal{G}$-ее алгебра Ли. В координатах $A \in \mathcal{G}, g \in G, S \in \mathcal{G}$ на этом пространстве была введена пуассонова структура

$$\{A_1, A_2\} = \frac{1}{2}[C, A_1 - A_2],$$

$$\{A_1, g_2\} = g_2 C, \qquad \{g_1, g_2\} = 0,$$

$$\{S_1, g_2\} = \{S_1, A_2\} = 0,$$

$$\{S_1, S_2\} = -\frac{1}{2}[C, S_1 - S_2],$$

где $C = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}$. Эта пуассонова структура является инвариантной относительно действия калибровочной группы:

$$A \mapsto hAh^{-1}, \qquad g \mapsto hgh^{-1}, \qquad S \mapsto hSh^{-1}.$$

Отображение момента такого действия представляется в виде:

$$\mu = gAg^{-1} - A + S.$$

Фиксируется уровень λI отображения момента. Тогда гамильтониан $H_R = trg$ будет порождать спиновую системы RS. Для этого вводятся переменные a_i, b_i - $2N$ векторов размерности l, такие что

$$\{a_i^\alpha, b_j^\beta\} = -\delta_{ij} \delta_{\alpha,\beta},$$

$$S_{ij} = \sum_\alpha a_i^\alpha b_j^\alpha.$$

В этой работе были введены новые спиновые калибровочно-инвариантные переменные $\tilde{a}_i^\alpha, \tilde{c}_i^\alpha$, в терминах которых описание пуассоновой структуры не является замкнутым и требует введения новых переменных $\tilde{L}_{ij}$. На расширенном пространстве скобки пуассона преобретают вид:

$$\{\tilde{a}_i^\alpha, a_j^\beta\} = \frac{1}{q_{ij}}(\tilde{a}_i^\alpha \tilde{a}_j^\beta + \tilde{a}_j^\alpha \tilde{a}_i^\beta - \tilde{a}_i^\alpha \tilde{a}_i^\beta - \tilde{a}_j^\alpha \tilde{a}_i^\beta),$$

$$\{\tilde{c}_i^\alpha, c_j^\beta\} = \frac{1}{q_{ij}}(\tilde{c}_i^\alpha \tilde{c}_j^\beta + \tilde{c}_j^\alpha \tilde{c}_i^\beta) + \tilde{c}_i^\beta \tilde{L}_{ji} - \tilde{c}_i^\alpha \tilde{L}_{ij},$$

$$\{\tilde{c}_i^\alpha, a_j^\beta\} = \frac{1}{q_{ij}}(\tilde{c}_i^\alpha(\tilde{a}_i^\beta - \tilde{a}_j^\beta) + \delta_{\alpha\beta}\tilde{L}_{ji} - \tilde{a}_j^\beta \tilde{L}_{ji},$$

$$\{\tilde{a}_i^\alpha, L_{kl}\} = \frac{1}{q_{ij}}(\tilde{L}_{kl} - \tilde{L}_{il})(\tilde{a}_i^\alpha - \tilde{a}_k^\alpha) - \frac{1}{q_{il}}\tilde{L}_{kl}(\tilde{a}_i^\alpha - \tilde{a}_l^\alpha),$$

$$\{\tilde{c}_i^\alpha, L_{kl}\} = \frac{1}{q_{ik}}(\tilde{L}_{il} - \tilde{L}_{kl})\tilde{c}_i^\alpha - \frac{1}{q_{il}}(\tilde{L}_{kl}\tilde{c}_i^\alpha + \tilde{L}_{ki}\tilde{c}_l^\alpha) + \tilde{L}_{li}\tilde{L}_{kl} - \tilde{L}_{ki}\tilde{L}_{kl}.$$

Система дифференциальных уравнений, порожденная этой пуассоновой структурой и гамильтонианом H_R в данных переменных записывается

$$\dot{q}_i = L_{ii} = \frac{1}{\gamma} f_{ii},$$

$$\dot{\tilde{a}}_i^\alpha = -\sum_{j\neq i} \frac{1}{q_{ij}}(\tilde{a}_i^\alpha - a_j^\alpha)L_{ij},$$

$$\dot{\tilde{c}}_i^\alpha = \sum_{j\neq i} \frac{1}{q_{ij}}(\tilde{c}_i^\alpha \tilde{L}_{ij} + \tilde{c}_j^\alpha \tilde{L}_{ji}).$$

Как было показано в работе [13] эта система изоморфна системе (3.16), ..., (3.18). Однако, как отмечалось во введении, это описание не является замкнутым.

Рассмотрим R-матричный подход в спиновом случае. Спиновость обозначает то, что размерность подпространства нулевого веса в представлении не равна одному. Проводя вычисления для случая $U_{q,x}(sl_3)$, аналогичные предыдущим разделам, но без требования одномерности, получим выражение для универсальной R-матрицы Дринфельда

$$\hat{R}_{12} = 1 + (q - q^{-1})\{e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 + e_1 e_2 \otimes f_2 f_1 + e_2 e_1 \otimes f_1 f_2$$

$$-q^{-1}(e_2 e_1 \otimes f_2 f_1 + e_1 e_2 \otimes f_1 f_2)\}.$$

Воспользовавшись уравнением (3.10), определяющим квази-хопфову деформацию, будем искать элемент $F_{12}(x)$ в виде

$$F_{12}(x) = 1 + e_1 \otimes f_1 \Phi_1 + e_2 \otimes f_2 \Phi_2 + e_1 e_2 \otimes f_1 f_2 \Phi_{1212}$$

$$+ e_1 e_2 \otimes f_2 f_1 \Phi_{1221} + e_2 e_1 \otimes f_1 f_2 \Phi_{2112} + e_2 e_1 \otimes f_2 f_1 \Phi_{2121}.$$

Получим следующие выражения для функций Φ:

$$\Phi_1 = \frac{q - q^{-1}}{q^{x_1 - 2h_1 + 2} - 1} \qquad \Phi_2 = \frac{q - q^{-1}}{q^{x_2 - 2h_2 + 2} - 1} \qquad \Phi_{1221} = \Phi_{2112} = \frac{q - q^{-1}}{q^{x_3 - 2h_3 + 2} - 1},$$

$$\Phi_{1212} = \frac{(q - q^{-1}) q (1 - q^{x_2 - 2h_2})}{(q^{x_3 - 2h_3 + 2} - 1)(q^{x_2 - 2h_2 + 2} - 1)} \qquad \Phi_{2121} = -\frac{(q - q^{-1}) q (1 - q^{x_1 - 2h_1})}{(q^{x_3 - 2h_3 + 2} - 1)(q^{x_1 - 2h_1 + 2} - 1)},$$

где $x_3 = x_1 + x_2$. Подставим полученные результаты в выражение для динамической R-матрицы. Гамильтониан системы после взятия следа и ограничения на подпространство нулевого веса представляется в виде

$$H = I_1 = q^{2p_1} + q^{2p_2}\left(1 - e_{12} f_{12} \frac{(q - q^{-1})^2 q^{x_1 + 1}}{(q^{x_1} - 1)(q^{x_1 + 2} - 1)}\right)$$

$$+ q^{2p_3}\left(1 - e_{23} f_{23} \frac{(q - q^{-1})^2 q^{x_2 + 1}}{(q^{x_2} - 1)(q^{x_2 + 2} - 1)} - \left(e_{13} - \frac{(q - q^{-1})}{q^{x_2} - 1} e_{23} e_{12}\right)\left(f_{13} + \frac{(q - q^{-1})}{q^{x_2 + 2} - 1} f_{12} f_{23}\right)\right)$$

$$\times \left(\frac{(q - q^{-1})^2 q^{x_3 + 1}}{(q^{x_3} - 1)(q^{x_3 + 2} - 1)}\right). \tag{3.19}$$

Рассмотрим предел при $q \mapsto 1$ фиксируя при этом новые переменные $e^{t_1 - t_2} = q^{x_1/2}$, $e^{t_2 - t_3} = q^{x_2/2}$. И разложим полученное выражение по параметру $\lambda = \ln(q)$. Получим:

$$H = 1 + \lambda(p_1 + p_2 + p_3) + \lambda^2\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{e_{12} f_{12}}{\sinh(t_1 - t_2)} + \frac{e_{23} f_{23}}{\sinh(t_2 - t_3)} + \frac{e_{13} f_{13}}{\sinh(t_1 - t_3)}\right) + \ldots$$

Выражение, стоящее при λ^2 есть не что иное, как квантовый или классический гамильтониан спиновой системы CM.

4

R-матричный подход в случае полюсной динамики решения уравнения Дэви-Стюартсона

4.1 Классическая r-матрица

Основным наблюдением, подчеркивающим связь динамических систем теории солитонов с теорией квантовых групп, было существование классической r - матрицы и r-матричной формы пуассоновой структуры на алгебре матричных коэффициентов оператора L:

$$\{L_{(1)}(\lambda), L_{(2)}(\mu)\} = [r_{12}(\lambda,\mu), L_{(1)}(\lambda)] - [r_{21}(\mu,\lambda), L_{(2)}(\mu)] + [D, r_{12}(\lambda,\mu)]. \qquad (4.1)$$

В работах [28, 29] были получены явные выражения для классической r-матрицы для спиновой системы СМ в виде

$$r_{12}(\lambda,\mu) = a(\lambda,\mu)\sum_{i=1}^{N} e_{ii}\otimes e_{ii} - \sum_{i,j=1;i\neq j}^{N} b(x_i - x_j,\lambda,\mu)e_{ij}\otimes e_{ji}, \qquad (4.2)$$

где в эллиптическом случае

$$a(\lambda,\mu) = \zeta(\lambda-\mu) - \zeta(\lambda) + \zeta(\mu), \qquad b(x,\lambda,\mu) = \frac{\sigma(\lambda-\mu-x)}{\sigma(\lambda-\mu)\sigma(x)}\exp\left(\zeta(\lambda)-\zeta(\mu)\right)x;$$

в рациональном случае

$$a(\lambda,\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}, \qquad b(x,\lambda,\mu) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda-\mu};$$

$$D = \sum_i f_{ii}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Предложение 16 *Для L-операторной алгебры связанной с системой полученной в разделе 2.2 в эллиптическом случае и в рациональном при $\eta = 0$ имеет место представление пуассоновой структуры (4.1) с теми же выражениями для коэффициентов r-матрицы*

Доказательство Заметим, например для эллиптического случая, что если выделить в матрице L диагональную и внедиагональную части:

$$\Lambda = diag\{\lambda_i\}, \qquad F = F_1 + F_2;$$

где

$$(F_1)_{ij} = (1 - \delta_{ij})(b_1^{i+} a_2^j)\Phi(x_j - x_i, z);$$

$$(F_2)_{ij} = -(1 - \delta_{ij})(b_2^{i+} a_1^j)\Phi(x_j - x_i, z).$$

Вид симплектической формы, построенной в разделе 2.4 позволяет сказать, что L-алгебры, порожденные операторами $L^1 = \Lambda + F_1; L^2 = \lambda + F_2$, изоморфны L-алгебре, связанной с системой CM. Таким образом, на эти операторы выполняются соотношения (4.1) с той же r-матрицей, что и в случае системы CM. Заметим теперь, что

$$\{L_{(1)}, L_{(2)}\} = \{L^1_{(1)}, L^1_{(2)}\} + \{L^2_{(1)}, L^2_{(2)}\}. \qquad (4.3)$$

Складывая выражения для скобок пуассона в правой части (4.3), получим

$$[r_{12}, L_{(1)}] + [r_{12}, \Lambda_{(1)}] - [r_{21}, L_{(2)}] - [r_{21}, \Lambda_{(2)}] + [\mathcal{D}, r_{12}]; \qquad (4.4)$$

где $\mathcal{D} = \sum((b_1^{i+} a_2^i) - (b_2^{i+} a_1^i))\frac{\partial}{\partial x_i}$. Для доказательства утверждения осталось показать, что в выражении (4.4) сокращаются второе и четвертое слагаемые. Действительно

$$[r_{12}, \Lambda_{(1)}] = -\sum_{i \neq j} b(x_i - x_j, \lambda, \mu) e_{ij} \otimes e_{ji}(\lambda_j - \lambda_i);$$

$$[r_{21}, \Lambda_{(2)}] = -\sum_{i \neq j} b(x_i - x_j, \mu, \lambda) e_{ji} \otimes e_{ij}(\lambda_j - \lambda_i).$$

Переобозначив индексы во втором выражении и воспользовавшись свойством $b(-x, \mu, \lambda) = -b(x, \lambda, \mu)$ получим желаемое. □

4.2 Свойства L-операторной алгебры

Однако, r-матричная структура данной системы не может быть полностью описана только в терминах построеной L-матрицы. В частности гамильтониан системы выражается через коэффициенты другого оператора, а именно

$$\tilde{L}(z) = L_1(z) - L_2(-z).$$

Разложение по спектраьному параметру следа этого оператора имеет вид:

$$Tr(\tilde{L}(z)) = \sum_i \lambda_i^2 - \sum_{i\neq j} \frac{(f_{ij}^1 - f_{ij}^2)(f_{ji}^1 - f_{ji}^2)}{(x_i - x_j)^2}$$

$$-\frac{1}{z}\left(\sum_i \lambda_i (f_{ii}^1 + f_{ii}^2) + \sum_{i<j} \frac{(f_{ij}^1 - f_{ij}^2)(f_{ji}^1 + f_{ji}^2) - (f_{ji}^1 - f_{ji}^2)(f_{ij}^1 + f_{ij}^2)}{x_i - x_j}\right)$$

$$+\frac{1}{z^2}(\sum_{ij}(f_{ij}^1 + f_{ij}^2)(f_{ji}^1 + f_{ji}^2)).$$

Гамильтониан преобретает

$$H = Res_{z=0} Tr(\tilde{L}(z)^2).$$

Данное наблюдение позволило доказать следующее утверждение, устанавливающее связь динамической системы полюсной динамики конечнозонного потенциала оператора Дирака и спиновой системы Калоджеро-Мозера:

Предложение 17 *Гамильтониан спиновой рациональной системы Калоджеро-Мозера на фазовом пространстве* $\{x_i, \lambda_i, (f_{ij}^1 - f_{ij}^2)\}$*, где* x_i, λ_i, f_{ij}^k *являются координатами на фазовом пространстве рациональной системы проинтегрированной в разделе 2.2, а именно выражение*

$$H_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \sum_{i\neq j} \frac{(f_{ij}^1 - f_{ij}^2)(f_{ji}^1 - f_{ji}^2)}{(x_i - x_j)^2}$$

является интегралом движения для системы (2.7,...,2.10).

Доказательство. Прежде всего заметим, что координатные функции $f_{ij}^1 - f_{ij}^2$ образуют алгебру Ли sl_n. Классическая пуассонова структура системы (2.7,...,2.10). следует из полученного выражения для симплектической структуры в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} (\delta\lambda_i \wedge \delta x_i + \delta B_i^{q1} \wedge \delta A_{iq}^2 - \delta B_i^{q2} \wedge \delta A_{iq}^1). \tag{4.5}$$

Из этого выражения следует, что на величины $f_{ij}^1 = B_i^{1+} A_j^2$ и $f_{ij}^2 = B_i^{2+} A_j^1$ имеются следующие скобки Пуассона:

$$\{f_{ij}^1, f_{kl}^1\} = \delta_{jk} f_{il}^1 - \delta_{li} f_{kj}^1, \qquad \{f_{ij}^2, f_{kl}^2\} = -\delta_{jk} f_{il}^2 + \delta_{li} f_{kj}^2, \qquad \{f_{ij}^1, f_{kl}^2\} = 0. \tag{4.6}$$

из этого видно, что на их разности выполняются следующие коммутационные соотношения

$$\{f_{ij}^1 - f_{ij}^2, f_{kl}^1 - f_{kl}^2\} = \{f_{ij}^1, f_{kl}^1\} + \{f_{ij}^2, f_{kl}^2\} = \delta_{jk}(f_{il}^1 - f_{il}^2) - \delta_{li}(f_{kj}^1 - f_{kj}^2). \qquad (4.7)$$

Выражение для следа оператора $L(z)$ имеет форму:

$$TrL(z) = \sum_i \lambda_i^2 - \sum_{i\neq j} \frac{(f_{ij}^1 - f_{ij}^2)(f_{ji}^1 - f_{ji}^2)}{(x_i - x_j)^2}$$

$$-\frac{1}{z}\left(\sum_i \lambda_i (f_{ii}^1 - f_{ii}^2) + \sum_{i<j} \frac{(f_{ij}^1 - f_{ij}^2)(f_{ji}^1 - f_{ji}^2) - (f_{ji}^1 - f_{ji}^2)(f_{ij}^1 - f_{ij}^2)}{x_i - x_j}\right)$$

$$+\frac{1}{z^2}(\sum_{ij}(f_{ij}^1 - f_{ij}^2)(f_{ji}^1 - f_{ji}^2)).$$

Заметим теперь, что наличие представления Лакса для оператора $L(z)$ влечет тот факт, что коэффициенты разложения по спектральному параметру этого оператора являются интегралами движения. Заметим, что свободный член этого разложения является гамильтонианом системы Калоджеро-Мозера для заявленного фазового пространства, коэффициент при $\frac{1}{z}$ является импульсом системы если учесть условие $f_{ii} - f_{ii}^2 = 2$. Кроме того в разложениях по спектральному параметру следов $L(z)$ и $\tilde{L}(z)$ коэффициенты при z^{-2} совпадают вследствии быстрого убывания потенциала в рациональном специальном случае, так как сумма вычетов потенциала в этом случае равна нулю.

Итак, помимо связи рациональной специальной системы полюсной динамики решения матричного уравнения Дэви-Стюартсона со спиновой системой Калоджеро-Мозера, было установлено, что коэффициенты следа оператора $\tilde{L}(z)$, в терминах которого выражается гамильтониан системы, также являются интегралами движения в данном случае. $\square$

Задача построения квазитреугольной ли-биалгебры [36] или ее динамического аналога: квазитреугольной квази-ли-биалгебры [37] в данном случае заключается в описании генераторов алгебры, двойственной к алгебре, содержащей два коммутирующих экземпляра sl_n, что является следствием полученных скобок пуассона.

5

Заключение

Основная цель данной работы заключается в привлечении аппарата универсальной R-матрицы в задачи, связанные с динамическими системами теории солитонов. Методы, предложенные в работах [14], [15], позволяют явно конструировать интегрируемые динамические системы, стартуя с некоторой квазихопфовой алгебры. К достоинствам этих построений можно отнести универсальность и полноту описания гамильтоновой структуры, возможность квантования системы. Под универсальностью здесь понимается описание на универсальном алгебраическом языке. Конкретный смысл сконструированных величин заключается в выборе представления и особых условий нормировки. Областью особого интереса в контексте данного метода является в некотором смысле обратная задача, то есть задача нахождения квазихопфовой алгебры, а следовательно и квантовой интегрируемой системы, по спектральным данным классической системы, получаемым в рамках алгебро-геометрического метода интегрирования. Заметим, что в ряде случаев удается построить пуассонову структуру на фазовом пространстве системы, а также решение классического динамического уравнения Янга-Бакстера. Попытки решения такой обратной задачи уже предпринимались в работах [21], [38], [39]. В первой из них квазихопфова алгебра строилась по спектральным данным, по кривой с отмеченными точками. Однако рассматривался только случай стартовой алгебры sl_2. В работах [38], [39] основное внимание уделялось контруированию решений классического и квантового динамических уравнений Янга-Бакстера. В частности был найден класс решений классического уравнения, для которого существует квантование. Однако все построения данных работ ориентированы на фундаментальные представления и не могут давать положительных результатов при анализе спиновых систем.

Задача построения квази-хопфовой алгебры в случае спиновой системы CM была решена в следующем смысле: учитывая имеющиеся скобки пуассона на фазовам пространстве системы, которые могут быть рассмотрены как определяющие соотношения алгебры Ли sl_n, а также наличие классической r-матрицы, была рассмотрена динамическая деформация универсальной обертывающей $U_q(sl_n)$. Условие редукции, которое в классических терминах имело вид ${b_i}^+ a_i = 2$, приобрело на языке квазихопфовой алгебры так называемое свойство нулевого веса. Именно оно позволило найти коммутативную подалгебру в универсальной обертывающей алгебре. Требует дальнейшего прояснения вопрос сопоставления процедуры гамильтоновой редукции на квантовом и классическом уровне, так как данное свойство нулевого веса на самом деле сужает алгебру до алгебры, порожденной величинами $e_\alpha f_\alpha$. На классическом уровне такого сужения не происходит.

Как оказалось, именно таким образом построенная алгебра дает полное квантовое описание системы, то есть описывает алгебру операторов, действующую на квантовом пространстве и ее коммутативную подалгебру, включающую гамильтониан. Эта структура в случае стартовой алгебры Ли sl_n соответствует квантовой системе RS в бесспиновом случае. Для нее может быть найден классический предел, который совпадает с классической системой RS, а также предел по параметру деформации и его классический аналог: квантовая и классическая системы Калоджеро-Мозера. В случае $U_{q,x}(sl_3)$ была построена квантовая спиновая система, предел по параметру деформации q которой является квантовой спиновой системой CM. Следует отнести к достоинствам этого метода универсальность описания в том смысле, что спиновый и обычный случаи отличаются исключительно параметрами рассматриваемых представлений. Суммируя все вышесказанное, заметим, что была построена деформация квантовой спиновой системы CM, которая в случае представления с пространством нулевого веса размерности один соответствует тригонометрической системе RS. Открытым остается вопрос выяснения связи этой деформации и классической спиновой системы RS. Кроме того, рассмотрение эллиптического и рационального случая систем также представляют существенный интерес.

Существенная часть данной работы посвящена исследованию гамильтоновой структуры динамической системы, связанной с конечнозонными потенциалами матричного уравнения Дэви-Стюартсона. Была получена новая интегрируемая конечномерная динамическая система. В рамках алгебро-геометрического подхода эта система была решена в терминах θ-функций. Применение так называемого универсального метода исследования гамильтоновой структуры привело в случае этой системы к впервые полученным выражениям для симплектической структуры и гамильтониана. Последний раздел работы посвящен R-матричному подходу в случае данной системы. Отправными пунктами построения являются наличие пуассоновой структуры на фазовом пространстве, которое в данном случае, в отличие от случая систем CM, RS, содержит два экземпляра алгебры Ли sl_n. Было показано, что L-алгебры в случае этой системы частично описывается той же классической r-матрицей, что и в случае систем RS, CM. Исходя из свойств L-операторной алгебры в данном случае была установлена связь системы динамики полюсов решения матричного уравнения Дэви-Стюартсона и спиновой системы Калоджеро-Мозера на уровне иерархий нелинейных уравнений. Дальнейшим развитием этого раздела представляется исследования соответствия квазихопфовой структуры для данной системы с объектом, впервые введенным Дринфельдом в работе [36]. Это квазихопфова алгебра, связанная с алгебраической кривой и набором отмеченных точек, построенная как квантование некоторого центрального расширения прямой суммы алгебр, учитывающее геометрическую природу кривой. Эта идея была разработана в серии работ [40, 41, 42].

Дальнейшие исследования в данной области представляются в виде разработки следующей программы:

- построение симплектической структуры и гамильтониана для системы, связанной с дифференциальным уравнением, на основе универсального алгебро-геометрического метода построения гамильтоновой структуры;
- по полученным данным, то есть по пуассоновой структуре и по классической динамической r-матрице, строится квази-ли биалгебра;
- квантование этой биалгебры соответствует квантовому аналогу деформированной системы, связанной уже с разностным уравнением во вспомогательной линейной задаче алгебро-геометрического подхода прямой и обратной задачи.

Эта программа была частично реализована в случае системы CM, и были намечены основные этапы исследования для системы, связанной с конечно-зонными решениями матричного уравнения Дэви-Стюартсона.

Список литературы

[1] H. Airault, H. McKean, J. Moser, Rational and elliptic solutions of the KdV equation and related many-body problem. Comm. Pure and Appl. Math. 30 (1977) 95-125.

[2] F. Calogero, Exactly solvable one-dimentional many-body systems, Lett. Nuovo Cimento 13(1975), 411-415.

[3] И.М.Кричевер, Нелинейные уравнения и эллиптические кривые, Совр. Пробл. Мат. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР 23(1983)

[4] И.Кричевер, Периодическая неабелева цепочка Тода и ее двумеризация. Успехи Мат. Наук 36 (1981),2,72-77.

[5] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon. Spin generalization of the Cologero-Moser system and the Matrix KP equation. Preprint LPTHE 94/42. Amer. Math. Transl. 170(1995),n2,83-119.

[6] I. Krichever, A. Zabrodin Spin generation of the model Ruijesenaars-Schneider, non-abelian 2-dimentional Toda chain and the Sklianin algebras representations. Uspehi mat. nauk 1995 V. 50 N. 6 pp. 3-56.

[7] S.N.M.Ruijsenaars and H.Schneider, A new class of integrable systems and its relation to solitons, Ann. Phys. (NY) 170(1986), 370-405.

[8] R.Donagi, E.Witten, Suppersymmetric Yang-Mills theory and integrable systems, Nucl. Phys. B 460 (1996) 299-334.

[9] E.D'Hoker, D.H.Phong, Calogero-Moser systems in $SU(N)$ Seiberg-Witten theory, hep-th 9709053. Nucl.Phys.B 513(1998) 405-444.

[10] I. M. Krichever, D. H. Phong . On the integrable geometry of soliton equations and N=2 supersymmetric gauge theories. J. Differential Geometry 45 (1997) 349-389.

[11] I. M. Krichever, D. H. Phong . Symplectic forms in the theory of solitons, preprint hep-th/9708170

[12] G.E.Arutyunov, P.B.Medvedev, Geometric construction of the classical R-matrices for the elliptic and trigonometric Calogero-Moser systems. hep-th/9511070

[13] G.E.Arutyunov, S.A.Frolov, On Hamiltonian structure of the spin Ruijsenaars-Schneider model. hep-th/9702119 J.Phys.A31(1998) 4203-4216.

[14] J. Avan, O. Babelon, E. Billey: "The Gevais-Neveu-Felder equation and the quantum Calogero-Moser systems". Comm. Math. Phys. 178 (1996) 281-299.

[15] O. Babelon, D. Bernard, E. Billey: "A quasi-Hopf algebra interpretation of quantum 3-j and 6-j symbols and difference equations". Phys. Lett. B 375 (1996) 89-97.

[16] S.P.Novikov, A.Veselov, On Poisson brackets compatible with algebraic geometry and Korteweg-de Vries dynamics on the space of finite-zone potentials, Soviet Math. Doklady 26 (1982) 357-362.

[17] N.Hitchin, Duke Math. Jour. Vol. 54, No 1(1987).

[18] Е. К. Склянин, О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера. Функ. ан. и его прил. 17(1983) №4, 34-48

[19] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, Hamiltonian methods in the theory of solitons. (Springer series in Soviet Mathematics, Berlin, Germany) (1987) .

[20] O. Babelon, C-M. Viallet, Hamiltonian structure and Lax equations. Phys. Lett. B 1990 V 237, N 3,4 p. 411-416.

[21] V. Rubtsov, B. Enriquez, Quasi-hopf algebras associated with sl_2 and complex curves. q-alg/9608005

[22] I.Krichever, Elliptic solutions to difference non-linear equations and Bethe ansatz equations. solv-int/9804016

[23] K. Hasegawa, Ruijsenaars' commuting difference operators as commuting transfer matrices, q-alg/9512029

[24] A. Antonov, K. Hasegava, A. Zabrodin, On trigonometric intertwinning vectors and non-dynamical R-matrix for the Ruijsenaars model, Nucl.Phys. B503 (1997) 747-770, hep-th/9704074

[25] A.Gorsky, N.Nekrasov, Relativistic Calogero-Moser model as gauged WZW theory. Nuclear Phys. B 436(1995) 582-608.

[26] G.Felder, A.Varchenko, Elliptic quantum groups and Ruijsenaars model. hep-th/9704005

[27] Т.М. Маланюк, Конечно-зонные решения уравнения Дэви-Стюартсона. Усп. Мат. Наук. V.46 N. 5 171-172.

[28] O. Babelon, M. Talon, The symplectic structure of the spin Calogero model q-alg/9707011

[29] E. K. Sklyanin, Dynamical r-matrices for the elliptic Calogero-Moser model, St.Petersburg Math. J. 6(1995) no.2 297-406.

[30] J.L. Gervais, A. Neveu, Novel triangle relation and absence of tachyons in Liouville string theory. Nucl. Phys. B 238 (1984) 125.

[31] M.Rosso, An analogue of the PBW theorem and the universal R-matrix for $U_h(sl(n+1))$, Comm. Math. Phys. 124 (1989) 307.

[32] S.M. Khoroshkin, V.N. Tolstoy, Universal R-matrix for quantized (super)algebras, Commun. Math. Phys. 11(1993), 445-452.

[33] S.M. Khoroshkin, V.N. Tolstoy, The Cartan-Weyl basis and the universal R-matrix for quantum Kac-Moody algebras and superalgebras. Proc. of the Int. Workshop on Math. Phys. "Quantum Symmetries".(The 2-nd Wigner Symp., Goslar, Germany (July 1991)). Edit.s H.-D. Doebner and V.K. Dobrev. (1993), 336-351.

[34] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake and J. Shiraishi: "Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups". DPSU-97-11 q-alg/9712029. To appear in Transformation Groups.

[35] D. Arnaudon, E. Buffenoir: "Universal solution of quantum dynamical Yang-Baxter equation". q-alg/9712037. Lett. Math. Phys. 44(1998) 201-214.

[36] V. G. Drinfeld, Quantum groups, Proc. Int. Congr. Math(Berkeley, 1986) 1, 798-820.

[37] В. Г. Дринфельд, Квазихопфовы алгебры, Аглебра и анализ, 1989, т.1, вып.6 сс. 114-148

[38] P. Etingof, A. Varchenko, Geometry and classification of solutions of the classical dynamical Yang-Baxter equation. q-alg/9703040

[39] P. Etingof, A. Varchenko, Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups. q-alg/9708015

[40] P. Etingof, D. Kazhdan, Quantization of Lie bialgebras, I q-alg/9506005

[41] P. Etingof, D. Kazhdan, Quantization of Lie bialgebras, III q-alg/9610030

[42] P. Etingof, D. Kazhdan, Quantization of Lie bialgebras IV, math/9801043