Циклические q-цепочки Дарбу

С. В. Смирнов

Оглавление

Введение

Вторая половина двадцатого века была ознаменована появлением в математической и физической литературе большого количества публикаций, имеющих отношение к теории одномерного оператора Шредингера. Уравнение Шредингера

$$L\psi = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right)\psi = \lambda\psi, \tag{1}$$

естественным образом возникающее во многих физических и механических задачах, оказывается связанным со многими разделами математики, активно развивавшимися во второй половине прошлого века. Отметим некоторые из этих связей.

Хорошо известно, что уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

является одним из представителей бесконечной иерархии эволюционных уравнений, описывающих изоспектральные деформации уравнения Шредингера (1), т.е. такое изменение потенциала u со временем t, при котором собственные значения оператора L остаются неизменными. Действительно, если считать, что деформация собственной функции ψ задается условием $\psi_t = A\psi$, где A — некоторый линейный дифференциальный оператор третьего порядка (рассмотрение операторов первого и второго порядков приводит к тривиальной деформации потенциала со временем), то нетрудно убедиться в том, что зависимость потенциала от времени описывается уравнением

$$u_t = [L, A], \tag{2}$$

которое легко сводится к уравнению Кортевега-де Фриза. Рассмотрение операторов A более высокого порядка приводит к *высшим уравнениям КдФ*, т.е. к уравнениям вида (2) более высокого порядка по x (см., например, обзор [9] или книги [11, 14]). Таким образом, теория КдФ есть в точности теория изоспектральных симметрий вида $L_t = [L, A]$ для оператора Шредингера.

В работе [7] Веселов и Шабат реализовали эту идею для дискретных симметрий оператора Шредингера следующим образом. Оператор Шредингера можно представить в виде произведения $L = AA^+$ двух операторов первого порядка $A = \frac{d}{dx} + f(x)$ и его формально сопряженного $A^+ = -\frac{d}{dx} + f(x)$; имея такую факторизацию, можно построить новый оператор $\tilde{L} = A^+A$, который связан с изначальным оператором Шредингера с помощью преобразования Дарбу:

$$A^+L = \tilde{L}A^+.$$

Подобные преобразования замечательны тем, что, как отметил еще Дарбу, все решения нового уравнения Шредингера $\tilde{L}\tilde{\psi} = \lambda\tilde{\psi}$ могут быть получены из решений уравнения $L\psi = \lambda\psi$. Веселов и Шабат рассмотрели последовательность чуть более общих преобразований оператора Шредингера $L = L_1$

$$L_1 \to L_2 \to L_3 \to \cdots \to L_{r+1},$$

где L_j и $L_{j+1} - \alpha_j$ связаны преобразованием Дарбу (α_j — некоторые константы); при этом функции f_j, определяющие факторизацию, удовлетворяют следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений, иногда называемой одевающей цепочкой:

$$(f_j + f_{j+1})' = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \alpha_j. \tag{3}$$

Легко видеть, что при каждом таком преобразовании спектр оператора Шредингера сдвигается на α_j; поэтому рассмотрение циклического замыкания $L_{r+1} = L_1$ при условии $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = 0$ приводит к дискретной изоспектральной симметрии оператора Шредингера. Оказывается, что потенциалы оператора Шредингера, допускающие такую изоспектральную симметрию, являются конечнозонными, а соответствующая система (3) является вполне интегрируемой бигамильтоновой системой при нечетном r. Таким образом, теорию одевающей цепочки можно рассматривать как теорию дискретных изоспектральных симметрий оператора Шредингера.

Работа [7] также посвящена изучению свойств одевающей цепочки при $\alpha_j > 0$. Показано, что такое циклическое замыкание полностью определяет дискретный спектр всех операторов, входящих в цепочку: спектр каждого из этих операторов представляет собой набор из r арифметических прогрессий.

Другим обстоятельством, побуждающим к дальнейшему изучению свойств одевающей цепочки и связанных с этим вопросов, является замеченная В. Адлером [21] замечательная связь одевающей цепочки с классическими вопросами теории обыкновенных дифференциальных уравнений: если $\alpha > 0$, то при $r = 3$ одевающая цепочка сводится к четвертому уравнению Пенлеве, а при $r = 4$ (и некоторых дополнительных ограничениях на спектральные параметры α_j) — к пятому уравнению Пенлеве. Это наблюдение позволило

Адлеру, в частности, легко описать рациональные решения четвертого уравнения Пенлеве.

Легко заметить, что при $r = 1$ оператор цепочки $L = L_1$ является гармоническим осциллятором, поскольку соответствующее операторное соотношение превращается в точности в соотношение Гейзенберга $AA^+ = A^+A + \alpha$. Хорошо известно, что спектр гармонического осциллятора дискретен, а его собственные функции выражаются через полиномы Эрмита и потому образуют полное семейство в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций на прямой. Дискретность спектра при этом следует из общего факта теории одномерного оператора Шредингера об отсутствии непрерывного спектра у оператора, потенциал которого растет на бесконечности как положительная степень x, а полнота системы собственных функций определяется полнотой системы полиномов Эрмита.

В работе [7] высказывается гипотеза о том, что в общем случае одевающей цепочки при нечетном $r > 1$ потенциал оператора Шредингера $L = L_1$ имеет "осцилляторо-подобную" асимптотику на бесконечности:

$$u(x) = \frac{\alpha^2 x^2}{4r^2} + O(x).$$

Подобное асимптотическое поведение потенциала гарантировало бы дискретность спектра оператора Шредингера, однако, его обоснование для общих значений параметров α_j является открытой задачей. Вопрос о полноте системы собственных функций представляется еще более трудным, поскольку требует изучения трансцендентов Пенлеве и их высших аналогов.

Бурное развитие аналитического аппарата во второй половине девятнадцатого века дало мощной толчок развитию теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений в частных производных; этим, вероятно, объясняется то обстоятельство, что теория дифференциальных уравнений разработана существенно больше, чем теория разностных, несмотря на то, что работа с последними не требует использования столь обширного аналитического инструментария. Кроме того, этому, видимо, способствовали господствовавшие до появления квантовой теории представления о непрерывности мира. Однако, в последней четверти двадцатого века сперва возник, а затем стал стремительно нарастать интерес к проблеме дискретизации (или квантования) тех или иных давно известных структур или систем. В частности, было введено разностное уравнение КдФ, был рассмотрен дискретный оператор Шредингера L,

$$(L\psi)_n = \sqrt{A_n}\psi_{n-1} + B_n\psi_n + \sqrt{A_{n+1}}\psi_{n+1}, \tag{4}$$

изоспектральные деформации которого задаются уравнениями

$$\begin{cases} (A_n)_t = A_n(B_{n-1} - B_n) \\ (B_n)_t = B_n(A_{n+1} - A_n) \end{cases},$$

сводящимися к цепочке Тоды [9, 11].

Одним из проявлений общего интереса к проблеме дискретизации явилось появление на рубеже 80–90-х годов прошлого века в литературе (главным образом, физической) большого количества публикаций, посвященных дискретизации гармонического осциллятора (см. [2, 26, 31, 29, 3, 4, 36, 24, 28, 30, 33, 25]). Самая простая модель разностного гармонического осциллятора, предложенная Атакишиевым и Сусловым [2], получается из модели обычного гармонического осциллятора заменой дифференциальных операторов рождения A^+ и уничтожения A в соотношении Гейзенберга разностными операторами первого порядка; при этом осцилляторная алгебра, порожденная операторами A, A^+ и $L = AA^+$, по-прежнему остается изоморфной алгебре $\mathfrak{su}(2)$, а оператор Шредингера L становится дискретным вида (4). Формально-алгебраический спектр, задаваемый соотношением Гейзенберга, по-прежнему будет арифметическим, а система собственных векторов является полной в соответствующем гильбертовом пространстве (как показано в [33], такую модель возможно построить лишь на пространстве квадратично суммируемых функций на *полупрямой* $\mathbb{N}$), поскольку они выражаются через полиномы Шарлье.

Другая модель разностного осциллятора берет свое начало в работах Биденхарна [26] и Макфарлэна [31], где было предложено рассматривать "q-соотношение Гейзенберга", т.е. операторное соотношение вида

$$AA^+ = qA^+A + \alpha \tag{5}$$

где $q \neq 1$ — некоторое действительное число. Биденхарн и Макфарлэн, независимо построив в 1989-ом году реализацию квантовой группы $SU_q(2)$ с помощью q-осциллятора, были заинтересованы, главным образом, в формально-алгебраической теории (хотя, в работе [31] было упомянуто некоторое координатное представление); однако, годом позже Атакишиев и Суслов [3] изучили координатное представление q-осциллятора (5), связанное с *q-полиномами Эрмита*, взяв в качестве операторов рождения и уничтожения разностные операторы первого порядка на целочисленной решетке: $A = aT^{-1} + bT$, где T — оператор элементарного сдвига вправо. Еще через год Атакишиев и Суслов [4], рассматривая операторы вида $A = a + bT$, построили другое координатное представление q-осциллятора, которое оказалось связанным с *многочленами Стилтьеса–Вигерта*. Как и в случае гармонического осциллятора, q-соотношение определяет формально-алгебраический "фоковский" спектр оператора $L = AA^+$ (в данном случае он состоит из одной “квантовой” арифметической прогрессии и лежит в ограниченном интервале), а оператор L является неограниченным оператором на гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ квадратично суммируемых последовательностей на “дискретной” прямой. Однако, в отличии от случая гармонического осциллятора, характер спектра такого q-осциллятора до конца не изучен.

В 1994-ом году Атакишиев, Франк и Вольф в своей работе [24] продолжили рассмотрение модели q-осциллятора из [3], в которой q-соотношение Гейзенберга было реализовано симметричными разностными операторами $A = aT^{-1} + bT$ и его формально сопряженным A^+. Преимущество этой модели состоит в том, что оператор L оказывается ограниченным самосопряженным оператором на $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$, отличающимся от компактного на постоянный оператор: $L = K + cI$, где I — тождественный оператор, а c — некоторая константа. Согласно общим теоремам функционального анализа (см. [12]) такой оператор обладает чисто дискретным спектром, а его собственные функции образуют полное семейство.

В упомянутых выше работах были построены также и другие варианты дискретизации гармонического осциллятора: Атакишиев и Суслов [3] рассмотрели разностный гармонический осциллятор, собственные состояния которого выражаются через *полиномы Кравчука*; в работе [25] была предложена модель разностного осциллятора, связанная с *полиномами Мейкснера*. В работах [28, 30] рассмотрена модель q-осциллятора на квантовой плоскости: соотношение (5) реализовано q-разностными операторами, т.е. линейными операторами первого порядка относительно q-разностной производной:

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{x(q - q^{-1})}.$$

В диссертации изучается *циклическая q-цепочка Дарбу*, т.е. цепочка разностных операторов $L_1, L_2, \ldots$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = q A_{j-1}^+ A_{j-1},$$

где $\alpha_{j+r} = \alpha_j$, $L_{j+r} = L_j$ для некоторого r.

Диссертация разделена на три главы. Первая глава содержит подробное описание модели гармонического осциллятора и обзор некоторых результатов Веселова и Шабата [7] и Адлера [21], необходимые для дальнейшего изложения. Вторая глава посвящена детальному описанию некоторых дискретных моделей — разностный осциллятор [2, 33], q-осциллятор [26, 31, 3, 4, 36, 33, 24], дискретная одевающая цепочка [38, 37] (т.е. последовательность разностных операторов второго порядка, связанных преобразованиями Дарбу), являющихся частными случаями q-цепочки Дарбу. Показано, что в случае $\alpha =$

$\sum_{j=1}^{r}\alpha_j \neq 0$ циклическая дискретная одевающая цепочка не имеет решений, определенных на всех целочисленной решетке и что ее в этом случае можно (как и в случае разностного гармонического осциллятора [33]) реализовать лишь неограниченными операторами, определенными на "полупрямой" $\mathbb{N}$. Построено зависящее от параметра представление нулевой кривизны в $GL(2,\mathbb{R})$ для циклической дискретной одевающей цепочки в случае $\alpha = 0$, приводящее к первым интегралам. Для цепочки длины 2 эта конструкция позволяет найти недостающий первый интеграл, построив таким образом независимое семейство первых интегралов максимальной размерности, и, фактически, свести задачу к динамике вдоль некоторой плоской кривой.

В третьей главе содержатся основные результаты диссертации, полученные в работах [10, 16, 35]. В первом параграфе введено понятие циклической q-цепочки со сдвигом, т.е. такой q-цепочки Дарбу, у которой $L_{j+r} = T^{-s}L_jT^s$ для некоторого целого s, называемого *сдвигом* цепочки. Изучены цепочки двух типов: в первом в качестве аналогов операторов рождения и уничтожения A и A^+ берутся операторы вида $a + bT$, а во втором — вида $aT^{-1} + bT$. Показано, что операторы цепочки первого типа неограничены, если $s \geqslant r$ или $s \leqslant 0$ (что обобщает наблюдение Новикова и Тайманова [33] о неограниченности q-осциллятора) и что при четном r цепочка первого типа со сдвигом $s = r/2$ сводится к цепочке второго типа с нулевым сдвигом. Доказано, что если все изоспектральные сдвиги α_j положительны, то формально-алгебраический спектр каждого из операторов циклической q-цепочки, т.е. дискретный спектр, определяемый операторными соотношениями, состоит из r различных q-арифметических прогрессий.

Во втором параграфе третьей главы приведено принадлежащее Дынникову явное описание общего решения q-цепочки длины $r = 2$ со сдвигом $s = 1$ (ранее Атакишиевым, Франком и Вольфом [24] были найдены лишь частные решения этой задачи). Показано, что при $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$ операторы q-цепочки сходятся к гармоническому осциллятору, а при положительных $\alpha_1 \neq \alpha_2$ — к операторам одевающей цепочки Веселова–Шабата длины 2.

В третьем параграфе сформулирована и доказана основная теорема: циклическая q-цепочка первого типа четной r со сдвигом $s = r/2$ имеет r-параметрическое семейство решений для произвольных положительных α_j и $0 < q < 1$ (или для отрицательных α_j и $q > 1$); при этом все операторы L_j цепочки ограничены и имеют чисто дискретный спектр, который может быть найден по схеме Дарбу (т.е. совпадает с формально-алгебраическим спектром, задаваемым операторными соотношениями). Кроме того, описан численный эксперимент, показывающий, что при $r = 6, 10$, $\alpha_j = \alpha_{j+r/2}$ для всех $j = 1, \dots, r/2$ решение циклической q-цепочки сходится к решению одевающей цепочки длины $r/2$.

Глава 1

Некоторые непрерывные модели

1.1 Гармонический осциллятор

Начнем с подробного рассмотрения самой простой классической модели квантовой механики[1] — модели гармонического осциллятора. Все приведенные ниже утверждения можно найти в стандартных учебниках по квантовой механике (например, в учебнике Ландау и Лифшица [13], стр. 91–94); однако их изложение там с точки зрения математика является не достаточно строгим. Мы восполним этот пробел, предъявив математически строгую "теорию гармонического осциллятора".

Гармонический осциллятор $L = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2 x^2}{4}$ удовлетворяет следующему алгебраическому соотношению, иногда называемому *соотношением Гейзенберга*:

$$L + \frac{\alpha}{2} = AA^+ = A^+A + \alpha, \tag{1.1}$$

где $A = d/dx + \alpha x/2$, а $A^+ = -d/dx + \alpha x/2$ обозначает сопряженный к A дифференциальный оператор.

1.1.1 Формально-алгебраическая теория

Теорема 1.1 *Дискретный спектр произвольного оператора L в некотором гильбертовом пространстве, удовлетворяющего соотношению (1.1) для некоторого $\alpha > 0$, состоит из арифметической прогрессии*

$$\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2}, \frac{5\alpha}{2}, \ldots \tag{1.2}$$

[1] Как отметили В. Э. Адлер и А. Б. Шабат, словосочетание "классические модели квантовой механики" звучит нелепо, но не настолько, как словосочетание "квантовые модели классической механики".

При этом основное состояние ψ_0, отвечающее наименьшему собственному значению $\lambda_0 = \frac{\alpha}{2}$, находится из уравнения

$$A\psi_0 = 0, \tag{1.3}$$

а остальные получаются из него применением оператора рождения A^+:

$$\psi_k = (A^+)^k\psi_0, \quad L\psi_k = \frac{(2k+1)\alpha}{2}\psi_k. \tag{1.4}$$

Доказательство.

Покажем сперва, что собственные значения оператора L не могут быть меньше, чем $\frac{\alpha}{2}$. Действительно, пусть ψ — некоторый собственный вектор, соответствующий собственному значению λ. Тогда

$$L\psi = \lambda\psi \Longleftrightarrow A^+A\psi = \left(\lambda - \frac{\alpha}{2}\right)\psi;$$

умножая последнее равенство скалярно на ψ, получаем, что $\|A\psi\|^2 = (\lambda - \alpha/2)\|\psi\|^2$, откуда $\lambda \geqslant \alpha/2$. Заметим, что равенство при этом достигается если и только если $A\psi = 0$.

Непосредственно из (1.1) вытекают следующие коммутационные соотношения:

$$[L, A] = -\alpha A, \quad [L, A^+] = \alpha A^+. \tag{1.5}$$

Рассмотрим произвольное собственное значение λ и соответствующий ему собственный вектор ψ. Тогда, воспользовавшись первым коммутационным соотношением (1.5), имеем:

$$LA\psi = AL\psi - \alpha A\psi = (\lambda - \alpha)A\psi,$$

т.е. либо $A\psi = 0$, либо вектор $A\psi$ является собственным вектором оператора L, соответствующим собственному значению $\lambda - \alpha$. Далее,

$$\begin{aligned} LA^2\psi &= ALA\psi - \alpha A^2\psi = (\lambda - 2\alpha)A^2\psi, \\ &\dots \\ LA^k\psi &= AL(A^{k-1}\psi) - \alpha A^k\psi = (\lambda - k\alpha)A^k\psi. \end{aligned}$$

Таким образом, из индуктивных соображений получаем, что либо $A^k\psi = 0$, либо $A^k\psi$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda - k\alpha$. Но, поскольку собственные значения оператора L ограничены снизу числом $\alpha/2$, $A^m\psi = 0$ для некоторого m (пусть m — минимальное натуральное число, обладающее этим свойством), что возможно тогда и только тогда, когда собственный вектор $A^{m-1}\psi$ отвечает собственному значению

α. Поэтому $\lambda = \alpha/2+(m-1)\alpha$. Таким образом, дискретный спектр оператора L содержится в арифметической прогрессии (1.2).

Покажем теперь, что имеет место и обратное включение. Оператор A^+ увеличивает собственные значения:

$$LA^+\psi = A^+L\psi + \alpha A^+\psi = (\lambda+\alpha)A^+\psi,$$
$$\dots$$
$$L(A^+)^k\psi = A^+L(A^+)^{k-1}\psi + (A^+)^k\psi = (\lambda+k\alpha)(A^+)^k\psi$$
$$\dots$$

Заметим, что этот процесс не может в некоторый момент оборваться, поскольку условие $A^+\varphi = 0$ означает, что φ — собственный вектор $L+\alpha/2$, отвечающий нулевому собственному значению $(L+\alpha/2)\varphi = AA^+\varphi = 0$, что невозможно. Таким образом, вся арифметическая прогрессия (1.2) содержится в дискретном спектре оператора L, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.1 Если в соотношении (1.1) $\alpha < 0$, то тривиальной заменой $B = A^+$, $\beta = -\alpha$ оно приводится к тому виду, который используется в теореме. Поэтому, для случая $\alpha < 0$ теорема остается справедливой, спектр имеет вид $-\alpha/2-k\alpha$, где $k \in \mathbb{N}$, основное состояние находится из условия $A^+\psi_0 = 0$, а роль оператора рождения играет оператор A.

Замечание 1.2 Приведенное выше доказательство никаким образом не использует конкретной реализации гильбертова пространства и того факта, что в качестве оператора L взят вещественный дифференциальный оператор второго порядка. Таким образом, смысл этой теоремы состоит в том, что дискретный спектр оператора L, удовлетворяющего алгебраическому соотношению (1.1), полностью определяется этим соотношением, а соответствующие собственные векторы получаются из основного состояния применением оператора рождения A^+. В то же время, никаких очевидных ограничений на непрерывный спектр оператора L это соотношение не накладывает.

Замечание 1.3 Стоит также отметить, что дискретный спектр оператора L неограничен; поэтому оператор L, удовлетворяющий соотношению (1.1) не может быть ограниченным, независимо от его конкретной реализации.

Оператор L, удовлетворяющий соотношению Гейзенберга (1.1), является, очевидно, симметричным; поэтому его собственные векторы ψ_k ортогональны. Пусть основное состояние выбрано по норме равным единице: $\|\psi_0\| = 1$; тогда схема (1.3),(1.4) нахождения собственных векторов $\tilde{\psi}_k = (A^+)^k\psi_0$ оператора L, приведенная в формулировке теоремы (1.1), позволяет вычислить нормы этих собственных векторов (опять-таки, независимо от конкретной реализации гильбертова пространства и от формы оператора L). В дальнейшем для определенности ограничимся рассмотрением случая $\alpha > 0$.

Лемма 1.1 *Для каждого натурального k имеет место следующее соотношение:*

$$A(A^+)^k = (A^+)^k A + k\alpha(A^+)^{k-1}. \tag{1.6}$$

Доказательство.

Используя k раз подряд равенство (1.1), немедленно получаем требуемое:

$$\begin{aligned} A(A^+)^k &= AA^+(A^+)^{k-1} = A^+A(A^+)^{k-1} + \alpha(A^+)^{k-1} = \\ &= (A^+)^2A(A^+)^{k-2} + 2\alpha(A^+)^{k-1} = \cdots = (A^+)^kA + k\alpha(A^+)^{k-1}, \end{aligned}$$

$\mathfrak{Q.e.d.}$

Предложение 1.1 *Справедливо следующее равенство:*

$$\|\tilde{\psi}_k\| = \sqrt{k!\alpha^k}. \tag{1.7}$$

Доказательство.

По определению

$$\|\tilde{\psi}_k\|^2 = \|(A^+)^k\psi_0\|^2 = \langle (A^+)^k\psi_0, (A^+)^k\psi_0\rangle = \langle \psi_0, A^k(A^+)^k\psi_0\rangle, \tag{1.8}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение в нашем гильбертовом пространстве. Докажем по индукции, что справедливо следующее равенство:

$$A^k(A^+)^k\psi_0 = k!\alpha^k\psi_0. \tag{1.9}$$

База индукции тривиальным образом вытекает из соотношения (1.1), поскольку $A\psi_0 = 0$. Пусть утверждение доказано для $k-1$, тогда воспользуемся индуктивным предложением и формулой (1.6):

$$\begin{aligned} A^k(A^+)^k\psi_0 &= A^{k-1}(A(A^+)^{k-1})A^+\psi_0 = \\ &= A^{k-1}((A^+)^{k-1}A + (k-1)\alpha(A^+)^{k-2})A^+\psi_0 = \\ &= A^{k-1}(A^+)^{k-1}(AA^+\psi_0) + (k-1)\alpha A^{k-1}(A^+)^{k-1}\psi_0 = \\ &= \alpha A^{k-1}(A^+)^{k-1}\psi_0 + (k-1)\alpha A^{k-1}(A^+)^{k-1}\psi_0 = \\ &= k\alpha A^{k-1}(A^+)^{k-1}\psi_0 = k!\alpha^k\psi_0. \end{aligned}$$

Подставляя теперь равенство (1.9) в выражение для нормы (1.8), получаем формулу (1.7), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Нормируя систему $\{\tilde{\psi}_k\}$, получаем ортонормированный базис из собственных векторов

$$\psi_k := \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}}(A^+)^k\psi_0 \tag{1.10}$$

оператора L.

1.1.2 Координатное представление

Вернемся теперь к рассмотрению *координатного представления* гармонического осциллятора, т.е. в качестве гильбертова пространства возьмем пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ квадратично интегрируемых функций на прямой, а в качестве операторов рождения и уничтожения — дифференциальные операторы первого порядка:

$$A := \frac{d}{dx} + f(x) \Longrightarrow A^+ = -\frac{d}{dx} + f(x).$$

Тогда $L = -\partial_x^2 + u(x)$, где $u := f^2 + f'$, а ∂_x — сокращенное обозначение для оператора дифференцирования d/dx. Соотношение Гейзенберга (1.1) сводится к уравнению на функцию f: $2f' = \alpha$, откуда находим $f(x) = \alpha x/2$, полагая константу интегрирования равной нулю. Основное состояние ψ_0 находится из условия $A\psi_0 = 0$ интегрированием соответствующего уравнения:

$$\psi_0(x) = ce^{-\frac{\alpha x^2}{4}},$$

где c — константа интегрирования. Условие нормировки $\|\psi_0\| = 1$ дает:

$$1 = \|\psi_0\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2 e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx = c^2\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{\pi},$$

откуда $c = \sqrt[4]{\alpha/2\pi}$. Таким образом, в качестве основного состояния получаем плотность гауссова распределения

$$\psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{4}\right).$$

Выразим теперь собственные векторы (1.10) в координатном представлении через полиномы Эрмита, рекуррентно задаваемые следующим образом (см. [17], стр. 157–164):

$$H_0(x) :\equiv 1, \quad H_k(x) := \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{k-1}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Предложение 1.2 *Нормированные собственные векторы (1.10) в координатном представлении имеют следующий вид:*

$$\psi_k(x) = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)^k \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}} H_k\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\psi_0(x). \tag{1.11}$$

Доказательство.

Дифференцированием сложной функции получаем следующую рекуррентную формулу для "растянутых" полиномов Эрмита:

$$H_k\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\left(\alpha x - \frac{d}{dx}\right) H_{k-1}\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Докажем равенства (1.11) по индукции. База индукции тривиальна:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}A^+\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt[4]{\frac{\alpha}{2\pi}}\left(\frac{\alpha x}{2} - \frac{d}{dx}\right)e^{-\alpha x^2/4} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}H_1\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\psi_0(x).$$

Воспользуемся теперь индуктивным предложением (штрих в цепочке равенств ниже означает формальную производную по аргументу):

$$\begin{aligned}
\psi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}}(A^+)^k\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}}A^+(A^+)^{k-1}\psi_0 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}}\left(\frac{\alpha x}{2} - \frac{d}{dx}\right)\left(\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)^{k-1} H_{k-1}\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\psi_0(x)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)^{k-1}\left(\frac{\alpha x}{2}H_{k-1}\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) - \sqrt{\frac{\alpha}{2}}H'_{k-1}\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) + \right.\\
&+ \left.\frac{\alpha x}{2}H_{k-1}\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\right)\psi_0(x) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)^{k}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\left(\alpha x - \frac{d}{dx}\right)\left(H_{k-1}\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\right)\psi_0(x) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)^{k} H_k\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\psi_0(x),
\end{aligned}$$

Q.e.d.

Известно, что полиномы Эрмита H_k образуют полную ортонормированную систему в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ с весом $p(x) = e^{-x^2}$ (см. [12], стр. 404). Поэтому, полна также и система собственных векторов $\{\psi_k\}$ гармонического осциллятора.

Замечание 1.4 Следует отметить, что полнота системы собственных векторов гармонического осциллятора в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ не следует непосредственно из алгебраического соотношения (1.1) (в отличии от вида (1.2) дискретного спектра оператора L), поскольку оператор L не является ограниченным всюду определенным оператором в гильбертовом пространстве.

Согласно общей теории одномерного уравнения Шредингера, если потенциал соответствующего оператора растет как положительная степень x на бесконечности, то оператор не имеет непрерывного спектра (см. [18], стр. 291–292). Таким образом, имеет место следующая

Теорема 1.2 *Гармонический осциллятор $L = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2 x^2}{4}$ имеет чисто дискретный спектр, состоящий из арифметической прогрессии (1.2). Соответствующие нормированные собственные функции ψ_k выражаются через полиномы Эрмита по формулам (1.11) и образуют полную систему в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.*

1.2 Цепочка Дарбу

Рассмотрим последовательность самосопряженных дифференциальных операторов $L_1, L_2, \ldots$ на прямой, связанных *преобразованиями Дарбу*:

$$L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = A_{j-1}^+ A_{j-1}, \tag{1.12}$$

где $A_j = d/dx + f_j(x)$ — дифференциальные операторы первого порядка. Такую последовательность операторов будем называть *цепочкой Дарбу*. Цепочка называется *циклической*, если для некоторого r и всех $j = 1, 2, \ldots$ выполнено $L_{j+r} = L_j$. Число r называется *периодом* (или *длиной*) данной цепочки. Легко заметить, что в частном случае $r = 1$ оператор $L_1 + \alpha/2$ является гармоническим осциллятором.

Замечание 1.5 Вообще говоря, условие $L_{j+r} = L_j$ не влечет равенство $f_{j+r} = f_j$, поскольку факторизация оператора Шредингера вида $L = AA^+$, где $A = d/dx + f$, определена неоднозначно. Действительно, пусть имеется другая факторизация $L = BB^+$, где $B = d/dx + g$; тогда функции f и g оказываются связанными уравнением Риккати

$$f' + f^2 = g' + g^2. \tag{1.13}$$

Тем не менее, говоря о циклическом замыкании цепочки (1.12), мы будем предполагать, что функции f_{j+r} и f_j совпадают, поскольку рассмотрение более общего случая не дает ничего принципиально нового: решения более общей системы однозначно восстанавливаются по решениям системы, для которой $f_{j+r} = f_j$, по модулю решения уравнения Риккати вида (1.13).

1.2.1 Спектральные свойства

Мы видели, что циклическая цепочка Дарбу является обобщением гармонического осциллятора. Оказывается, что если $\alpha \neq 0$, где $\alpha = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j$, то, как и в случае гармонического осциллятора, алгебраические соотношения (1.12) позволяют найти дискретный спектр операторов цепочки. Прежде чем сформулировать и доказать соответствующую теорему, отметим что коммутационные соотношения (1.5) имеют место также и для цепочки Дарбу, если в качестве операторов рождения и уничтожения взять

$$A = A_1 A_2 \cdots A_r, \quad A^+ = A_r^+ A_{r-1}^+ \cdots A_1^+$$

(для оператора L_1).

Теорема 1.3 [7] *Пусть $\alpha_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, r$. Тогда дискретный спектр $\{\lambda_{j,0}, \lambda_{j,1}, \ldots\}$ оператора L_j из циклической цепочки (1.12) состоит из r арифметических прогрессий:*

$$k\alpha, \quad \alpha_{j-1} + k\alpha, \quad \alpha_{j-2} + \alpha_{j-1} + k\alpha, \quad \ldots, \quad \alpha_j + \alpha_{j+2} + \cdots + \alpha_{j-1} + k\alpha, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{1.14}$$

При этом основное состояние $\psi_{j,0}$ оператора L_j, отвечающее наименьшему собственному значению $\lambda_{j,0} = 0$, находится из уравнения

$$A_{j-1}\psi_{j,0} = 0,$$

а остальные могут быть вычислены по схеме Дарбу:

$$\psi_{j+1,k+1} = A_j^+ \psi_{j,k}, \quad L_j \psi_{j,k} = \lambda_{j,k}\psi_{j,k}, \quad \text{где} \quad \lambda_{j+1,k+1} = \lambda_{j,k} + \alpha_j, \quad \lambda_{j+r,k} = \lambda_{j,k}.$$

Доказательство.

Пусть λ — собственное значение оператора L_j, а ψ — соответствующий ему собственный вектор; стандартное рассуждение (см. доказательство теоремы 1.1) показывает, что $\lambda \geq 0$, причем равенство достигается если и только если $A_{j-1}\psi = 0$. Очевидно, что если вектор $A_{j-1}\psi$ отличен от нуля, то он является собственным для оператора L_{j-1} с собственным значением $\lambda - \alpha_{j-1}$. Все собственные значения оператора L_{j-1} неотрицательны, причем равенство нулю достигается если и только если соответствующий вектор лежит в ядре оператора A_{j-1}, и т.д. Аналогично, если $L_j\psi = \lambda\psi$, то вектор $A_j^+\psi$ является собственным для оператора L_{j+1}, соответствующим собственному значению $\lambda + \alpha_j$.

Коммутационные соотношения (1.5) показывают, что оператор A "опускает" собственные значения на α, а оператор A^+ — "поднимает" их на α. Пусть

λ — произвольное собственное значение оператора L_1; будем "опускать" его изоспектральным сдвигом A до тех пор, пока это возможно. Процесс остановится, когда для некоторого m будет выполнено равенство $A^{m+1}\psi = 0$, а это возможно лишь если

$$A_j A_{j+1} \cdots A_r (A^m \psi) = 0$$

для некоторого $j = 1, 2 \ldots r$. Таким образом, $A_j A_{j+1} \cdots A_r (A^m \psi)$ — основное состояние оператора L_{j+1}; с другой стороны, оператор $A_j A_{j+1} \cdots A_r$ опускает спектр на $\alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_r$, а оператор A^m — на $m\alpha$. Поэтому, любое собственное значение λ оператора L_1 попадает в какую-нибудь из арифметических прогрессий (1.14). Обратное включение доказывается "поднятием" собственных значений 0, α_{j-1}, $\alpha_{j-2} + \alpha_{j-1}, \ldots$, $\alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_{j-1}$ с помощью оператора рождения A^+, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.6 Как и в случае гармонического осциллятора, следует отметить, что дискретный спектр операторов циклической цепочки Дарбу полностью определяется алгебраическими соотношениями (1.12) и не зависит от конкретной реализации гильбертова пространства.

1.2.2 Одевающая цепочка Веселова–Шабата

Циклическая цепочка Дарбу эквивалентна следующей системе дифференциальных уравнений на коэффициенты операторов:

$$(f_j + f_{j+1})' = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \alpha_{j+1}, \tag{1.15}$$

где $f_j = f_{j+r}$, $\alpha_j = \alpha_{j+r}$, которую мы в дальнейшем будем называть *одевающей цепочкой Веселова–Шабата*. Впервые эта система уравнений (в частном случае $\alpha_j = 0$ для всех $j = 1, \ldots r$) появилась, по-видимому, в работе Вайса [39], где была доказана ее интегрируемость при нечетном r, затем (уже в полной общности и близком контексте) она упоминалась в работе Шабата и Ямилова [20] и, наконец, была подробно изучена в работе Веселова и Шабата [7].

Введем обозначение $\alpha = \sum_{j=1}^r \alpha_j$; при $\alpha = 0$ для любого r цепочка (1.15) обладает одним очевидным интегралом:

$$2 \sum_{j=1}^r f_j = \alpha. \tag{1.16}$$

Если $\alpha \neq 0$, то одевающая цепочка также обладает интегралом $2\sum_{j=1}^r f_j - \alpha x$, однако, этот интеграл уже является "неавтономным", т.е. явно зависящим на независимой переменной x.

Свойства операторов одевающей цепочки принципиально отличаются для случаев $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$. Мы не будем останавливаться на первом из них и лишь отметим, что в этом случае операторы циклической цепочки Дарбу оказываются конечнозонными, функции f_j выражаются через $\wp$ функцию Вейерштрасса при $r = 3$ и через θ-функции Римана при $r > 3$. Нас, главным образом, будет интересовать случай $\alpha \neq 0$.

1.2.3 Цепочка длины 2

При $r = 2$ наличие первого интеграла (1.16) позволяет решить уравнения одевающей цепочки явным образом. Обозначая $f = f_1$ и подставляя $f_2 = \frac{\alpha x}{2} - f$ (константа интегрирования положена равной нулю) в исходные уравнения, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\alpha}{2} = \alpha x \cdot f(x) - \frac{\alpha^2 x^2}{4} + \alpha_2.$$

Отсюда заключаем, что

$$f_1(x) = \frac{\alpha x}{4} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\alpha x}, \quad f_2(x) = \frac{\alpha x}{4} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\alpha x}. \tag{1.17}$$

Решая уравнения $\psi'_{j,0} = -f_j \cdot \psi_{j,0}$, где $j = 1, 2$, находим основные состояния операторов цепочки L_j:

$$\psi_{j,0}(x) = c_j |x|^{\frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{2\alpha}} e^{-\frac{\alpha x^2}{8}}$$

(здесь индекс $j \in \mathbb{Z}_2$ считается циклическим, а c_j — константы интегрирования). Пусть

$$\kappa_j = \frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{\alpha};$$

тогда условие нормировки приводит к следующему:

$$\begin{aligned} 1 = \|\psi_{j,0}\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} c_j^2 |x|^{\kappa_j} e^{-\frac{\alpha x^2}{4}} dx \;&=\; 2c_j^2 \int_0^{+\infty} x^{\kappa_j} e^{-\frac{\alpha x^2}{4}} dx = \\ &=\; c_j^2 \cdot 2^{\kappa_j + 1} \alpha^{-\frac{\kappa_j + 1}{2}} \Gamma\left(\frac{\kappa_j + 1}{2}\right), \end{aligned}$$

где Γ обозначает гамма-функцию Эйлера. Таким образом,

$$\psi_{j,0}(x) = \frac{1}{2^{\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha}}} \sqrt{\frac{\alpha^{\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha}\right)}} |x|^{\frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{2\alpha}} e^{-\frac{\alpha x^2}{8}}, \quad j \in \mathbb{Z}_2.$$

Замечание 1.7 Отметим, что в случае $r = 2$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ потенциал оператора Шредингера, построенного по решению одевающей цепочки, уже имеет особенность в нуле (см. рис. 3.3), а основные состояния $\psi_{j,0}$ не являются гладкими функциями на $\mathbb{R}$.

1.2.4 Одевающая цепочка и уравнения Пенлеве

Первый нетривиальный случай представляет собой одевающая цепочка длины $r = 3$. В этом случае система уравнений (1.15) принимает вид

$$\begin{cases} (f_1 + f_2)' = f_1^2 - f_2^2 + \alpha_2 \\ (f_2 + f_3)' = f_2^2 - f_3^2 + \alpha_3 \\ (f_3 + f_1)' = f_3^2 - f_1^2 + \alpha_1 \end{cases} \tag{1.18}$$

Предложение 1.3 [21] *При $\alpha = -2$ система (1.18) сводится к четвертому уравнению Пенлеве:*

$$y'' = \frac{1}{2y}(y')^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(x^2 - a)y + \frac{b}{y}, \tag{1.19}$$

где a, b — произвольные постоянные, а $y = y(z)$ — неизвестная функция.

Доказательство.

Введем обозначения $g(x) := f_2(x) + f_1(x)$, $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$; тогда первое из уравнений (1.18) можно переписать в виде

$$g' = gh + \alpha_2,$$

откуда $h = (g' - \alpha_2)/g$. Наличие первого интеграла (1.16) позволяет исключить из уравнений (1.18) функцию f_3:

$$f_3(x) = \frac{\alpha x}{2} + c - f_1(x) - f_2(x) = \frac{\alpha x}{2} + c - g(x),$$

где c — константа интегрирования. Вычитая из третьего уравнения (1.18) второе, получаем следующее:

$$\begin{aligned} h'(x) = 2f_3^2(x) - (f_1^2(x) + f_2^2(x)) + \alpha_1 - \alpha_3 \; &= \; 2\left(\frac{\alpha x}{2} + c - g(x)\right)^2 - \\ &= \; \frac{1}{2}(g^2(x) + h^2(x)) + \alpha_1 - \alpha_3. \end{aligned}$$

Подставляя теперь выражение для функции h, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{g''}{g} - \frac{(g')^2}{g^2} + \frac{\alpha_2 g'}{g^2} \; &= \; \frac{\alpha^2 x^2}{2} + 2c^2 + 2g^2 + 2c\alpha x - 2g\alpha x - 4gc - \\ &- \; \frac{g^2}{2} - \frac{(g')^2}{2g^2} + \frac{\alpha_2 g'}{g^2} - \frac{\alpha_2^2}{2g^2} + \alpha_1 - \alpha_3. \end{aligned}$$

После преобразований получаем следующее уравнение:

$$g'' = \frac{1}{2g}(g')^2 + \frac{3}{2}g^3 + (-2\alpha x - 4c)g^2 + \left(\frac{\alpha^2 x^2}{2} + 2\alpha c x + 2c^2 + \alpha_1 - \alpha_3\right) g - \frac{1}{2}\frac{\alpha_2^2}{g};$$

полагая теперь $\alpha = -2$, приходим к уравнению

$$g'' = \frac{1}{2g}(g')^2 + \frac{3}{2}g^3 + 4(x-c)g^2 + 2\left((x-c)^2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}\right) g - \frac{1}{2}\frac{\alpha_2^2}{g}.$$

Обозначая в последнем уравнении

$$z = x - c, \quad y(z) = g(z+c), \quad a = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}, \quad b = -\frac{\alpha_2^2}{2},$$

приходим к уравнению (1.19) на функцию $f_1(z+c) + f_2(z+c)$, которое в этих обозначениях в книге [8] (см. список на стр. 172) называется четвертым уравнением Пенлеве, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 1.8 Уравнение (1.19) неразрешимо в элементарных и "элементарных специальных" функциях (таких как, например, $\wp$-функция Вейерштрасса или функции Бесселя) и, потому, требует введения существенно новых трансцендентных функций, получивших название *трансцендентов Пенлеве.*

Описанная выше связь периодической цепочки Дарбу с уравнениями Пенлеве была замечена впервые, по-видимому, В. Адлером [21]. Аналогичным образом при $r = 4$ система (1.15) при некоторых дополнительных ограничениях на параметры α_j сводится к пятому уравнению Пенлеве (см. [21]). Рассмотрение цепочек длины $r \geqslant 5$ приводит к уравнением порядка выше, чем 2, которые иногда называются *высшими Пенлеве.*

Замечание 1.9 В работе [37] было предложено рассматривать более общий способ замыкания одевающей цепочки: вместо того, чтобы требовать, чтобы операторы L_1 и L_{r+1} совпадали, можно требовать, чтобы они были сопряжены с помощью некоторого унитарного оператора сдвига. При этом оказывается, что при $r = 4$ соответствующая алгебра операторов сводится к так называемой квадратичной алгебре Хана $QH(3)$.

1.2.5 Гамильтонова структура одевающей цепочки

Воспроизведем некоторые результаты из работы [7] касающиеся гамильтоновой теории одевающей цепочки. Рассмотрим сперва случай $\alpha = 0$. В этом случае уравнения (1.15) можно переписать в виде

$$(f_j + f_{j+1})' = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \beta_j - \beta_{j+1},$$

где $\alpha_{j+1} = \beta_j - \beta_{j+1}$; легко заметить, что при $\alpha = 0$ параметры β_j восстанавливаются по параметрам α_j однозначно с точностью до одновременного прибавления некоторой константы. Пусть T — оператор циклического сдвига на пространстве зависимых переменных f_j:

$$T:\ f_j \mapsto f_{j+1}.$$

Тогда его матрица в естественном базисе имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения: $\mathbf{f} := (f_1, f_2, \dots f_r)$, $\mathfrak{b} := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$; теперь уравнения одевающей цепочки можно переписать в векторном виде:

$$(E+T)\mathbf{f}' = (E-T)(\mathbf{f}^2 + \mathfrak{b}) \Longleftrightarrow \mathbf{f}' = J(\mathbf{f}^2 + \mathfrak{b}),$$

где $J := (E+T)^{-1}(E-T) = (J_{ik})$, $J_{ik} = (-1)^{i-k (\bmod r)}$ при $i \neq k$, $J_{ii} = 0$ при всех $i = 1, \dots, r$. Нетрудно проверить, что кососимметрическая матрица J задает пуассонову структуру на пространстве зависимых переменных f_j:

$$\{f_k, f_l\} = J_{kl}. \tag{1.20}$$

Предложение 1.4 [7] *Одевающая цепочка (1.15) является гамильтоновой системой относительно скобки Пуассона (1.20) с гамильтонианом*

$$H := \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{3} f_j^3 + \beta_j f_j \right).$$

Доказательство.

Нам нужно показать, что $f_j' = \{H, f_j\}$ для всех $j = 1, \dots, r$. Действительно,

$$\{H, f_j\} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial H}{\partial f_i} \{f_i, f_j\} = \sum_{i=1}^{r} J_{ij}(f_j^2 + \beta_j) = f_j',$$

Q.e.d.

Рассмотрим теперь случай $\alpha \neq 0$. Оказывается, в этом случае одевающая цепочка тоже обладает гамильтоновой структурой, однако для того, чтобы убедиться в этом, необходимо немного модифицировать приведенное выше рассуждение, поскольку такой переход от параметров α_j к параметрам β_j невозможен при $\alpha \neq 0$. Введем новые переменные

$$v_j := f_j - \frac{\alpha x}{2r}, \quad j = 1, 2, \dots r; \tag{1.21}$$

легко заметить, что при этом вид скобки Пуассона (1.20) сохранится, а уравнения одевающей цепочки примут вид

$$(v_j + v_{j+1})' = v_j^2 - v_{j+1}^2 + \frac{\alpha x}{r}(v_j - v_{j-1}) + \alpha_{j+1} - \frac{\alpha}{r}. \tag{1.22}$$

При этом "новые" параметры $\alpha_{j+1} - \alpha/r$ обладают тем свойством, что их сумма равна нулю, т.е. возможно перейти к параметрам β_j, определяемым следующим образом: $\alpha_{j+1} - \alpha/r = \beta_j - \beta_{j+1}$. Перепишем теперь уравнения (1.22) в векторном виде:

$$\mathbf{v}' = J\left(\mathbf{v}^2 + \frac{\alpha x}{r}\mathbf{v} + \mathfrak{b}\right),$$

где, как обычно, $\mathbf{v} := (v_1, v_2, \dots, v_r)$, $\mathfrak{b} := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$. Совершенно аналогично предложению 1.4, доказывается следующее

Предложение 1.5 [7] *Одевающая цепочка (1.22) является гамильтоновой системой относительно скобки Пуассона $\{v_i, v_j\} = J_{ij}$ с гамильтонианом*

$$H := \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{3}v_j^3 + \frac{\alpha x}{2r}v_j^2 + \beta_j v_j\right).$$

1.2.6 Полная интегрируемость при $\alpha = 0$

Пусть операторы Шредингера $L_1, L_2, \dots, L_r$, где $L_j = -\frac{d^2}{dx^2} + u_j$ для всех $j = 1, 2, \dots r$, связаны в периодическую цепочку Дарбу (1.12). Тогда потенциал j-того оператора определяется формулой $u_j = f_j' + f_j^2 - \alpha_j$. Рассмотрим набор собственных функций этих операторов, связанных преобразованиями Дарбу:

$$L_j\psi_j = \lambda_j\psi_j, \quad \psi_{j+1} = A_j^+\psi_j, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Тогда согласно (1.3) $\lambda_{j+1} = \lambda_j + \alpha_j$ для каждого j; введем спектральный параметр $\lambda := \lambda_1$.

Определим вектор

$$\Psi_j := \begin{pmatrix} \psi_j \\ \psi_j' \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots;$$

тогда, как легко видеть, уравнение Шредингера $\psi_j'' = (u_j - \lambda_j)\psi_j$ может быть переписано в векторном виде следующим образом:

$$\Psi_j' = U_j \Psi_j, \quad \text{где} \quad U_j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_j - \lambda_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_j' + f_j^2 - \lambda - \beta_j & f_j \end{pmatrix},$$

где $\beta_j := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j$. Преобразование Дарбу $\psi_j \mapsto \psi_{j+1}$ также может быть записано в векторном виде:

$$\Psi_{j+1} = W_j \Psi_j, \quad \text{где} \quad W_j = \begin{pmatrix} f_j & -1 \\ f_j' - u_j + \lambda_j & f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j & -1 \\ -f_j^2 + \lambda + \beta_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.6 [7] *При $\alpha = 0$ для уравнений (1.15) одевающей цепочки имеет место следующее представление Лакса:*

$$\frac{d}{dx} W(\lambda) = [U_1, W(\lambda)], \tag{1.23}$$

где $W(\lambda) := W_r W_{r-1} \dots W_1$.

Доказательство.

Перепишем сперва уравнения (1.15) в матричном виде. Пусть ψ_1 — произвольное решение соответствующего уравнения Шредингера $L_1\psi_1 = \lambda$; тогда для соответствующего вектора Ψ_j, построенного из вектора Ψ_1 с помощью преобразований Дарбу, очевидно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\Psi_{j+1}' = (W_j \Psi_j)' = W_j' \Psi_j + W_j \Psi_j' = W_j' \Psi_j + W_j U_j \Psi_j = \left(W_j' + W_j U_j\right) \Psi_j.$$

С другой стороны,

$$\Psi_{j+1}' = U_{j+1} \Psi_{j+1} = U_{j+1} W_j \Psi_j;$$

таким образом, для каждого $j = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$W_j' = U_{j+1} W_j - W_j U_j. \tag{1.24}$$

Прямая проверка (перемножение соответствующих матриц) показывает, что матричные уравнения (1.24) влекут уравнения одевающей цепочки.

Использование уравнения (1.24) немедленно дает следующее:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(\lambda) &= W_r' W_{r-1} \dots W_1 + W_r W_{r-1}' \dots W_1 + \cdots + W_r W_{r-1} \dots W_1' = \\ &= \left(U_{r+1} W_r - W_r U_r\right) W_{r-1} \dots W_1 + \\ &+ W_r \left(U_r W_{r-1} - W_{r-1} U_{r-1}\right) \dots W_1 + \cdots \\ &+ W_r W_{r-1} \dots \left(U_2 W_1 - W_1 U_1\right) = U_{r+1} W(\lambda) - W(\lambda) U_1. \end{aligned}$$

Но при $\alpha = 0$ преобразование Дарбу, соответствующее $W(\lambda)$, задает дискретную изоспектральную симметрию, $\lambda_{r+1} = \lambda_1 = \lambda$, т.е. $U_{r+1} = U_1$. Значит, $W'(\lambda) = [U_1, W(\lambda)]$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Легко видеть, что след матрицы $W(\lambda)$ является многочленом от λ,

$$\operatorname{tr} W(\lambda) = I_0 + \lambda I_1 + \lambda^2 I_2 + \cdots$$

Предложение 1.7 [7] *Коэффициенты $I_0, I_1, I_2, \ldots$ являются первыми интегралами одевающей цепочки, т.е. след $\operatorname{tr} W(\lambda)$ является производящей функцией для первых интегралов системы (1.15).*

Доказательство.

На траекториях одевающей цепочки имеем:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tr} W(\lambda) = \operatorname{tr}\left(\frac{d}{dx} W(\lambda)\right) = \operatorname{tr}\left([U_1, W(\lambda)]\right) = 0,$$

т.е. коэффициенты $I_0, I_1, I_2, \ldots$ являются интегралами уравнений (1.15), $\mathfrak{Q.e.d.}$

В работе [7] показано, что при нечетном $r = 2p + 1$ степень многочлена $\operatorname{tr} W(\lambda)$ равна p, т.е. предложение 1.7 дает достаточное для полной интегрируемости количество интегралов. Из явного вида этих интегралов (см. [7]) следует их независимость, а их инволютивность следует из того факта, что одевающая цепочка является бигамильтоновой системой и интегралы $I_0, I_1, \ldots, I_p$ совпадают с интегралами, даваемыми общей схемой Ленарда–Магри для бигамильтоновых систем. Мы не будем подробно на этом останавливаться и в качестве вывода лишь сформулируем следующий результат.

Теорема 1.4 [7] *При нечетном r и $\alpha = 0$ одевающая цепочка является вполне интегрируемой гамильтоновой системой.*

Замечание 1.10 Нетрудно заметить, что приведенное выше рассуждение с построением представления Лакса не проходит для случая $\alpha \neq 0$, поскольку не выполнено матричное равенство $U_1 = U_{r+1}$. Тем не менее, можно рассмотреть функции $\tilde{I}_0, \tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_p$, получаемые из интегралов $I_0, I_1, \ldots, I_p$ из предложения (1.7) заменой (1.21). Поскольку скобки Пуассона для переменных f_j и v_j одинаковы, полученные функции по-прежнему будут в инволюции; их независимость также при этом сохранится. Таким образом, при возмущении параметров α_j от начального положения, при котором $\alpha = 0$, совместные поверхности уровня функций $I_1, I_2, \ldots I_p$, по которым проходят траектории системы (1.15), начинают "плыть" с течением времени x. В этом смысле, при $\alpha \neq 0$ одевающая цепочка демонстрирует "близкое к интегрируемому" поведение.

Ситуация с интегрируемостью одевающей цепочки четной длины несколько сложнее, и мы не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса.

Глава 2

Дискретизация

2.1 Разностный осциллятор

Мы видели, что дискретный спектр оператора L, удовлетворяющего соотношению Гейзенберга (1.1), представляет собой арифметическую прогрессию; поэтому оператор L не может быть ограниченным независимо от реализации гильбертова пространства. Тем не менее, попробуем реализовать соотношение

$$L = AA^{+} - \alpha = A^{+}A \tag{2.1}$$

разностными операторами на пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ двусторонних квадратично суммируемых последовательностей и изучить собственные векторы соответствующего оператора L. Действуя по аналогии с непрерывным случаем, естественно рассмотреть операторы, определенные следующим образом:

$$Ay(n) := a(n)y(n)+b(n)y(n+1), \quad A^{+}y(n) = a(n)y(n)+b(n-1)y(n-1), \tag{2.2}$$

где $a(n), b(n) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Прямая проверка показывает, что соотношение (2.1) сводится к следующим условиям на коэффициенты:

$$\begin{cases} a^2(n) + b^2(n) = a^2(n) + b^2(n-1) + \alpha \\ a(n+1)b(n) = a(n)b(n) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b^2(n) = b^2(n-1) + \alpha \\ a(n) \equiv a = \mathrm{const} \end{cases}. \tag{2.3}$$

Такая система, очевидно, несовместна на множестве действительных чисел, поскольку при $n < n_0$ для некоторого n_0 коэффициенты $b(n)$ должны быть мнимыми. Таким образом, соотношение (2.1) не реализуется разностными операторами вида (2.2) на пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.

Следуя работе [33], положим $n_0 := 1$, $b(1) := \alpha$ и рассмотрим разностный оператор (2.2) как оператор на пространстве

$$\left\{ \{y(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z}) \mid y(n) = 0 \text{ при } n \leq 0 \right\} \cong \mathcal{L}_2(\mathbb{N}).$$

В этом случае можно считать, что все коэффициенты $a(n)$ и $b(n)$ при $n < 1$ равны нулю. Тогда уравнения (2.3) оказываются разрешимыми, т.е. нам удалось реализовать соотношение (2.1) разностными операторами вида (2.2), но на пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{N})$. При сделанных выше допущениях $b(n) = \pm\sqrt{n\alpha}$; для определенности выберем знак “$+$” и будем считать, что $a = 1$. Тогда основное состояние определяется разностным уравнением

$$\psi(n) + \psi(n+1)\sqrt{n\alpha} = 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

поэтому, последовательно вычисляя координаты, получаем, что

$$\psi_0 = \left\{ \frac{(-1)^{n-1} c}{\sqrt{(n-1)!\alpha^{n-1}}} \right\}_{n=1}^{+\infty}, \tag{2.4}$$

где c — константа, определяемая начальными данными (в формуле (2.4) полагаем $0! := 1$). Из условия нормировки

$$1 = \|\psi_0\|^2 = c^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!\alpha^{n-1}} = c^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/\alpha)^n}{n!} = c^2 e^{1/\alpha},$$

получаем, что $c = e^{-1/2\alpha}$.

Полиномы Шарлье P_k дискретной переменной $n = 1, 2, \ldots$ рекуррентно задаются следующим образом:

$$P_0(n) :\equiv 1, \quad P_k(n) := (1 - \alpha(n-1)T^{-1})P_{k-1}(n), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Предложение 2.1 *Нормированные собственные векторы разностного оператора L имеют следующий вид:*

$$\psi_k = \left\{ \frac{e^{-1/2\alpha}}{\sqrt{k!\alpha^k}} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!\alpha^{n-1}}} P_k(n) \right\}_{n=1}^{+\infty}.$$

Доказательство.

Как и в непрерывном случае доказательство проведем по индукции; база индукции $k = 0$ тривиальным образом следует из определения нулевого полинома Шарлье и вида (2.4) основного состояния. Пусть теперь утверждение доказано для $k-1$, тогда

$$\begin{aligned}
\psi_k(n) &= \frac{e^{-1/2\alpha}}{\sqrt{k!\alpha^k}}\left(A\sqrt{(k-1)!\alpha^{k-1}}\psi_{k-1}\right)(n) = \\
&= \frac{e^{-1/2\alpha}}{\sqrt{k!\alpha^k}}\left(1+\sqrt{(n-1)\alpha}T^{-1}\right)\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!\alpha^{n-1}}}P_{k-1}(n) = \\
&= \frac{e^{-1/2\alpha}}{\sqrt{k!\alpha^k}}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!\alpha^{n-1}}}\left(1-\alpha(n-1)T^{-1}\right)P_k(n) = \\
&= \frac{e^{-1/2\alpha}}{\sqrt{k!\alpha^k}}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!\alpha^{n-1}}}P_k(n)
\end{aligned}$$

(заметим, что при применении оператора T^{-1} к множителю, стоящему перед многочленом Шарлье, под корнем получается факториал отрицательного числа, если $n=1$; чтобы отдельно не рассматривать этот случай, формально домножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{(n-1)\alpha}$), после чего эта проблема исчезает), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.1 Многочлены $P_k = P_k(n,\alpha)$, определенные соотношениями (2.5), не совсем совпадают с многочленами $c_k(n,a)$, называемыми многочленами Шарлье в книге Бейтмана и Эрдейи (см. [5], стр. 223–224). Точнее, они связаны следующим образом:

$$P_k(n,\alpha) = c_k(n-1, 1/\alpha), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку многочлены P_k образуют полное семейство в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{N})$ с весом ψ_0^2, являющимся квадратом плотности распределения Пуассона, собственные состояния разностного осциллятора (2.1) также образуют полную систему. Отметим, что как и в случае обычного гармонического осциллятора, полнота системы собственных векторов оператора L не является следствием алгебраического соотношения (2.1).

2.2 Дискретная одевающая цепочка

В работе Жеданова и Спиридонова [38] была рассмотрена дискретная одевающая цепочка, т.е. последовательность разностных операторов $L_1, L_2, \ldots$ второго порядка, связанных дискретными преобразованиями Дарбу

$$L_j = A_jA_j^+ - \alpha_j = A_{j-1}^+A_{j-1}, \tag{2.6}$$

где $A_j = a_j(n) + b_j(n)T$, а T — оператор сдвига. Нетрудно проверить, что это операторное соотношение эквивалентно следующей системе разностных уравнений на коэффициенты операторов:

$$\begin{cases} a_j^2(n) + b_j^2(n) = a_{j-1}^2(n) + b_{j-1}^2(n-1) + \alpha_j \\ a_j(n)b_j(n-1) = a_{j-1}(n-1)b_{j-1}(n-1) \end{cases}. \tag{2.7}$$

2.2.1 О существовании решений циклической цепочки

В работе [38] изучался вопрос о том, какие потенциалы дискретного оператора Шредингера можно получить из некоторых простейших потенциалов путем применения последовательных преобразований Дарбу; там приводится система (2.7). Однако, в этой работе не обсуждается интересующий нас вопрос циклического замыкания подобной цепочки. Введем обозначения $\xi_j(n) = a_j^2(n)$, $\eta_j(n) = b_j^2(n)$; тогда система (2.7) примет вид

$$\begin{cases} \xi_j(n) + \eta_j(n) = \xi_{j-1}(n) + \eta_{j-1}(n-1) + \alpha_j \\ \xi_j(n)\eta_j(n-1) = \xi_{j-1}(n-1)\eta_{j-1}(n-1) \end{cases}. \tag{2.8}$$

Прежде чем рассматривать циклические замыкания цепочки (2.6), необходимо отметить следующее обстоятельство. Мы видели (см. замечание 1.5), что в непрерывном случае условие $L_{j+r} = L_j$ обеспечивает совпадение коэффициентов операторов факторизации лишь с точностью до решения некоторого уравнения Риккати. Аналогичная ситуация имеет место и в дискретном случае.

Предложение 2.2 *Пусть имеются две различные факторизации дискретного оператора Шредингера*

$$L + AA^+ = BB^+, \quad \text{где } A = a + bT, \quad B = c + dT \tag{2.9}$$

и пусть введены переменные $x_n := a_n^2$, $y_n := b_n^2$, $u_n := c_n^2$, $v_n := d_n^2$. Тогда коэффициенты операторов одной факторизации однозначно восстанавливаются по коэффициентам другой факторизации по формулам

$$\begin{aligned} u_n &= x_n + c\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\left(y_0 - c\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{y_i}\right)\right)\prod_{k=1}^{n-1} y_k} \\ v_n &= y_n - c\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\left(y_0 - c\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{x_i}{y_i}\right)\right)\prod_{k=1}^{n-1} y_k} \end{aligned}, \quad n > 0 \tag{2.10}$$

с точностью до константы $c := u_0 - x_0$; при этом $v_0 = y_0 - c$.

Доказательство.

Докажем соотношения (2.10) по индукции; поскольку операторное равенство (2.9), будучи переписанным в терминах коэффициентов, принимает вид

$$\begin{cases} u_n + v_n = x_n + y_n \\ u_n v_{n-1} = x_n y_{n-1} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

база индукции $n = 1$ очевидна. Пусть теперь величины u_n и v_n найдены по формулам (2.10) для некоторого n; тогда

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{x_{n+1}y_n}{v_n} = x_{n+1}\frac{y_n}{v_n} = \\
&= x_{n+1}\left(1 + \frac{c \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} x_k}{\left(y_0 - c\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{x_i}{y_i}\right)\right)\prod\limits_{k=1}^{n} y_k - c \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} x_k}\right) = \\
&= x_{n+1} + c\frac{\prod\limits_{k=1}^{n+1} x_k}{\left(y_0 - c\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{x_i}{y_i} + \frac{x_1\cdots x_n}{y_1\cdots y_n}\right)\right)\prod\limits_{k=1}^{n} y_k} = \\
&= x_{n+1} + c\frac{\prod\limits_{k=1}^{n+1} x_k}{\left(y_0 - c\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{x_i}{y_i}\right)\right)\prod\limits_{k=1}^{n} y_k}, \\
v_{n+1} &= x_{n+1} + y_{n+1} - u_{n+1} = y_{n+1} - c\frac{\prod\limits_{k=1}^{n+1} x_k}{\left(y_0 - c\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{x_i}{y_i}\right)\right)\prod\limits_{k=1}^{n} y_k}.
\end{aligned}$$

Таким образом, переменные u_n и v_n однозначно восстанавливаются по значениям переменных x_n и y_n с точностью до “константы интегрирования” c при $n > 0$, Q.e.d.

Замечание 2.2 Легко вывести соотношения, подобные (2.10), и для отрицательных n, однако, это не представляет особого интереса, поскольку, как мы покажем ниже, если $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \neq 0$, то систему (2.6) можно реализовать лишь операторами, определенными на дискретной полупрямой (без ограничения общности можно считать, что на полупрямой $0, 1, \dots$).

Замечание 2.3 Мы показали, что как и в непрерывном случае, рассмотрение более общих циклических замыканий (т.е. если не требовать выполнения равенств $a_{j+r} = a_j$, $b_{j+r} = b_j$), качественно не изменяют ситуацию: решения такой системы легко выражаются через решения системы, для которой операторы L_j и L_{j+r} факторизованы одинаково; поэтому в дальнейшем мы всегда будем считать равенства $a_{j+r} = a_j$, $b_{j+r} = b_j$ выполненными.

Рассмотрим теперь циклическую цепочку дискретных преобразований Дарбу длины r (т.е. $L_{j+r} = L_j$ для всех j); пусть как обычно $\alpha = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$. Тогда справедливо следующее

Предложение 2.3 *Циклическая цепочка (2.7) не имеет решений, определенных на всей целочисленной решетке $\mathbb{Z}$, если $\alpha \neq 0$.*

Доказательство.

Легко видеть, что сложение всех уравнений первого типа в циклической цепочке (2.8) немедленно дает “неавтономный” первый интеграл системы:

$$\sum_{j=1}^{r} \eta_j(n) = \sum_{j=1}^{r} \eta_j(n-1) + \alpha; \tag{2.11}$$

поэтому, при $\alpha \neq 0$ величина $\sum_{j=1}^{r} \eta_j(n)$ стремится к $-\infty$ либо при $n \to +\infty$, либо при $n \to -\infty$ в зависимости от знака α. Но для существования решения исходной системы (2.7) необходима положительность всех ξ_j и η_j в каждой точке целочисленной решетки. Таким образом, решение циклической дискретной одевающей цепочки, определенное на $\mathbb{Z}$, может существовать лишь при $\alpha = 0$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

По аналогии с работой [33], предпримем попытку реализовать циклическую цепочку Дарбу разностными операторами на дискретной “полупрямой” $\mathbb{N}$, т.е. будем рассматривать лишь такие квадратично-суммируемые последовательности y, у которых $y(n) = 0$ при $n \leqslant 0$. Тогда можно считать, что $a_j(n) = b_j(n) = 0$ при $n \leqslant 0$ для всех j.

Предложение 2.4 *Циклическая цепочка (2.7) длины r имеет $2r$-параметрическое семейство решений на полурешетке $\mathbb{N}$, если $\alpha_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, r$. При этом все решения такой системы не являются ограниченными.*

Доказательство.

Пусть выбраны некоторые начальные данные $\xi_j(1) = a_j^2(1)$, $\eta_j = b_j^2(1)$, где $j = 1, \ldots, r$. Найдем сперва простое условие на них, которое является достаточным для продолжаемости решения на всю “полупрямую” $\mathbb{N}$. Из уравнений (2.8) немедленно вытекает, что

$$\begin{aligned} \xi_j(n) &= \frac{\xi_{j-1}(n-1)\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-1)} \\ \eta_j(n) &= -\frac{\xi_{j-1}(n-1)\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-1)} + \frac{\xi_{j-2}(n-1)\eta_{j-2}(n-1)}{\eta_{j-1}(n-1)} + \eta_{j-1} + \alpha_j \end{aligned} \tag{2.12}$$

для всех $j = 1, \ldots, r$. Заметим, что если выполнено условие $\eta_j(n-1) > \xi_{j-1}(n-1)$ для каждого j, то в силу явных формул (2.12)

$$\begin{aligned} \eta_j(n) - \xi_{j-1}(n) &= -\frac{\xi_{j-1}(n-1)\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-1)} + \frac{\xi_{j-2}(n-1)\eta_{j-2}(n-1)}{\eta_{j-1}(n-1)} + \\ &+ \eta_{j-1}(n-1) + \alpha_j - \frac{\xi_{j-2}(n-1)\eta_{j-2}(n-1)}{\eta_{j-1}(n-1)} = \\ &= \frac{\eta_{j-1}(n-1)\left(\eta_j(n-1) - \xi_{j-1}(n-1)\right)}{\eta_j(n-1)} + \alpha_j > 0; \end{aligned}$$

поэтому выполнение условий $\eta_j(1) > \xi_{j-1}(1)$ для всех $j \in \mathbb{Z}_r$ на начальные данные гарантирует справедливость неравенства $\eta_j(n) > \xi_{j-1}(n)$ для каждого натурального n. А в силу явных формул (2.8) выполнение этого неравенства, в свою очередь, обеспечивает положительность всех η_j (а, значит, и всех ξ_j) во всех точках полурешетки $\mathbb{N}$. Таким образом, r неравенств

$$\eta_j(1) > \xi_{j-1}(1)$$

высекают в пространстве $\mathbb{R}^{2r}$ начальных данных бесконечную полиэдральную область, такую, что решение исходной системы (2.7), соответствующее этой точке, продолжается на всю полупрямую $\mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь произвольное решение системы (2.7). Поскольку в силу (2.11) величина $\sum_{j=1}^{r} \eta_j(n)$ линейно растет с ростом n, исходная система не имеет ограниченных решений, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.4 Мы показали, что ситуация с дискретной циклической цепочкой Дарбу полностью аналогична ситуации с разностным гармоническим осциллятором, описанной в параграфе 2.1. Действительно, как и в простейшем случае $r = 1$, в общем случае невозможно построить решение цепочки, определенное на всех целочисленной решетке, если все значения изоспектральных параметров имеют одинаковые знаки. Однако, в этом случае существует $2r$-параметрическое семейство неограниченных решений, определенных на дискретной “полупрямой” (очевидно, что если все α_j отрицательны, то можно построить решение на отрицательной части решетки $\mathbb{Z}$). Тот факт, что все решения такой системы неограничены также неудивителен, поскольку исходное операторное равенство (2.6) определяет формально-алгебраический спектр операторов цепочки, которые не является ограниченным.

Замечание 2.5 В работе Спиридонова, Вине и Жеданова [37] было рассмотрено некоторое специальное (см. замечание 1.9) замыкание дискретной одевающей цепочки при $r = 4$ и показано, что с помощью полиномов Хана можно построить частное решение такой циклической цепочки. Однако, никаких общих утверждений относительно циклических цепочек произвольной длины в этой работе не делалось.

2.2.2 Представление нулевой кривизны

При изучении той или иной системы дифференциальных уравнений большой удачей можно считать возможность записать ее в форме Лакса; хорошо известны представления Лакса для многих уже успевших стать классическими систем (таких как уравнение КдФ или цепочка Тоды); в параграфе (1.2.6) было предъявлено представление Лакса, впервые построенное в работе Шабата и Ямилова [20]. Естественным аналогом такого представления для разностных систем можно считать так называемое *представление нулевой кривизны*.

Определенную выше дискретную одевающую цепочку можно рассматривать как частный случай *дискретной системы на графе* (в терминологии работы [27]). Действительно, рассмотрим клеточное разбиение $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ ориентируемой двумерной поверхности Γ и каждой вершине $v \in \mathcal{C}_1$ (т.е. нульмерной клетке) припишем “поле” $X(v)$ (т.е. переменную, которую, вообще говоря, можно считать элементом некоторой ассоциативной алгебры). Будем говорить, что на графе $\mathcal{C}_1$ задана *дискретная система*, если каждой двумерной клетке $C = v_1 v_2 \dots v_p \in \mathcal{C}_2$ сопоставлено некоторое уравнение $F_C(X(v_1), X(v_2), \dots, X(v_p)) = 0$, связывающее поля, соответствующие всем вершинам клетки C.

Легко видеть, что циклическая дискретная одевающая цепочка длины r в такой постановке оказывается дискретной системой на цилиндре; соответствующий граф получается факторизацией плоской двумерной прямоугольной решетки, порожденной координатными векторами e_1 и e_2, по одномерной подрешетке, задаваемой вектором $r \cdot e_2$, все двумерные клетки являются четырехугольниками и каждой вершине $v_{j,n}$ соответствует вектор $(\xi_j(n), \eta_j(n))$.

Следуя работе [27] дадим важное определение.

Определение 2.1 Будем говорить, что дискретная система на графе *допускает представление нулевой кривизны*, если каждому ориентированному ребру $v_i v_k \in \mathcal{C}_1$ сопоставлена матрица $V_{ik} \in GL_m(\mathbb{C})$ для некоторого $m > 1$ так, что выполнены следующие свойства:

1. $V_{ki} = V_{ik}^{-1}$ для каждого ребра $v_i v_k \in \mathcal{C}_1$;

2. для каждой двумерной клетки $C = v_1 v_2 \ldots v_p \in \mathcal{C}_2$ матричное равенство
$$V_{12} V_{23} \cdot \cdots \cdot V_{p-1,p} V_{p1} = I, \tag{2.13}$$
где I — единичная матрица, выполнено тождественно в силу уравнения
$$F_C(X(v_1), X(v_2), \ldots X(v_p)) = 0.$$

Замечание 2.6 Легко видеть, что условие (2.13) обеспечивает тривиальность произведения матриц V_{ik} при обходе вдоль любого 1-цикла в Γ, гомологичного нулю.

Будем говорить, что представление нулевой кривизны зависит от параметра λ, если все матрицы V_{ik} зависят от λ.

Теорема 2.1 *Циклическая дискретная одевающая цепочка (2.8) длины r допускает представление нулевой кривизны, зависящее от параметра, при любом r, если $\alpha = 0$.*

Доказательство.

Поскольку представление нулевой кривизны является вполне естественным дискретным аналогом представления Лакса, его построение для дискретной одевающей цепочки аналогично построению представления Лакса для ее непрерывного аналога, т.е. одевающей цепочки Веселова–Шабата. Действительно, рассмотрим произвольный набор собственных векторов этих операторов, связанных дискретными преобразованиями Дарбу:
$$L_j \psi_j = \lambda_j \psi_j, \quad \psi_{j+1} = A_j^+ \psi_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$$
Тогда согласно (1.3) $\lambda_{j+1} = \lambda_j + \alpha_j$ для каждого j; введем спектральный параметр $\lambda := \lambda_1$.

Определим вектор
$$\Psi_j := \begin{pmatrix} T^{-1}\psi_j \\ \psi_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots;$$
тогда, как легко видеть, дискретное уравнение Шредингера
$$T\psi_j = -\frac{a_j T^{-1}(b_j)}{T(a_j) b_j} T^{-1}\psi_j - \frac{a_j^2 + b_j^2 - \beta_j - \lambda}{T(a_j) b_j} \psi_j$$

может быть переписано в векторном виде следующим образом:

$$T\Psi_j = U_j\Psi_j, \quad \text{где} \quad U_j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{a_jT^{-1}(b_j)}{T(a_j)b_j} & \dfrac{\beta_j + \lambda - a_j^2 - b_j^2}{T(a_j)b_j} \end{pmatrix},$$

где $\beta_j := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j$. Преобразование Дарбу $\psi_j \mapsto \psi_{j+1}$ также может быть записано в векторном виде:

$$\Psi_{j+1} = W_j\Psi_j, \quad \text{где} \quad W_j = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta_j + \lambda - T^{-1}(b_j^2)}{T^{-1}(a_j)} & -\dfrac{a_jT^{-1}(b_j)}{T^{-1}(a_j)} \\ T^{-1}(b_j) & a_j \end{pmatrix}.$$

Пусть ψ_1 — произвольное решение дискретного уравнения Шредингера $L_1\psi_1 = \lambda$; тогда для соответствующего вектора Ψ_j, построенного из вектора Ψ_1 с помощью преобразований Дарбу, очевидно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$T\left(\Psi_{j+1}\right) = T\left(W_j\Psi_j\right) = T(W_j)T(\Psi_j) = T(W_j)U_j\Psi_j.$$

С другой стороны,

$$T\left(\Psi_{j+1}\right) = U_{j+1}\Psi_{j+1} = U_{j+1}W_j\Psi_j;$$

таким образом, в силу произвольности решения ψ_1 для каждого $j = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$T(W_j)U_j = U_{j+1}W_j. \tag{2.14}$$

Прямая проверка (перемножение соответствующих матриц) показывает, что матричные уравнения (2.14) выполнены в силу уравнений дискретной одевающей цепочки. Поэтому, если сопоставить матрицу U_j ориентированному ребру $v_{j,n}v_{j,n+1}$ цилиндрической решетки, а матрицу W_j — ребру $v_{j,v}v_{j+1,n}$, то условие (2.14) будет задавать представление нулевой кривизны, зависящее от спектрального параметра λ, для дискретной одевающей цепочки. Требование $\alpha = 0$ обеспечивает согласованность такого сопоставления при склейке $v_{1,n} \equiv v_{r+1,1}$, поскольку при этом $U_{r+1} = U_1$ для всех n. Поэтому при $\alpha = 0$ равенство (2.14) задает представление нулевой кривизны для циклической цепочки, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.7 Описанное выше построение представления нулевой кривизны для циклической дискретной одевающей цепочки является формальным в следующем смысле: предъявленные в доказательстве теоремы (2.1) матрицы W_j и U_j вместе с соотношениями (2.14) действительно задают представление нулевой кривизны в смысле определения (2.1) для разностной системы (2.8), где положено $a_j(n) := \sqrt{\xi_j(n)}$, $b_j(n) := \sqrt{\eta_j(n)}$. Однако, мы пока не привели никаких достаточных условий положительности решения системы (2.8) при $\alpha = 0$ на всей "прямой" $\mathbb{Z}$; таким образом, построенное представление нулевой кривизны может, вообще говоря, перестать быть вещественным, хотя изначальная природа задачи (цепочка дискретных преобразований Дарбу) подразумевает вещественность всех коэффициентов операторов цепочки.

Тем не менее, численный эксперимент показывает, что положительное решение системы (2.8) для произвольных значений параметров

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \quad \alpha_r = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r-1})$$

обнаружить довольно легко. Для этого достаточно взять такие начальные данные, удовлетворяющие условию

$$\eta_j(0) \gg \xi_i(0) \gg |\alpha_k|$$

для всех i, j, k.

Перепишем теперь уравнения (2.14) в виде $T(W_j) = U_{j+1} W_j U_j^{-1}$; перемножая полученные равенства для всех $j = 1, 2, \ldots, r$ и пользуясь условием цикличности, приходим к следующему соотношению

$$T\left(W(\lambda)\right) = U_1 W(\lambda) U_1^{-1}, \tag{2.15}$$

где $W(\lambda) := W_r W_{r-1} \cdots W_1$. Легко видеть, что в силу равенства (2.15) величины $\operatorname{tr}\left(W(\lambda)\right)$, $\operatorname{tr}\left(W^2(\lambda)\right)$,... инвариантны относительно сдвига по n, т.е. являются производящими функциями для первых интегралов циклической дискретной одевающей цепочки:

$$\begin{array}{l} \operatorname{tr}\left(W(\lambda)\right) = I_{1,0} + I_{1,1}\lambda + \cdots + I_{1,r}\lambda^r \\ \operatorname{tr}\left(W^2(\lambda)\right) = I_{2,0} + I_{2,1}\lambda + \cdots + I_{2,2r}\lambda^{2r} \\ \ldots \end{array}. \tag{2.16}$$

Замечание 2.8 В качестве производящей функции для первых интегралов циклической дискретной одевающей цепочки также можно было бы использовать функцию $\det\left(W(\lambda)\right)$; однако, эта функция не дает никакой нетривиальной информации о динамике, поскольку коэффициенты такого многочлена зависят лишь от значений параметров α_j и не изменяются при изменении начальных данных.

Замечание 2.9 Мы уже отмечали, что при $\alpha = 0$ система (2.8) произвольной длины имеет один очевидный интеграл: величина $J_1 := \sum_{j=1}^{r} \eta_j(n)$ не зависит от дискретного времени n, что вытекает непосредственно из вида уравнений (2.8). Легко заметить, что производящая функция $\mathrm{tr}\,(W(\lambda))$ также задает этот интеграл:

$$I_{1,r} = \left(\sum_{j=1}^{r} \eta_j(n) \right)^{-1/2}$$

для любого r. Кроме этого уравнения (2.8) при любом r обладают еще одним таким же заметным интегралом $J_2 := \prod_{j=1}^{r} \xi_j(n)$, который также может быть получен с помощью производящей функции $\mathrm{tr}\,(W(\lambda))$: его можно выразить (но уже не столь просто) через коэффициенты $I_{1,r}$ и $I_{1,r-1}$. Однако, кроме этих очевидных первых интегралов производящие функции (2.16) дают еще и нетривиальные константы движения, которые будут предъявлены в следующем параграфе.

2.2.3 Замыкания малой длины при $\alpha = 0$

Начнем с того, что рассмотрим циклическую дискретную одевающую цепочку длины 1. Положим $\xi(n) \equiv \xi_1(n)$, $\eta(n) \equiv \eta_1(n)$; тогда уравнения (2.8) принимают вид

$$\eta(n) = \eta(n-1), \quad \xi(n) = \xi(n-1),$$

т.е. система оказывается тривиальной. Это обстоятельство неудивительно, поскольку наличие двух независимых интегралов, задаваемых алгебраическими функциями (см. замечание 2.9), делает динамику на плоскости тривиальной или периодической.

Более интересным является случай цепочки длины $r = 2$. В этом случае система (2.8) состоит из четырех уравнений относительно четырех неизвестных функций. Интегралы

$$\eta_1(n) + \eta_2(n) = c, \quad \xi_1(n)\xi_2(n) = d$$

позволяют исключить переменные ξ_2 и η_2. Тогда итерации отображения $F : (\xi_1(n-1), \eta_1(n-1)) \mapsto (\xi_1(n), \eta_1(n))$ на оставшиеся переменные задаются следующими формулами:

$$\xi_1(n) = \frac{d}{\xi_1(n-1)\eta_1(n-1)}(c-\eta_1(n-1)), \quad \eta_1(n) = \frac{d}{\xi_1(n)} - \xi_1(n) + c - \eta_1(n-1) + \alpha_1. \tag{2.17}$$

Прямая проверка показывает, что интеграл $I_{1,2}$, задаваемый представлением нулевой кривизны сводится к следующей константе движения:

$$J_3 := \eta_1(n)\eta_2(n) - (\xi_1(n)\eta_1(n) + \xi_2(n)\eta_2(n)) - \alpha_1\eta_2(n) = p$$

(выражение для $I_{1,2}$ несколько сложнее, однако, наличие интегралов J_1 и J_2 позволяет привести его к такому виду). Поэтому оставшиеся переменные $\xi_1(n)$ и $\eta_1(n)$ при всех целых n должны удовлетворять условию

$$(c - \eta_1(n))(\eta_1(n) - \beta) - \frac{d(c - \eta_1(n))}{\xi_1(n)} - \xi_1(n)\eta_1(n) = p,$$

где c, d, p — константы, определяемые начальными данными а $\beta := \alpha_1$. Таким образом, при проекции всего пространства $\mathbb{R}^4$ на плоскость переменных ξ_1 и η_1 динамика происходит на кривой, задаваемой уравнением

$$(c - y)\left(y - \frac{d}{x} - \beta\right) - xy = p, \tag{2.18}$$

где для краткости положено $x := \xi_1$, $y := \eta_1$.

Предложение 2.5 *Внутри координатных квадрантов в пространстве $\mathbb{R}^4$ переменных ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 интегралы J_1, J_2 и J_3 зависимы в неподвижных системы (2.8) и только в них.*

Доказательство.

Доказательство состоит в прямой проверке: 3×3-миноры соответствующей матрицы Якоби имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 = \xi_2\eta_2 - \xi_1\eta_1, \\ M_3 &= \xi_2(\eta_1 + \xi_1 - \eta_2 - \xi_2 - \alpha), \quad M_4 = \xi_1(\eta_1 + \xi_1 - \eta_2 - \xi_2 - \alpha). \end{aligned}$$

Поэтому внутри координатных квадрантов интегралы зависимы если и только если

$$\xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2, \quad \xi_1 + \eta_1 = \xi_2 + \eta_2 + \alpha,$$

что в точности совпадает с уравнениями неподвижной точки для системы (2.8), Q.e.d.

Наличие интегралов J_1, J_2 и J_3 позволяет найти условия, достаточные для существования положительного решения системы (2.8) при $r = 2$.

Предложение 2.6 *При любых $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 = -\alpha_1$ система (2.8) имеет четырехпараметрическое семейство решений, положительных во всех целых точках.*

Доказательство.

Пусть фиксировано некоторое положительное $\beta := \alpha_1$. Выберем произвольную положительную константу d и произвольную константу c, удовлетворяющую условию $c > \beta$. Тогда, как нетрудно заметить, для положительности всех четырех функций, участвующих в системе (2.8), достаточно выполнения условий $\xi_1(n) > 0$, $c > \eta_1(n) > 0$ для всех целых n. Обозначим за D область в первом координатном квадранте, задаваемую условием

$$\frac{d}{x} + \beta < y < c;$$

легко сообразить, что если взять c достаточно большим, то в D найдется подобласть $D' \subset D$, состоящая из точек (x, y), для которых выполнены неравенства

$$c - y > y, \quad y - \frac{d}{x} - \beta > x$$

(см. рис. 2.1). Тогда для произвольной точки $(x_0, y_0) \in D'$ справедливо следующее неравенство:

$$p := (c - y_0)\left(y_0 - \frac{d}{x_0} - \beta\right) - x_0 y_0 > y_0 x_0 - x_0 y_0 > 0.$$

Пусть $x_1 := \xi_1(1)$, $y_1 := \eta_1(1)$ — компоненты решения системы (2.8), соответствующего начальным данным $\xi_1(0) = x_0$, $\eta_1(0) = y_0$. Найдем условия на (x_0, y_0), достаточные для того, чтобы точка (x_1, y_1) попала в область D, т.е. чтобы было выполнены условие $d/x_1 + \beta < y_1 < c$. Выражая x_1 и y_1 через x_0 и y_0 с помощью явных формул (2.17) имеем:

$$x_1 = \frac{d}{x_0 y_0}(c - y_0), \quad y_1 = \frac{d}{x_1} - x_1 + c - x_0 + \beta = \frac{d}{x_1} + \beta + (c - x_0 - x_1).$$

Таким образом, достаточно найти условия, при которых будут выполнены следующие неравенства:

$$0 < c - (x_0 + x_1), \quad \frac{d}{x_1} + \beta - x_0 - x_1 < 0. \tag{2.19}$$

Область D' ограничена сверху прямой $y = c/2$, а снизу — гиперболой $y = d/x + \beta + x$; очевидно, что вся эта область находится левее прямой $x = c/2$ (см. рис. 2.1). Легко заметить, что минимальное значение ординаты в замыкании области D' достигается при $x = \sqrt{d}$ и оно равно $2\sqrt{d} + \beta$;

Рис. 2.1: Области D, D', D'' и связная компонента γ кривой (2.18).

поэтому для того, чтобы область D' была непустой, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$2\sqrt{d} + \beta < c/2 \Longleftrightarrow 0 < d < \left(\frac{c - 2\beta}{2}\right)^2. \tag{2.20}$$

Второе из неравенств (2.19) может быть переписано в виде

$$\frac{x_0 y_0}{c - y_0} + \beta - x_1 - x_0 < 0;$$

но поскольку для точек области D' справедливо неравенство $y < c - y$, достаточно показать, что $\beta - x_1 < 0$. Подставляя выражение для x_1, приходим к следующему неравенству:

$$y_0 < \frac{d(c - x_0)}{\beta x_0};$$

но функция $\frac{d(c-x)}{\beta x}$ убывает на отрезке $[0, c/2]$ и в точке $c/2$ принимает значение d/β. Поэтому, если потребовать, чтобы было выполнено условие

$$\frac{d}{\beta} > \frac{c}{2} \tag{2.21}$$

то для всех точек области D' второе из неравенств (2.19) оказывается выполненным.

Неравенства (2.20) и (2.21) должны быть выполнены одновременно, что возможно лишь если

$$\frac{\beta c}{2} < \left(\frac{c-2\beta}{2}\right)^2;$$

последнее ограничение сводится к квадратному неравенству $t^2 - 6t + 4 > 0$ на величину $t := c/\beta$, т.е. при $c > (3+\sqrt{5})\beta$ требования (2.20) и (2.21) оказываются совместными.

Покажем теперь, что первое из неравенств (2.19) будет выполнено для всех точек подобласти $D'' \subset D'$, выделяемой условием $x > \sqrt{d}$. Действительно, это неравенство может быть переписано следующим образом:

$$\frac{cx_0y_0 - x_0^2y_0 - dc + dy_0}{x_0y_0} > 0,$$

т.е. точка (x_0, y_0) должна находиться над кривой $y = \frac{dc}{cx+d-x^2}$. Эта кривая имеет две вертикальные асимптоты, одна из которых находится левее оси ординат, а другая — правее прямой $x = c$; поэтому на отрезке $[0, c/2]$ соответствующая функция убывает (см. рис. 2.1). Заметим, что ее значение при $x = \sqrt{d}$ равно $\sqrt{d}$, т.е. вся область D'' оказывается выше этой кривой, поскольку минимальное значение ординаты для точек замыкания этой области достигается именно при $x = \sqrt{d}$ и оно равно $2\sqrt{d} + \beta > \sqrt{d}$.

Таким образом, мы показали, что если $c > (3+\sqrt{5})\beta$, а параметр d удовлетворяет двойному неравенству

$$\frac{\beta c}{2} < d < \left(\frac{c-2\beta}{2}\right)^2,$$

то для всех точек $(x_0, y_0) \in D''$ точка (x_1, y_1) попадет в область D.

Обозначим через γ связную компоненту кривой (2.18), содержащую точку (x_0, y_0), и покажем, что она не может выйти за пределы области D. Действительно, предположим, что в некоторой точке $(\hat{x}, \hat{y}) \in \gamma$ кривая вышла на границу области D. Тогда либо $c - \hat{y} = 0$, либо $\hat{y} - d/\hat{y} - \beta = 0$; он в любом из этих случаев

$$0 = (c - \hat{y})\left(y - \frac{d}{\hat{x}} - \beta\right) = p + \hat{x}\hat{y},$$

что невозможно, ибо $p > 0$ и граница области D лежит а первой координатной четверти.

Уравнение кривой (2.18) является квадратным относительно y, поэтому, решая его, приходим к следующему соотношению:

$$y = \frac{-x^2 + (c+\beta)x + d \pm \sqrt{P(x)}}{2x}, \tag{2.22}$$

где $P(x) := (x^2 - (c+\beta)x - d)^2 - 4x(px + dc + c\beta x)$. Поскольку P — многочлен четвертой степени с положительным старшим коэффициентом, при достаточно больших по модулю x корень в выражении (2.22) определен и, как нетрудно заметить, в силу положительности коэффициентов β, c, d, p, при достаточно больших положительных значениях x обе ветви кривой (2.22) находятся ниже оси абсцисс. Поэтому связная компонента $+\infty$ кривой (2.18) (обозначим ее γ_+) не может иметь общих точек с областью D, а связная компонента γ — ограничена.

Многочлен четвертой степени с положительным старшим коэффициентом имеет не более трех интервалов положительности, два из которых бесконечны. Тому из них, который уходит на $+\infty$ соответствует связная компонента γ_+; замкнутая ограниченная связная компонента γ соответствует конечному промежутку (который имеется в силу существования γ и находится правее точки $x = 0$). Но есть еще и третий промежуток положительности многочлена P, уходящий на $-\infty$; заметим, что $P(0) = d^2 > 0$, т.е. этот промежуток содержит точку $x = 0$. В силу существования корня в выражении (2.22) при $x = 0$ в достаточно малой проколотой окрестности нуля двузначная функция (2.22) определена (эта функция не определена при $x = 0$), т.е. часть кривой (2.18), соответствующая левому интервалу положительности P разбивается на три связных компоненты: γ_0, которая находится правее оси ординат и две ветви, находящиеся левее оси ординат и уходящие на $-\infty$.

Очевидно, что γ_0 не может проходить через точки области D, поскольку в этом случае она должна была бы полностью содержаться там, что неверно. Таким образом, пересечение кривой (2.18) с областью D состоит из одной связной ограниченной замкнутой компоненты γ. Поэтому, поскольку при подходящем выборе параметров c и d точка $M_1 := (x_1, y_1)$ принадлежит области D, она попадает на связную γ (т.к. динамика происходит на кривой (2.18)). Координаты точки M_1 непрерывно зависят от координат точки $M_0 := (x_0, y_0)$; поэтому, если начать сдвигать начальные данные $(\xi(0), \eta(0))$ от точки M_0 в сторону точки M_1 вдоль кривой γ, точка $(\xi(1), \eta(1))$ будет по-прежнему оставаться на кривой γ. Следовательно, когда точка $(\xi(0), \eta(0))$ доберется до M_1, точка $(\xi(1), \eta(1))$ попадет в точку M_2, соответствующую двум итерациям отображения F для начальных данных (x_0, y_0). Так можно доказать, что решение $(\xi_1(n), \eta_1(n))$ исходной системы (2.8) при любых натуральных n остается на кривой γ; обращение этого рассуждения показывает, что это верно и для всех отрицательных n.

Таким образом, если для произвольного положительного α_1 выбрать значения параметров c и d, удовлетворяющие приведенным выше условиям, то решение $(\xi_1(n), \eta_1(n))$, соответствующее произвольным начальным данным (x_0, y_0) из области D'' содержится в область D для всех целых n. А это означает, что, во-первых ξ_1 и η_1 положительны во всех целых точках, а, во-вторых, что ξ_2 и η_2 — также положительны на всей “прямой” $\mathbb{Z}$, поскольку $\eta_2(n) = c - \eta_1(n) > 0$ для точек области D. Итак, мы доказали существование четырехпараметрического семейства положительных решений системы (2.8) для произвольного $\alpha_1 > 0$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.10 Предложение 2.6 останется справедливым, если в его формулировке вместо положительного α_1 взять произвольное отрицательное значение. Тогда переменные (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) просто поменяются ролями. Отметим также, что неравенства на параметры c и d и начальные данные x_0 и y_0, использованные при доказательстве предложения 2.6 и являющиеся достаточными условиями положительность решения на всей целочисленной решетке, вообще говоря, не являются необходимыми.

В случае цепочки длины $r = 3$ производящая функция $\mathrm{tr}\,(W(\lambda))$ для первых интегралов является многочленом третьей степени по λ; его коэффициенты $I_{1,3}$ и $I_{1,2}$ выражаются через интегралы J_1 и J_2, интеграл $I_{1,1}$ сводится к нетривиальной константе движения

$$\begin{aligned} J_3 : &= (\eta_1(n)\eta_2(n) + \eta_1(n)\eta_3(n) + \eta_2(n)\eta_3(n)) - \\ &- (\xi_1(n)\eta_1(n) + \xi_2(n)\eta_2(n) + \xi_3(n)\eta_3(n)) - \alpha_1\eta_3(n) - \alpha_2(\eta_1(n) + \eta_3(n)). \end{aligned}$$

Коэффициент $I_{1,0}$ производящей функции дает еще более громоздкое выражение для интеграла, которое мы не будем здесь приводить. Однако, для того, чтобы свести динамику к некоторой кривой необходима еще одна независимая константа движения, которую, вероятно, можно получить, рассматривая коэффициенты многочлена $\mathrm{tr}\left(W^2(\lambda)\right)$ (нетрудно убедиться в том, что коэффициенты $I_{2,6}$, $I_{2,5}$ и $I_{2,4}$ выражаются через J_1 и J_2). Но эти коэффициенты дают еще более сложные выражения для интегралов, так что, видимо, нет оснований полагать, что, даже если удастся найти необходимое количество независимых первых интегралов дискретной одевающей цепочки длины 3, эти интегралы позволят исключить все переменные кроме двух и свести задачу к динамике вдоль некоторой плоской кривой подобно тому, как это было сделано для цепочки длины 2.

2.3 q-осциллятор

На рубеже 80–90-х годов прошлого века в литературе (главным образом, физической) появилось довольно много публикаций, посвященных обсуждению “q-соотношения Гейзенберга”

$$L = AA^+ - \alpha = qA^+A, \tag{2.23}$$

где $q \neq 1$ — некоторое действительное число. Отметим некоторые из них. По-видимому, первыми были работы Биденхарна [26] и Макфарлэна [31], где была построена реализация квантовой группы $SU_q(2)$ с помощью двух независимых q-осцилляторов (2.23); в работе Кулиша и Дамаскинского [29] была предложена реализация квантовой группы $SU_q(1,1)$ с помощью одного q-осциллятора.

Легко видеть, что для q-осциллятора коммутационные соотношения (1.5) принимают вид

$$[L, A]_{q^{-1}} = -\alpha A, \quad [L, A^+]_q = q\alpha A^+,$$

где $[\cdot,\cdot]_q$ обозначает "квантовый" коммутатор: $[X, Y]_q := XY - qYX$.

2.3.1 Спектральные свойства

В работах [26, 31, 29] был описан дискретный спектр (точнее, его *фоковская* часть — см. замечание 2.14 ниже) q-осциллятора. Действуя по аналогии со случаем обычного гармонического осциллятора, нетрудно провести доказательства соответствующих утверждений.

Теорема 2.2 *Дискретный спектр в интервале* $[0, \frac{\alpha q}{1-q})$ *произвольного оператора* L *в некотором гильбертовом пространстве, удовлетворяющего соотношению (2.23) для некоторого* $\alpha > 0$*, состоит из квантовой арифметической прогрессии*

$$\lambda_0 = 0, \ \ \lambda_k = \alpha q[k]_q = \alpha q \frac{1-q^k}{1-q}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.24}$$

При этом основное состояние ψ_0*, отвечающее наименьшему собственному значению* $\lambda_0 = 0$*, находится из уравнения*

$$A\psi_0 = 0, \tag{2.25}$$

а остальные получаются из него применением оператора рождения A^+*:*

$$\psi_k = (A^+)^k \psi_0, \quad L\psi_k = \lambda_k \psi_k. \tag{2.26}$$

Если дополнительно известно, что оператор L *ограничен, то весь его дискретный спектр исчерпывается серией (2.24) и, возможно, точкой* $\frac{\alpha q}{1-q}$.

Доказательство.

Покажем сперва, что все собственные значения оператора L неотрицательны. Действительно, пусть ψ — некоторый собственный вектор, соответствующий собственному значению λ. Тогда

$$L\psi = \lambda\psi \Longleftrightarrow qA^+A\psi = \lambda\psi;$$

умножая последнее равенство скалярно на ψ, получаем, что $q\|A\psi\|^2 = \lambda\|\psi\|^2$, откуда $\lambda \geqslant 0$. Заметим, что равенство при этом достигается если и только если $A\psi = 0$.

Докажем, что оператор A^+ не имеет ядра. Действительно, если предположить, что найдется такой вектор ψ, что $A^+\psi = 0$, то

$$L\psi = AA^+\psi - \alpha\psi = -\alpha\psi,$$

т.е. ψ соответствует отрицательному собственному значению $-\alpha$, что невозможно. Поэтому, если ψ — собственный вектор, соответствующий λ, то $A^+\psi$ будет тоже собственным вектором, соответствующим $q(\lambda+\alpha)$:

$$LA^+\psi = qA^+(AA^+\psi) = qA^+(L+\alpha)\psi = q(\lambda+\alpha)A^+\psi.$$

Возьмем основное состояние ψ_0 и, применив к нему оператор рождения A^+, получим собственный вектор соответствующий $q\alpha$. Продолжая эту процедуру (процесс не остановится, поскольку A^+ не имеет ядра), получим квантовую арифметическую прогрессию (2.24) в спектре q-осциллятора.

Легко заметить, что если собственный вектор ψ не является основным состоянием, то $A\psi$ тоже будет собственным вектором, соответствующим собственному значению $\frac{\lambda}{q} + \alpha$:

$$LA\psi = A(A^+A\psi) - \alpha A\psi = \frac{1}{q}AL\psi - \alpha A\psi = \left(\frac{\lambda}{q} - \alpha\right)A\psi.$$

Докажем теперь, что на интервале $[0, \frac{\alpha q}{1-q})$ оператор L не имеет других собственных значений, кроме (2.24). Предположим противное: пусть $\mu_0 \in [0, \frac{\alpha q}{1-q})$ — собственное значение, не являющееся представителем серии (2.24), а ψ — соответствующий ему собственный вектор. Тогда $A\psi$ — собственный вектор, соответствующий $\mu_1 = \frac{\mu_0}{q} - \alpha < \mu_0$, $A^2\psi$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu_2 = \frac{\mu_0 - \alpha q(1+q)}{q^2} < \mu_1 < \mu_0$, и т.д. При этом

$$LA^k\psi = \mu_k A^k\psi, \quad \text{где } \mu_k = \frac{\mu_0 - \alpha q\frac{1-q^k}{1-q}}{q^k} \to -\infty \quad \text{при } k \to +\infty,$$

что невозможно в силу неотрицательности всех собственных значений q-осциллятора. Этот процесс обрывается на некотором шаге лишь если $A^k\psi$ оказывается основным состоянием. Но в этом случае, как нетрудно заметить, $\mu_k = 0$, откуда следует, что изначальное собственное значение μ_0 принадлежит серии (2.24). Таким образом, дискретный спектр оператора L на интервале $[0, \frac{\alpha q}{1-q})$ исчерпывается квантовой арифметической прогрессией (2.24).

Пусть теперь оператор L ограничен; предположим, что $\mu_0 > \frac{\alpha q}{1-q}$ — некоторое его собственное значение, а ψ — соответствующий собственный вектор. Тогда $A\psi$ — собственный вектор ($A\psi \neq 0$ т.к. ψ не является основным состоянием), соответствующий $\mu_1 = \frac{\mu_0}{q} - \alpha > \mu_0$; далее, собственный вектор $A^2\psi$ соответствует собственному значению $\mu_2 = \frac{\mu_0 - \alpha q(1+q)}{q^2} > \mu_1 > \mu_0$, и т.д. При этом

$$LA^k\psi = \mu_k A^k\psi, \quad \text{где } \mu_k = \frac{\mu_0 - \alpha q \frac{1-q^k}{1-q}}{q^k} \to +\infty \quad \text{при } k \to +\infty,$$

что невозможно в силу ограниченности q-осциллятора. Этот процесс обрывается на некотором шаге лишь если $A^k\psi$ оказывается основным состоянием. Но в этом случае, как мы знаем, $\mu_k = 0$ — противоречие с тем, что $\mu_0 > \frac{\alpha q}{1-q} > 0$. Таким образом, для ограниченного оператора интервал $(\frac{\alpha q}{1-q}, +\infty)$ не может содержать собственных значений, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 2.11 Если в соотношении (2.23) $\alpha < 0$, а $q > 1$, то тривиальной заменой $B = A^+$, $\beta = -\alpha/q$, $p = 1/q$ оно приводится к тому виду, который используется в теореме. Поэтому, для случая $\alpha < 0$, $q > 1$ теорема остается справедливой, спектр имеет вид

$$\lambda_k = -\frac{\alpha}{q^k}[k+1]_q = \frac{\alpha}{q^k}\frac{q^{k+1}-1}{1-q}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

и, очевидно, содержится в интервале $[-\alpha, \frac{\alpha q}{1-q})$; основное состояние находится из условия $A^+\psi_0 = 0$, а роль оператора рождения играет оператор A.

Замечание 2.12 Приведенная выше теорема описывает формально-алгебраический спектр q-осциллятора, т.е. ее доказательство никаким образом не использует конкретной реализации гильбертова пространства (как и доказательство теоремы 1.1 о спектре обычного гармонического осциллятора). Но, в отличии от гармонического осциллятора, спектр (2.24) q-осциллятора оказывается ограниченным, что a priori не исключает возможность реализовать операторное соотношение (2.23) ограниченными операторами.

2.3.2 Собственные состояния q-осциллятора

Как и в случае обычного гармонического осциллятора (1.1), схема (2.25),(2.26) нахождения собственных векторов q-осциллятора L, описанная в теореме 2.2, позволяет найти их нормы независимо от конкретной реализации соотношения (2.24). Легко видеть, что оператор L является симметричным; поэтому его собственные векторы попарно ортогональны. Будем считать основное состояние по норме равным единице, $\|\psi_0\| = 1$, и введем обозначение $\tilde{\psi}_k := (A^+)^k\psi_0$.

Лемма 2.1 *Для каждого натурального k имеет место следующее соотношение:*

$$A(A^+)^k = q^k(A^+)^kA + \alpha\frac{1-q^k}{1-q}(A^+)^{k-1} = q^k(A^+)^kA + [k]_q\alpha(A^+)^{k-1}. \quad (2.27)$$

Доказательство.

Используя k раз подряд равенство (2.23), немедленно получаем требуемое:

$$\begin{aligned} A(A^+)^k &= AA^+(A^+)^{k-1} = qA^+A(A^+)^{k-1} + \alpha(A^+)^{k-1} = q^2(A^+)^2A(A^+)^{k-2} + \\ &+ \alpha q(A^+)^{k-1} + \alpha(A^+)^{k-1} = \cdots = q^k(A^+)^kA + \alpha\frac{1-q^k}{1-q}(A^+)^{k-1}, \end{aligned}$$

Q.e.d.

Предложение 2.7 *Справедливо следующее равенство:*

$$\|\tilde{\psi}_k\| = \sqrt{\frac{(1-q^k)(1-q^{k-1})\dots(1-q^2)}{(1-q)^{k-1}}\alpha^k} = \sqrt{[k]_q!\alpha^k}, \quad (2.28)$$

где $[k]_q!$ обозначает квантовый факториал.

Доказательство.

Как и прежде

$$\|\tilde{\psi}\|^2 = \langle\psi_0, A^k(A^+)^k\psi_0\rangle. \quad (2.29)$$

Докажем по индукции, что справедливо следующее равенство:

$$A^k(A^+)^k\psi_0 = \alpha^k\frac{\left(1-q^k\right)\left(1-q^{k-1}\right)\dots\left(1-q^2\right)(1-q)}{(1-q)^k}\psi_0. \quad (2.30)$$

База индукции тривиальным образом вытекает из соотношения (2.23), поскольку $A\psi_0 = 0$. Пусть утверждение доказано для $k-1$, тогда воспользуемся индуктивным предложением и формулой (2.27):

$$\begin{aligned}
A^k(A^+)^k\psi_0 &= A^{k-1}(A(A^+)^{k-1})A^+\psi_0 = \\
&= A^{k-1}(q^{k-1}(A^+)^{k-1}A+\alpha\frac{1-q^{k-1}}{1-q}(A^+)^{k-2})A^+\psi_0 = \\
&= q^{k-1}A^{k-1}(A^+)^{k-1}(AA^+\psi_0)+\alpha\frac{1-q^{k-1}}{1-q}A^{k-1}(A^+)^{k-1}\psi_0 = \\
&= \alpha q^{k-1}A^{k-1}(A^+)^{k-1}\psi_0+\alpha(1+q+q^2\cdots+q^{k-2})A^{k-1}(A^+)^{k-1}\psi_0 = \\
&= \alpha\frac{1-q^k}{1-q}A^{k-1}(A^+)^{k-1}\psi_0 = \\
&= \alpha^k\frac{\left(1-q^k\right)\left(1-q^{k-1}\right)\dots\left(1-q^2\right)(1-q)}{(1-q)^k}\psi_0.
\end{aligned}$$

Подставляя теперь равенство (2.30) в выражение для нормы (2.29), получаем формулу (2.28), $\mathfrak{Q.e.d.}$

Нормируя систему $\{\tilde{\psi}_k\}$, получаем ортонормированный базис из собственных векторов

$$\psi_k := \frac{1}{\sqrt{[k]_q!\alpha^k}}(A^+)^k\psi_0$$

оператора L.

2.3.3 Координатные представления

В двух предыдущих параграфах мы описали формально-алгебраический дискретный спектр q-осциллятора (т.е. дискретный спектр, определяемый операторным соотношением и не зависящий от выбора координатного представления) и структуру соответствующих ему собственных состояний. В литературе содержится несколько различных координатных представлений, каждое из которых интересно со своей точки зрения. Обсудим некоторые из них.

Замечание 2.13 Легко убедиться в том, что координатное представление q-осциллятора с помощью дифференциального оператора $A := \partial_x + f$, действующего на пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ невозможно, поскольку q-соотношение Гейзенберга (2.23) в этом случае превращается в равенство двух дифференциальных операторов второго порядка, у одного из которых старший коэффициент равен -1, а у другого — $-q$.

Начнем с рассмотрения координатного представления q-осциллятора с помощью разностных операторов

$$A := a + bT, \quad A^+ = a + (T^{-1}b)T^{-1}, \quad \text{где } a = \{a(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad b = \{b(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \tag{2.31}$$

где $a(n), b(n) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$, где T — элементарный сдвиг вправо: $(T\psi)(n) = \psi(n+1)$. Тогда q-соотношение Гейзенберга (2.23) эквивалентно следующей системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} a^2(n) + b^2(n) = q\left(a^2(n) + b^2(n-1)\right) + \alpha \\ a(n+1) = qa(n) \end{cases}, \tag{2.32}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Решая эту систему, получаем следующее:

$$a(n) = q^n a(0), \quad b^2(n) = q^n b^2(0) + \alpha\frac{1-q^n}{1-q} - a^2(0)q^{n+1}(1-q^n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что при $a(0) \neq 0$

$$a(n) \to 0, \quad b(n) \to \sqrt{\frac{\alpha}{1-q}} \text{ при } n \to +\infty$$
$$a(n) \to (-1)^{\operatorname{sgn} a(0)}\infty, \quad b(n) \to +\infty \text{ при } n \to -\infty,$$

т.е. коэффициенты оператора L неограничены при $n \to -\infty$. Таким образом, эта реализация q-осциллятора требует введения неограниченных операторов, что, однако, не следует из вида дискретного спектра (2.24) оператора L, который содержится в ограниченном интервале. Подобное координатное представление было впервые введено, по-видимому, Макфарленом в работе [31], где оно было связано с *полиномами Роджерса-Сеге*. Позднее это координатное представление было довольно подробно описано Атакишиевым и Сусловым [4], а затем Новиковым и Таймановым [33], однако, разностные системы, подобные (2.32), в этих работах не появлялись и не исследовались.

В работе [4] показано, что в этом координатном представлении собственные функции q-осциллятора можно выразить через *полиномы Стилтьеса–Вигерта*.

Замечание 2.14 Мы показали (см. теорему (2.2)), что дискретный спектр q-осциллятора в интервале $[0, \alpha q/(1-q))$ состоит из одной q-арифметической прогрессии (в физической литературе [28] он называется *фоковским* спектром) и что алгебраическое соотношение (2.23) запрещает оператору L иметь точки дискретного спектра в отрицательной области; однако, это соотношение не накладывает никаких ограничений на собственные значения в интервале $[\alpha q/(1-q), +\infty)$ и ситуация со спектром выше точки накопления $\alpha q/(1-q)$ до сих пор не ясна. С одной стороны, в работе Новикова и Тайманова [33] 1997-го года была сформулирована гипотеза о том, что в представлении q-осциллятора разностными операторами (2.31) непрерывный спектр оператора L заполняет бесконечный промежуток $(\alpha q/(1-q), +\infty)$. С другой стороны, в целом ряде более ранних физических работ (см., например [28]) утверждается, что в q-осциллятор в этом представлении имеет также и *нефоковскую* часть спектра, а именно, что в интервале $(\alpha q/(1-q), +\infty)$ содержится бесконечная в обе стороны серия собственных значений. Однако, на наш взгляд, приведенная там аргументация в пользу последнего утверждения не является достаточно строгой с математической точки зрения.

Другое координатное представление появляется впервые, по-видимому, в работе [30], где вместо разностных операторов рождения и уничтожения (2.31) рассматриваются q-разностные операторы первого порядка, т.е. такие, в которых оператор сдвига заменен на q-разностную производную:

$$D_q f(x) := \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{x(q-q^{-1})}.$$

В [30] утверждается, что дискретный спектр в таком координатном представлении также имеет фоковскую и нефоковскую части, а в неопубликованной пока работе Гроссе и Шрамль утверждают, что им удалось построить полное семейство собственных функций для этого представления.

Вернемся к описанному выше координатному представлению q-осциллятора разностными операторами вида (2.31); легко видеть, что ситуация будет абсолютно аналогичной, если в операторе A вместо T поставить сдвиг T^{-1} в другую сторону (очевидно, в этом случае коэффициенты не будут ограниченными при $n \to +\infty$). Поэтому, при поиске координатного представления ограниченными операторами появляется естественная идея каким-то образом “скомбинировать” эти два оператора.

2.3.4 Ограниченный q-осциллятор

Построим, следуя работе [24], еще одно координатное представление q-осциллятора в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$, положив $A := aT^{-1} + bT$. В этом случае операторное соотношение (2.23) сводится к следующей системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} a^2(n) + b^2(n) = q(a^2(n+1) + b^2(n-1)) + \alpha \\ a(n+1)b(n-1) = qa(n)b(n) \end{cases} . \tag{2.33}$$

Предполагая, что $b(n)$ не обращается в нуль ни при каких целых n, разделим второе уравнение системы (2.33) на $b(n)b(n-1)$ и немедленно получим “интеграл”: $a(n+1)/b(n)$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

q. Поэтому второе уравнение перепишется в виде

$$\frac{a(n+1)}{b(n)} = \varepsilon q^{n+c}, \quad c = \mathrm{const} \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon = \pm 1 \tag{2.34}$$

(здесь c и ε отвечают за начальные данные: c — за модуль, а ε — за знак). Подставив полученное выражение для $a(n)$ в первое уравнение системы (2.33), приходим к разностному уравнению

$$x_n = qx_{n-1} + \alpha\left(1 - q^{2n+2c-1}\right),$$

где $x_n := b^2(n)\left(1 - q^{2n+2c-1}\right)\left(1 - q^{2n+2c+1}\right)$. Решая это уравнение, получаем:

$$x_n = kq^n + \frac{\alpha\left(1 + q^{2n+2c}\right)}{1-q} = q^{n+c}\left(kq^{-c} + \frac{\alpha}{1-q}\left(q^{n+c} + q^{-(n+c)}\right)\right),$$

где k — “константа интегрирования”. Таким образом,

$$b^2(n) = q^{n+c}\frac{kq^{-c} + \frac{\alpha}{1-q}\left(q^{n+c} + q^{-(n+c)}\right)}{\left(1 - q^{2n+2c-1}\right)\left(1 - q^{2n+2c+1}\right)}, \tag{2.35}$$

т.е. исходная система (2.33) имеет вещественное решение, если выражение, стоящее в правой части (2.35) неотрицательно при всех $n \in \mathbb{Z}$. Исследуем его: в числителе — “цепная линия”, приподнятая на константу kq^{-c}, а знаменатель отрицателен лишь на интервале $(-c-1/2, -c+1/2)$, в который попадает ровно одно целая точка, если c не является полуцелым. Заметим, что точка минимума $-c$ функции $q^{x+c}+q^{-(x+c)}$ попадает на отрезок $(-c-1/2, -c+1/2)$; таким образом, при $\alpha > 0$ и вещественном c, не являющимся полуцелым, за счет изменения константы k можно добиться того, что в единственной целой точке, попадающей в интервал $(-c-1/2, -c+1/2)$, числитель (2.35) будет отрицательным, а в остальных целых точках — положительным. Значит, при c, не являющимся полуцелым, и k, заключенном в некотором интервале (очевидно, что k при этом может быть только отрицательным), решение системы (2.33) существует и задается формулами (2.34),(2.35). При этом коэффициенты оператора L оказываются ограниченными:

$$b(n) \to \sqrt{\frac{\alpha}{1-q}}, \quad a(n) \to 0 \text{ при } n \to +\infty$$

$$b(n) \to 0, \quad a_n \to \sqrt{\frac{\alpha}{1-q}} \text{ при } n \to -\infty.$$

Такое асимптотическое поведение коэффициентов при $n \to +\infty$ сразу становится очевидным из формул (2.34),(2.35); при $n \to -\infty$ для вычисления предела $a(n)$ необходимо воспользоваться первым уравнением (2.33), поскольку в формуле (2.34) возникает неопределенность.

Мы доказали существование ограниченных решений системы (2.33), но не указали пределы возможного изменения константы k, что весьма неудобно с практической точки зрения. Положим

$$k := -q^c \frac{\alpha}{1-q}\left(q^{1/2} + q^{-1/2}\right);$$

тогда формулу (2.35) можно переписать следующим образом:

$$b^2(n) = \frac{\alpha}{1-q} \cdot \frac{q^{2n+2c} + 1 - q^{n+c+1/2} - q^{n+c-1/2}}{\left(1 - q^{2n+2c-1}\right)\left(1 - q^{2n+2c+1}\right)}.$$

Теперь, группируя слагаемые в числителе и производя сокращение, можно получить более удобную формулу:

$$b(n) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(1-q)\left(1 + q^{n+c-1/2}\right)\left(1 + q^{n+c+1/2}\right)}}. \tag{2.36}$$

Таким образом, мы явно указали одно из значений константы k, при котором правая часть равенства (2.35) положительна при любом целом n. Заметим, что формула (2.36) справедлива также и для полуцелых c (прямая проверка подстановкой), т.е. дает вместе с (2.34) решение системы (2.33) при любом действительном c.

Найдем теперь основное состояние q-осциллятора в рассматриваемом координатном представлении. Для удобства будем в дальнейшем считать, что $c = 1/2$ и введем обозначение $\kappa := \ln q$. Тогда, положив $\varepsilon := -1$ в (2.34), можно записать решение системы (2.33) следующим образом:

$$b(n) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2q^{1/4}\sqrt{1-q}} \cdot \frac{q^{-n/2}}{\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\kappa n}{2} \operatorname{ch}\frac{\kappa(n+1)}{2}}} \tag{2.37}$$

$$a(n) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2q^{1/4}\sqrt{1-q}} \cdot \frac{-q^{n/2}}{\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\kappa n}{2} \operatorname{ch}\frac{\kappa(n-1)}{2}}} \tag{2.38}$$

Следовательно, оператор уничтожения имеет вид:

$$A = \frac{\sqrt{\alpha}}{2q^{1/4}\sqrt{1-q}\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\kappa n}{2}}}\left(q^{-n/2}T - q^{n/2}T^{-1}\right)\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\kappa n}{2}}}.$$

Поскольку ядро оператора $q^{n/2}T - q^{-n/2}T^{-1}$ имеет вид $\left\{Dq^{-n^2/4}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, где D — произвольная действительная константа, основное состояние q-осциллятора имеет вид

$$\psi_0 = \left\{ C\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\kappa n}{2}}\, q^{-n^2/4} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}. \tag{2.39}$$

Константа C определяется из условия нормировки $\|\psi_0\| = 1$.

Замечание 2.15 Приведенные выше формулы (2.37),(2.38) для коэффициентов оператора рождения и формула (2.39) для основного состояния q-осциллятора в рассматриваемом координатном представлении, во-видимому, впервые появились работе [24]. Собственные состояния q-осциллятора могут быть выражены через *q-полиномы Эрмита* подобно тому, как выражаются собственные состояния обычного гармонического осциллятора в координатном представлении через полиномы Эрмита; соответствующие формулы можно найти (правда, к сожалению, в других обозначениях) в работе [3].

Глава 3

Циклическая q-цепочка

3.1 q-цепочка Дарбу

Под *q-цепочкой Дарбу* мы будем понимать последовательность самосопряженных разностных операторов $L_1, L_2, \dots$ на одномерной решетке $\mathbb{Z}$, связанных соотношениями

$$L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = q A_{j-1}^+ A_{j-1}, \tag{3.1}$$

где $A_j = a_j + b_j T$ — разностные операторы первого порядка, причем

$$a_j(n), b_j(n) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $b_j(n) > 0$ для всех j, n. Одна из важных особенностей разностных операторов по сравнению с дифференциальными состоит обратимости оператора сдвига T, которая влечет возможность различного определения понятия циклического замыкания цепочки. А именно, будем говорить, что q-цепочка (3.1) является *циклической* с *периодом* r и *сдвигом* s, если для всех $j \geqslant 1$ выполнено

$$L_{j+r} = T^{-s} L_j T^s. \tag{3.2}$$

Замечание 3.1 Как мы уже отмечали выше, из операторных условий замыкания типа (3.2) не следует, что коэффициенты a_{j+r} и b_{j+r} совпадают с a_j и b_j соответственно, поскольку, как дифференциальные, так и разностные операторы факторизуются в произведение взаимно сопряженных сомножителей не единственным образом. Однако, как мы видели (см. замечания (1.5),(2.3)), рассмотрение замыканий, для которых $a_{j+r} \neq a_j$, не представляет никакого интереса.

Замечание 3.2 Ранее в литературе, главным образом, рассматривались циклические замыкания без сдвига и в этом смысле идея рассматривать замыкания разностных цепочек вида (3.2), принадлежащая Дынникову [10], является новой. Тем не менее, в этой связи следует отметить несколько более ранних работ. В [37] был предложен подобный подход к непрерывной одевающей цепочке, однако никаких общих выводов относительно такого рода циклических замыканий сделано не было. В работах [33, 15] были рассмотрены некоторые частные случаи, которые в нашей общей постановке отвечают замыканию при $s = r$. И, наконец, стоит упомянуть работу [1], в которой описаны некоторые другие способы циклического замыкания непрерывных цепочек, приводящие к уравнениям с отклоняющимся аргументом.

Операторы циклической q-цепочки Дарбу, также как и операторы обычной цепочки Дарбу (1.12), подчиняются коммутационным соотношениям, а именно, справедливо следующее

Предложение 3.1 *Для оператора L_1 цепочки (3.1),(3.2) имеют место коммутационные соотношения*

$$[L_1, \tilde{A}]_{q^{-r}} = -\omega_1 q^{-r} \tilde{A}, \quad [L_1, \tilde{A}^+]_{q^r} = \omega_1 \tilde{A}^+, \tag{3.3}$$

где $\omega_1 = q^r \alpha_1 + q^{r-1}\alpha_2 + \cdots q\alpha_r$,

$$\tilde{A} = AT^{-s} = A_1 A_2 \cdots A_r T^{-s}, \quad \tilde{A}^+ = T^s A^+ = T^s A_r^+ A_{r-1}^+ \cdots A_1.$$

Доказательство.

Последовательное применение равенства (3.1) дает следующее:

$$\begin{aligned} L_1 A_1 A_2 \cdots A_r &= (A_1 A_1^+ - \alpha_1) A_1 A_2 \cdots A_r = A_1 (A_1^+ A_1) A_2 \cdots A_r - \alpha_1 A = \\ &= \frac{1}{q} A_1 (L_2 - \alpha_2) A_2 \cdots A_r - \alpha_1 A = \\ &= A_1 A_2 (A_2^+ A_2) \cdots A_r - \left(\alpha_1 + \frac{1}{q}\alpha_2\right) A = \cdots = \\ &= \frac{1}{q^{r-1}} A_1 A_2 \cdots A_r (A_r^+ A_r) - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{q} + \cdots + \frac{\alpha_r}{q^{r-1}}\right) A = \\ &= q^{-r} A L_{r+1} - \omega_1 q^{-r} A. \end{aligned}$$

Используя теперь условие замыкания (3.2), получаем, что

$$L_1 A = q^{-r} A T^{-s} L_1 T^s - \omega_1 q^{-r} A;$$

умножение на T^{-s} справа приводит к искомому равенству (3.3). Второе равенство доказывается аналогично, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 3.3 Вместо циклической q-цепочки (3.1),(3.2) можно рассмотреть цепочку вида

$$\begin{array}{l} T^{-s}A_1A_1^+T^s = q_1A_r^+A_r + \alpha_1 \\ A_2A_2^+ = q_2A_1^+A_1 + \alpha_2 \\ \vdots \\ A_rA_r^+ = q_rA_{r-1}^+A_{r-1} + \alpha_r \end{array}, \tag{3.4}$$

для некоторых $0 < q_1, q_2, \ldots, q_r < 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r > 0$ (случай $q_1, q_2, \ldots, q_r > 1$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r < 0$ аналогичен), которая, на первый взгляд, является обобщением q-цепочки Дарбу. Однако, в на самом деле это не так: такая цепочка без ограничения общности может быть сведена к цепочке вида (3.1),(3.2). Действительно, полагая

$$\tilde{A}_1 := A_1, \quad \tilde{A}_2 := \frac{1}{\sqrt{q_2}}A_2, \quad \tilde{A}_3 := \frac{1}{\sqrt{q_2q_3}}A_3, \ldots, \tilde{A}_r := \frac{1}{\sqrt{q_2q_3\cdots q_r}}A_r$$

в (3.4), приходим к следующей цепочке:

$$\begin{array}{l} T^{-s}\tilde{A}_1\tilde{A}_1^+T^s = Q\tilde{A}_r^+\tilde{A}_r + \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{A}_2\tilde{A}_2^+ = \tilde{A}_1^+\tilde{A}_1 + \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{A}_r\tilde{A}_r^+ = \tilde{A}_{r-1}^+\tilde{A}_{r-1} + \tilde{\alpha}_r \end{array}, \tag{3.5}$$

где

$$Q := q_1q_2\cdots q_r, \quad \tilde{\alpha}_1 := \alpha_1, \quad \tilde{\alpha}_2 := \frac{\alpha_2}{q_2}, \quad \tilde{\alpha}_3 := \frac{\alpha_3}{q_2q_3}, \ldots, \tilde{\alpha}_r := \frac{\alpha_r}{q_2q_3\cdots q_r}.$$

Легко заметить, что циклическая q-цепочка (3.1),(3.2) также приводится к виду (3.5) с помощью замены

$$\tilde{A}_1 := A_1, \quad \tilde{A}_2 := \frac{1}{\sqrt{q}}A_2, \quad \tilde{A}_3 := \frac{1}{\sqrt{q^2}}A_3, \ldots, \tilde{A}_r := \frac{1}{\sqrt{q^{r-1}}}A_r,$$

$$Q := q^r, \quad \tilde{\alpha}_1 := \alpha_1, \quad \tilde{\alpha}_2 := \frac{\alpha_2}{q}, \quad \tilde{\alpha}_3 := \frac{\alpha_3}{q^2}, \ldots, \tilde{\alpha}_r := \frac{\alpha_r}{q^{r-1}}.$$

Таким образом, введение параметров $q_1, q_2, \ldots q_r$ вместо одного параметра q не дает ничего нового.

3.1.1 Спектральные свойства

Предложение 3.2 *Дискретный спектр оператора L_j циклической q-цепочки (3.1),(3.2) в интервале $[0, \frac{\omega_j}{1-q^r})$ имеет вид*

$$\omega_j \frac{1-q^{nr}}{1-q^r}, \quad q^{nr} q\alpha_{j-1} + \omega_j \frac{1-q^{nr}}{1-q^r}, \dots, q^{nr} \sum_{i=1}^{r-1} q^i \alpha_{j-i} + \omega_j \frac{1-q^{nr}}{1-q^r}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{3.6}$$

где

$$\omega_j = q^r \alpha_j + q^{r-1} \alpha_{j+1} + \dots + q\alpha_{j-1},$$

а j — циклический индекс. Если все операторы q-цепочки ограничены, то (3.6) — весь дискретный спектр L_j.

Доказательство.

Пусть $\psi_{j,0}$ — основное состояние оператора L_j: $A_{j-1}\psi_{j,0} = 0$. Тогда из соотношений (3.1) немедленно вытекает, что $L_j \psi_{j,0} = 0$ для всех j, т.е. 0 является точкой спектра всех операторов q-цепочки.

Легко заметить, что если $L_j \psi = \lambda\psi$, то вектор $A_j^+ \psi$ является собственным для оператора L_{j+1} и соответствует собственному значению $q(\lambda + \alpha_j)$. Поэтому, действуя по схеме (3.43), получаем набор собственных значений (3.42). Переписывание этих формул в явном виде приводит к (3.6).

Покажем теперь, что спектр оператора L_j в интервале $[0, \frac{\omega_j}{1-q^r})$ исчерпывается набором q-арифметических прогрессий (3.6). Пусть $L_j \psi = \lambda\psi$ для некоторых λ, j; тогда непосредственно из соотношений q-цепочки следует, что $q\|A_{j-1}\psi\|^2 = \lambda\|\psi\|^2$, т.е. λ — неотрицательно, причем собственному значению $\lambda = 0$ соответствует лишь основное состояние. Кроме того, легко видеть, что либо $\lambda = 0$, либо вектор $A_{j-1}\psi$ является собственным для оператора L_{j-1}, соответствующим собственному значению $\frac{\lambda}{q} - \alpha_{j-1}$. Поэтому,

$$L_j (A_j \dots A_{j-2} A_{j-1} \psi) = \frac{\lambda - \omega_j}{q^r} (A_j \dots A_{j-2} A_{j-1} \psi).$$

Многократное применение этого оператора дает следующую серию собственных значений:

$$\frac{\lambda - \omega_j \frac{1-q^{nr}}{1-q^r}}{q^{nr}}. \tag{3.7}$$

Если $\lambda \in [0, \frac{\omega_j}{1-q^r})$, то эта последовательность стремится к $-\infty$, что противоречит неотрицательности всех собственных значений. Таким образом, эта последовательность должна в некоторый момент оборваться, т.е. очередное применение оператора $A_j \dots A_{j-2} A_{j-1}$ даст нулевой вектор, что возможно лишь в случае попадания в основное состояние. Отсюда следует, что λ содержится в (3.6).

Пусть $\lambda > \frac{\omega_j}{1-q^r}$; тогда последовательность (3.7) монотонно возрастает и стремится к $+\infty$. Поэтому она не может оборваться, и применение оператора $A_j \ldots A_{j-2}A_{j-1}$ дает серию собственных значений, стремящихся к $+\infty$. Таким образом, если операторы цепочки (3.1),(3.2) ограничены, то набор (3.6) представляет собой весь дискретный спектр оператора L_j, $\mathfrak{Q.e.d.}$

3.1.2 Симметрии q-цепочки

Ранее в литературе рассматривался в основном случай $s = 0$. Однако, в работе [33], а также в [15], указывалась возможность "обратной" факторизации, то есть разложения оператора $L_j + \alpha_j$ на множители в обратном порядке

$$L_j = \tilde{A}_j^+ \tilde{A}_j - \alpha_j = q\tilde{A}_{j-1}\tilde{A}_{j-1}^+,$$

или, что эквивалентно, замены операторов $A_j = a_j + b_j T$ на операторы вида $B_j = a_j T^{-1} + b_j$ (этот оператор получается из $A_j^+ = a_j + (T^{-1}b_j)T^{-1}$ домножением на T справа и переобозначением $b_j(n-1) \to b_j(n)$). В нашей постановке такая "обратная" факторизация эквивалентна "прямой" факторизации при $s = r$. Действительно, рассмотрим q-цепочку Дарбу

$$M_j = B_j B_j^+ - \alpha_j = qB_{j-1}^+ B_{j-1}, \tag{3.8}$$

где $B_j = a_j T^{-1} + b_j$, с замыканием без сдвига: $M_{j+1} = M_j$. Она эквивалентна следующей системе уравнений на коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j^2(n) + b_j^2(n) = q(a_{j-1}^2(n+1) + b_{j-1}^2(n)) + \alpha_j \\ a_j(n+1)b_j(n) = qa_{j-1}(n+1)b_{j-1}(n+1) \end{array} \right. , \quad j \in \mathbb{Z}_r. \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь "прямую" факторизацию $\tilde{L}_j = \tilde{A}_j \tilde{A}_j^+ - \alpha_j = q\tilde{A}_{j-1}^+ A_{j-1}$ со сдвигом $s = r$, где

$$\tilde{A}_j = T^{-j} A_j T^j, \quad A_j = a_j + b_j T; \tag{3.10}$$

при $j \neq 1(\mod r)$ эти операторные уравнения эквивалентны следующей системе разностных уравнений на коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j^2(n-j) + b_j^2(n-j) = q(a_{j-1}^2(n-j+1) + b_{j-1}^2(n-j)) + \alpha_j \\ a_j(n-j+1)b_j(n-j) = qa_{j-1}(n-j+1)b_{j-1}(n-j+1) \end{array} \right. . \tag{3.11}$$

Условие замыкания $\tilde{L}_{r+1} = T^{-r}\tilde{L}_1 T^r$ приводит к уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^2(n-r-1) + b_1^2(n-r-1) = q(a_r^2(n-r) + b_r^2(n-r-1)) + \alpha_1 \\ a_1(n-r)b_1(n-r-1) = qa_r(n-r)b_r(n-r) \end{array} \right. . \tag{3.12}$$

Производя необходимый сдвиг аргумента n в уравнениях (3.11) и (3.12), приходим к уравнениям (3.9).

Рассмотрим теперь циклическое замыкание q-цепочки (3.8) с произвольным сдвигом s:

$$M_{j+r} = T^s M_j T^{-s} \tag{3.13}$$

(ср. с равенством (3.2): для "обратной" факторизации естественно рассматривать именно такое условие замыкания). Тогда все уравнения (3.9) останутся без изменений при всех $j \neq 1$; при $j = 1$ получим следующее:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^2(n+s) + b_1^2(n+s) = q(a_r^2(n+1) + b_r^2(n)) + \alpha_1 \\ a_1(n+s+1)b_1(n+s) = qa_r(n+1)b_r(n+1) \end{array} \right. . \tag{3.14}$$

Условие замыкания для "прямой" факторизации вида (3.10) со сдвигом $r-s$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} qT^{-r}A_r^+A_rT^r &= q\tilde{A}_r^+\tilde{A}_r = \tilde{A}_{r+1}\tilde{A}_{r+1}^+ - \alpha_1 = \tilde{L}_{r+1} = \\ &= T^{-(r-s)}\tilde{L}_1T^{r-s} = T^{-(r-s+1)}A_1A_1^+T^{r-s+1} - \alpha_1; \end{aligned}$$

это приводит к следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^2(n-r+s-1) + b_1^2(n-r+s-1) = q(a_r^2(n-r) + b_r^2(n-r-1)) + \alpha_1 \\ a_1(n-r+s)b_1(n-r+s-1) = qa_r(n-r)b_r(n-r) \end{array} \right. \tag{3.15}$$

Подходящий сдвиг аргумента в уравнениях (3.15) приводит их к виду (3.14). Таким образом, доказано

Предложение 3.3 *Циклическая q-цепочка Дарбу (3.8),(3.13) со сдвигом s, где $B_j = a_jT^{-1} + b_j$, эквивалентна q-цепочке со сдвигом $r-s$ для операторов $\tilde{L}_j = \tilde{A}_j\tilde{A}_j^+ - \alpha_j$, где $\tilde{A}_j$ имеет вид (3.10).*

В дальнейшем нам потребуются две дискретные симметрии, которыми обладают циклические цепочки вида (3.1),(3.2). Пусть разностные операторы $L_1, \ldots, L_r$ удовлетворяют соотношениям (3.1),(3.2) для некоторых $q > 0$, $q \neq 1$, $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, r$. Прямая проверка показывает, что справедливо следующее

Предложение 3.4 *Циклическая q-цепочка Дарбу (3.1),(3.2) эквивалентна $\tilde{q}$-цепочке*

$$\tilde{L}_j = \tilde{A}_j\tilde{A}_j^+ - \tilde{\alpha}_j = \tilde{q}\tilde{A}_{j-1}^+\tilde{A}_{j-1},$$

с теми же длиной r и сдвигом s, где

$$\tilde{q} = \frac{1}{q}, \quad \tilde{\alpha}_j = -\frac{\alpha_{r-j-1}}{q}, \quad \tilde{A}_j = A_{r-j-2}^+, \quad \tilde{L}_j = \frac{1}{q}L_{r-j-1} + \frac{\alpha_{r-j-1}}{q}. \tag{3.16}$$

для всех $j = 1, \ldots, r$.

Это предложение показывает, что исходная q-цепочка эквивалентна другой цепочке с “обратной” факторизацией оператора $L_j+\alpha_j$, которая, согласно предложению 3.3, эквивалентна цепочке (3.1),(3.2) со сдвигом $r-s$. Таким образом, сопоставление $(L_j, A_j, \alpha_j, q) \to (\tilde{L}_j, \tilde{A}_j, \tilde{\alpha}_j, \tilde{q})$, задаваемое формулами (3.16), действительно задает симметрию в классе циклических q-цепочек Дарбу. Легко заметить, что эта симметрия соответствует изменению направления обхода “окружности” $\mathbb{Z}_r$).

Кроме того, имеет место другая симметрия, задаваемая изменением направления “оси” $\mathbb{Z}$.

Предложение 3.5 *Циклическая q-цепочка Дарбу (3.1),(3.2) эквивалентна q-цепочке*

$$\tilde{L}_j = \tilde{A}_j\tilde{A}_j^+ - \tilde{\alpha}_j = \tilde{q}\tilde{A}_{j-1}^+\tilde{A}_{j-1},$$

с той же длиной r и сдвигом $r-s$, где $\tilde{A}_j = \tilde{a}_j + \tilde{b}_jT$, а коэффициенты определяются с помощью следующих формул:

$$\tilde{a}_j(n) = b_j(j-n), \quad \tilde{b}_j(n) = a_j(j-n) \tag{3.17}$$

для всех $j \in \mathbb{Z}_r$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство.

Исходная q-цепочка (3.1),(3.2) эквивалентна следующей системе разностных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} a_j^2(n) + b_j^2(n) = q(a_{j-1}^2(n) + b_{j-1}^2(n-1)) + \alpha_j \\ a_j(n)b_j(n-1) = qa_{j-1}(n-1)b_{j-1}(n-1) \\ a_1^2(n-s) + b_1^2(n-s) = q(a_r^2(n) + b_r^2(n-1)) + \alpha_1 \\ a_1(n-s)b_1(n-s-1) = qa_r(n-1)b_r(n-1) \end{array}\right. , \tag{3.18}$$

где $j \neq 1 \mod r$. Аналогично, вторая цепочка эквивалентна такой системе уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{a}_j^2(n-1) + \tilde{b}_j^2(n-1) = q(\tilde{a}_{j-1}^2(n) + \tilde{b}_{j-1}^2(n-1)) + \alpha_j \\ \tilde{a}_j(n)\tilde{b}_j(n-1) = q\tilde{a}_{j-1}(n)\tilde{b}_{j-1}(n) \\ \tilde{a}_1^2(n-r+s) + \tilde{b}_1^2(n-r+s) = q(\tilde{a}_r^2(n) + \tilde{b}_r^2(n-1)) + \alpha_1 \\ \tilde{a}_1(n-r+s+1)b_1(n-r+s) = q\tilde{a}_r(n)\tilde{b}_r(n) \end{array}\right. , \tag{3.19}$$

где $j \neq 1 \mod r$. Легко проверить, что замена (3.17) и подходящий сдвиг аргумента сводят уравнения (3.19) к уравнениям (3.18), Q.e.d.

3.1.3 Ограничены ли операторы q-цепочки?

Предложение 3.6 *Операторы циклической q-цепочки Дарбу (3.1),(3.2) неограничены, если $s \leqslant 0$ или $s \geqslant r$.*

Доказательство.

Операторные соотношения (3.1) вместе с условием цикличности (3.2) приводят к следующей системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} a_2^2(n) + b_2^2(n) = q(a_1^2(n) + b_1^2(n-1)) + \alpha_2 \\ \vdots \\ a_r^2(n) + b_r^2(n) = q(a_{r-1}^2(n) + b_{r-1}^2(n-1)) + \alpha_r \\ a_1^2(n-s) + b_1^2(n-s) = q(a_r^2(n) + b_r^2(n-1)) + \alpha_1 \\ a_2(n)b_2(n-1) = qa_1(n-1)b_1(n-1) \\ \vdots \\ a_r(n)b_r(n-1) = qa_{r-1}(n-1)b_{r-1}(n-1) \\ a_1(n-s)b_1(n-s-1) = qa_r(n-1)b_r(n-1) \end{cases}. \tag{3.20}$$

Рассмотрим сперва случай $s \leqslant 0$; перемножая все уравнения второй группы системы (3.20), получаем:

$$a_1(n-s)b_1(n-s-1)\prod_{j=1}^{r} a_j(n) = q^r a_1(n)b_1(n-1)\prod_{j=1}^{r} a_j(n-1). \tag{3.21}$$

Если $s = 0$, то после сокращения множителей равенство (3.21) принимает вид

$$f(n) = q^r f(n-1), \tag{3.22}$$

где $f(n) = \prod_{j=1}^{r} a_j(n)$. Поэтому $f(n)$ экспоненциально растет при $n \to -\infty$ (или при $n \to +\infty$ в случае $q > 1$) и, следовательно, коэффициенты разностных операторов A_j неограничены. Если $s < 0$, то равенство (3.21) следует домножить на произведение

$$a_1(n+1)a_1(n+2)\cdots a_1(n-s-1)b_1(n)b_1(n+1)\cdots b_1(n-s-2),$$

после чего оно также примет вид (3.22) для

$$f(n) = \prod_{i=1}^{-s} a_1(n+i)b_1(n+i-1)\prod_{j=1}^{r} a_j(n).$$

Теперь рассмотрим случай $s \geqslant r$. Симметрия (3.17) переводит q-цепочку с таким сдвигом в q-цепочку с неположительным сдвигом $r - s$, операторы которой, как показано выше, неограничены. Поэтому, используя формулы (3.17), легко заметить, что операторы исходной q-цепочки тоже неограничены, Q.e.d.

Доказанное выше предложение мотивирует рассмотрение циклических q-цепочек с ненулевым сдвигом, поскольку замыкание с нулевым сдвигом приводит к неограниченным операторам для цепочек любой длины. Вопрос об ограниченности операторов цепочки при $0 < s < r$ до сих пор остается открытым. Есть основания предполагать, что если r — нечетно, что операторы цепочки неограничены при любом s, а если r — четно, то они неограничены при любом $s \neq r/2$.

3.1.4 Цепочки со сдвигом $s = r/2$

Ограничимся теперь обсуждением циклических q-цепочек Дарбу четной длины r со сдвигом $s = r/2$ (этот подход был предложен И. А. Дынниковым). Рассмотрим другую q-цепочку длины r, но с нулевым сдвигом:

$$M_j = B_j B_j^+ - \alpha_j = q B_{j-1}^+ B_{j-1}, \quad M_{j+r} = M_j, \tag{3.23}$$

где

$$B_j = u_j T^{-1} + v_j T. \tag{3.24}$$

Нетрудно проверить, что циклическая q-цепочка (3.23),(3.24) сводится к следующей системе разностных уравнений на коэффициенты:

$$\begin{cases} u_1^2(n) + v_1^2(n) = q(u_r^2(n+1) + v_r^2(n-1)) + \alpha_1 \\ \vdots \\ u_r^2(n) + v_r^2(n) = q(u_{r-1}^2(n+1) + v_{r-1}^2(n-1)) + \alpha_r \\ u_1(n+1)v_1(n-1) = q u_r(n) v_r(n) \\ \vdots \\ u_r(n+1)v_r(n-1) = q u_{r-1}(n) v_{r-1}(n) \end{cases} . \tag{3.25}$$

Прямая проверка показывает, что при замене

$$\begin{array}{ll} u_{2i+1}(2k+1) = a_{2i+1}(k+i) & v_{2i+1}(2k+1) = b_{2i+1}(k+i) \\ u_{2i}(2k) = a_{2i}(k+i-1) & v_{2i}(2k) = b_{2i}(k+i-1) \end{array}$$

уравнения (3.20) превращаются в уравнения вида (3.25) ($u_j(n)$ и $v_j(n)$ определены лишь если $j + n$ четно).

Таким образом, исследование существования решения циклической q-цепочки (3.1),(3.2) для $s = r/2$ сводится к исследованию системы разностных уравнений (3.25).

Замечание 3.4 В параграфе 2.3.4 была описана модель ограниченного q-осциллятора, в которой операторы рождения и уничтожения имели вид (3.24) и было предъявлено ее двухпараметрическое семейство решений. В нашей постановке такая модель соответствует циклической цепочке длины $r = 2$ со сдвигом $s = 1$, у которой $\alpha_1 = \alpha_2$. В дальнейшем мы покажем что аналогичная ситуация имеет место и для цепочек произвольной четной длины r: система разностных уравнений (3.25) имеет r-параметрической семейство решений, причем эти решения (а, следовательно, и операторы q-цепочки со сдвигом $s = r/2$) ограничены. При $r \neq s/2$ даже вопрос существования решения соответствующей системы разностных уравнений на коэффициенты пока открыт; более того, при некоторых значениях s задача Коши для этой разностной системы неразрешима: зная значения всех $a_j(n)$ и $b_j(n)$ для некоторого n, нельзя однозначно построить решение системы с таким начальными данными.

3.2 Цепочка длины 2

3.2.1 Общее решение

Случай q-цепочек длины $r = 2s = 2$ представляет особый интерес, поскольку общее решение соответствующих уравнений (3.20) может быть записано в явном виде. Общее решение задачи для $r = 2$ было сообщено автору И. А. Дынниковым.

Для нахождения общего решения нам потребуется следующий технический трюк. Введем обозначения:

$$\xi_n = \begin{cases} u_1^2(n+1), \text{ если } n \text{ — четно} \\ u_2^2(n+1), \text{ если } n \text{ — нечетно} \end{cases}, \quad \eta_n = \begin{cases} v_1^2(n), \text{ если } n \text{ — нечетно} \\ v_2^2(n), \text{ если } n \text{ — четно} \end{cases} \tag{3.26}$$

При этом недоопределенная система (3.25) перейдет в следующую полностью определенную систему:

$$\begin{cases} \xi_{n-1} + \eta_n = q(\xi_n + \eta_{n-1}) + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + (-1)^{n-1}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \\ \xi_n \eta_{n-1} = q^2 \xi_{n-1}\eta_n \end{cases}. \tag{3.27}$$

Легко заметить, что уравнения (3.27) в точности совпадают с уравнениями (3.25) для $r = 1$ и “мигающих” параметров $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + (-1)^{n-1}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$ (вместо α), т.е. замена (3.26) фактически сводит нашу цепочку длины $r = 2$ со сдвигом $s = 1$ к “мигающей” цепочке вида (3.23),(3.24). В работе [24] содержится частное решение цепочки (3.23),(3.24) для $r = 1$ (в нашей постановке это соответствует случаю $s = 1$, $r = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2$), обладающее дополнительной симметрией относительно начала координат. Приведенное здесь рассуждение обобщает решение задачи для "симметричного" q-осциллятора, описанное в параграфе 2.3.4.

Будем для определенности считать, что $0 < q < 1$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Второе уравнение (3.27) можно переписать в виде

$$\frac{\xi_n}{\eta_n} = q^2 \frac{\xi_{n-1}}{\eta_{n-1}},$$

и заметить, что ξ_n/η_n образует геометрическую прогрессию. Поэтому,

$$\xi_n = q^{2n+2\varphi+1}\eta_n, \tag{3.28}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\left(\log_q(\xi_0/\eta_0) - 1\right)$ — константа, определяемая начальными данными. Выражая ξ_n из (3.28) и подставляя в первое из уравнений (3.27), после домножения на $1 - q^{2(n+\varphi)}$ получаем:

$$\zeta_n = q\zeta_{n-1} + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (-1)^{n-1}\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\left(1 - q^{2(n+\varphi)}\right), \tag{3.29}$$

где $\zeta_n = \eta_n \left(1 - q^{2(n+\varphi-1)}\right)\left(1 - q^{2(n+\varphi)}\right)$.

Общее решение разностного уравнения (3.29) задается следующей формулой:

$$\zeta_n = -kq^n + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + q^{2n+2\varphi+1})}{2(1-q)} + (-1)^{n-1}\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - q^{2n+2\varphi+1})}{2(1+q)},$$

где k — некоторая константа. Вводя обозначения

$$c_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1-q} + (-1)^n \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1+q}, \qquad 2\kappa = kq^{-(\varphi+\frac{1}{2})},$$

приходим к следующему выражению для η_n:

$$\eta_n = \frac{1}{2}\frac{q^{n+\varphi+\frac{1}{2}}\left(-2\kappa + c_{n+1}q^{-(n+\varphi+\frac{1}{2})} + c_n q^{n+\varphi+\frac{1}{2}}\right)}{(1 - q^{2(n+\varphi+1)})(1 - q^{2(n+\varphi)})}. \tag{3.30}$$

Для построения решения нашей q-цепочки необходимо среди всех решений (ξ_n, η_n) системы (3.27) отобрать те, которые положительны во всех точках целочисленной решетки; легко видеть, что в силу (3.28) достаточно обеспечить положительность η_n. Рассмотрим отдельно два случая: $\varphi \notin \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathbb{Z}$.

Если $\varphi \notin \mathbb{Z}$, то в интервал $(-\varphi - 1, -\varphi)$ попадет ровно одна целочисленная точка n_0. Очевидно, что при $n \neq n_0$ знаменатель дроби (3.30) положителен, а при $n = n_0$ — отрицателен; поэтому нам необходимо выбрать константу κ

таким образом, чтобы числитель дроби (3.30) тоже был положительным при $n \neq n_0$ и отрицательным в точке n_0. Введем обозначение

$$f(n) = c_{n+1} q^{-(n+\varphi+\frac{1}{2})} + c_n q^{n+\varphi+\frac{1}{2}};$$

нетрудно проверить, что эта функция достигает минимума на множестве $\mathbb{Z}$ именно в точке n_0. Поэтому, условие положительности η_n можно переписать следующим образом:

$$f(n_0) < 2\kappa < \min\{f(n_0-1), f(n_0+1)\}.$$

После преобразований последнее неравенство принимает вид:

$$c_{[\varphi]} q^{-\theta} + c_{[\varphi]-1} q^{\theta} < 2\kappa < \min(c_{[\varphi]} q^{\theta+1} + c_{[\varphi]-1} q^{-\theta-1}, c_{[\varphi]} q^{\theta-1} + c_{[\varphi]-1} q^{-\theta+1}), \quad (3.31)$$

где $\theta = \varphi - [\varphi] - \frac{1}{2}$, а $[\varphi]$ обозначает целую часть числа φ.

Таким образом, при любом $\varphi \notin \mathbb{Z}$ формулы (3.30),(3.28) приводят к решению исходной цепочки, если параметр κ удовлетворяет неравенству (3.31).

Пусть теперь $\varphi \in \mathbb{Z}$. В этом случае числитель дроби (3.30) достигает минимума в полуцелой точке $-\varphi - 1/2$, а ее знаменатель обращается в нуль в целочисленных точках $-\varphi$ и $-\varphi - 1$. Поэтому для существования решения необходимо подобрать параметр κ так, чтобы и числитель этой дроби тоже обращался в нуль в точках $-\varphi$, $-\varphi - 1$. Поскольку $f(-\varphi) = f(-\varphi - 1)$, числитель дроби (3.30) обращается в нуль в точках $-\varphi$ и $-\varphi-1$, если выполнено следующее условие:

$$2\kappa = f(-\varphi) = c_{\varphi-1} q^{-1/2} + c_\varphi q^{1/2};$$

значит, в этом случае решение определено на всей целочисленной решетке. Если $\varphi \in \mathbb{Z}$, то на интервале $(-\varphi-1, -\varphi)$ нет целочисленных точек; поэтому достаточно проверить положительность выбранного решения в точках $-\varphi$ и $-\varphi - 1$, что делается прямым вычислением. Таким образом, доказано

Предложение 3.7 *При $r = 2 = 2s$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $0 < q < 1$ общее решение задачи (3.1),(3.2) имеет вид: $a_1(n) = \varepsilon\sqrt{\xi_{2n}}$, $b_1(n) = \sqrt{\eta_{2n+1}}$, $a_2(n) = \varepsilon\sqrt{\xi_{2n-1}}$, $b_2(n) = \sqrt{\eta_{2n}}$, где $\varepsilon = \pm 1$,*

$$\xi_n = \frac{1}{2}\frac{c_n - 2\kappa\, q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}} + c_{n+1} q^{-2n-2\varphi-1}}{(1-q^{-2(n+\varphi)})(1-q^{-2(n+\varphi+1)})}, \quad \eta_n = \frac{1}{2}\frac{c_{n+1} - 2\kappa\, q^{n+\varphi+\frac{1}{2}} + c_n q^{2n+2\varphi+1}}{(1-q^{2(n+\varphi)})(1-q^{2(n+\varphi+1)})}, \quad (3.32)$$

φ — произвольный параметр, а параметр κ удовлетворяет ограничениям

$$c_{[\varphi]} q^{-\theta} + c_{[\varphi]-1} q^{\theta} < 2\kappa < \min(c_{[\varphi]} q^{\theta+1} + c_{[\varphi]-1} q^{-\theta-1}, c_{[\varphi]} q^{\theta-1} + c_{[\varphi]-1} q^{-\theta+1})$$

при $\varphi \notin \mathbb{Z}$ *и* $2\kappa = c_\varphi q^{\frac{1}{2}} + c_{\varphi-1}q^{-\frac{1}{2}}$, *если* $\varphi \in \mathbb{Z}$ *(в этом случае дроби (3.32) следует сократить на* $(1-q^{2(n+\varphi)})$ *при* $n \equiv \varphi (\mathrm{mod}\, 2)$ *и на* $(1-q^{2(n+\varphi+1)})$ *при* $n \equiv \varphi + 1 (\mathrm{mod}\, 2)$*), где* $\theta = \varphi - [\varphi] - \frac{1}{2}$.

Замечание 3.5 В случае $\varphi \in \mathbb{Z}$ формулы (3.32) принимают следующий вид после сокращения множителей:

$$\xi_n = \frac{1}{2}\frac{c_\varphi - c_{\varphi+1}q^{-n-\varphi-1}}{(1-q^{-2(n+\varphi+1)})(1+q^{-n-\varphi})}, \quad \eta_n = \frac{1}{2}\frac{c_{\varphi+1} - c_\varphi q^{n+\varphi+1}}{(1-q^{2(n+\varphi+1)})(1+q^{n+\varphi})}$$

при $n \equiv \varphi (\mathrm{mod}\, 2)$,

$$\xi_n = \frac{1}{2}\frac{c_{\varphi+1} - c_\varphi q^{-n-\varphi}}{(1-q^{-2(n+\varphi)})(1+q^{-n-\varphi-1})}, \quad \eta_n = \frac{1}{2}\frac{c_\varphi - c_{\varphi+1}q^{n+\varphi}}{(1-q^{2(n+\varphi)})(1+q^{n+\varphi+1})}$$

$n \equiv \varphi + 1 (\mathrm{mod}\, 2)$.

Замечание 3.6 В частном случае $\alpha_1 = \alpha_2$ величина c_n не зависит от n; поэтому формулы (3.32) можно переписать следующим образом:

$$\xi_n = \frac{\alpha_1}{1-q}\frac{-\nu q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}} + 1 + q^{-2n-2\varphi-1}}{(1-q^{-2(n+\varphi)})(1-q^{-2(n+\varphi+1)})}, \; \eta_n = \frac{\alpha_1}{1-q}\frac{-\nu q^{n+\varphi+\frac{1}{2}} + 1 + q^{2n+2\varphi+1}}{(1-q^{2(n+\varphi)})(1-q^{2(n+\varphi+1)})} \tag{3.33}$$

для $\varphi \notin \mathbb{Z}$ и $\nu = \kappa\frac{1-q}{\alpha_1}$, удовлетворяющего ограничениям

$$q^{-\theta} + q^{\theta} < \nu < \min\{q^{1-\theta} + q^{\theta-1}, q^{-\theta-1} + q^{\theta+1}\}; \tag{3.34}$$

$$\xi_n = \frac{\alpha_1}{(1-q)(1+q^{-n-\varphi})(1+q^{-n-\varphi-1})}, \quad \eta_n = \frac{\alpha_1}{(1-q)(1+q^{n+\varphi})(1+q^{n+\varphi+1})} \tag{3.35}$$

для $\varphi \in \mathbb{Z}$. Частное решение (3.35) было приведено в работе [24].

В дальнейшем нам будет удобно положить $\nu = q^\tau + q^{-\tau}$ и переписать формулы (3.33),(3.35) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{\alpha_1(1-q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}-\tau})(1-q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}+\tau})}{(1-q)(1-q^{-2(n+\varphi)})(1-q^{-2(n+\varphi+1)})} \\ \eta_n &= \frac{\alpha_1(1-q^{n+\varphi+\frac{1}{2}-\tau})(1-q^{n+\varphi+\frac{1}{2}+\tau})}{(1-q)(1-q^{2(n+\varphi)})(1-q^{2(n+\varphi+1)})} \end{aligned} \tag{3.36}$$

где $|\theta| < \tau < \min\{|\theta-1|, |\theta+1|\}$ при $\varphi \notin \mathbb{Z}$ и $\tau = \frac{1}{2}$ при $\varphi \in \mathbb{Z}$. Нетрудно заметить, что в переменных (φ, ν) область допустимых параметров (т.е. параметров, обеспечивающих положительность решения (3.36) во всех целых точках) состоит из бесконечного набора криволинейных треугольников (см. рис. 3.1).

Рис. 3.1: Область изменения параметров φ и ν в формуле 3.36.

3.2.2 Асимптотика коэффициентов

Предложение 3.7 позволяет сделать следующие выводы об асимптотическом поведении коэффициентов операторов q-цепочки (3.1),(3.2):

$$a_1(n), a_2(n) \to 0, \quad b_1(n) \to \sqrt{\frac{\alpha_1 + q\alpha_2}{1-q^2}}, \quad b_2(n) \to \sqrt{\frac{\alpha_2 + q\alpha_1}{1-q^2}} \quad \text{при } n \to +\infty, \tag{3.37}$$

$$a_1(n) \to \sqrt{\frac{\alpha_1 + q\alpha_2}{1-q^2}}, \quad a_2(n) \to \sqrt{\frac{\alpha_2 + q\alpha_1}{1-q^2}}, \quad b_1(n), b_2(n) \to 0 \quad \text{при } n \to -\infty. \tag{3.38}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = (a_j + b_j T)(a_j + T^{-1}(b_j)T^{-1}) - \alpha_j = \\ = \left(a_j T^{-1}(b_j)\right) T^{-1} + (a_j^2 + b_j^2 - \alpha_j) + (T(a_j)b_j)\, T, \end{aligned} \tag{3.39}$$

коэффициенты при $T^{\pm 1}$ операторов L_j, где $j = 1, 2$, стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$, т.е. оператор L_j на бесконечности эквивалентен оператору умножения на константу $\frac{\alpha_j + q\alpha_{j+1}}{1-q^2}$ (здесь $j \in \mathbb{Z}_2$).

3.2.3 Сходимость к непрерывной модели

Исследуем теперь вопрос о сходимости при $q \to 1$ дискретной модели (3.1),(3.2) в случае $r = 2$, $s = 1$ к непрерывной модели (1.12). Для этого рассмотрим цепочку (3.1) определенную не на целочисленной решетке $\mathbb{Z}$, а на решетке $h\mathbb{Z}$

с шагом h. При этом соответствующие разностные уравнения на коэффициенты операторов останутся таким же за тем лишь исключением, что функции $a_j(n)$ и $b_j(n)$ будут определены не на целочисленной решетке, а в точках вида $x = nh$ для всех $j \in \mathbb{Z}_r$, где n — целое.

Будем считать, что $x \in \mathbb{R}$, тогда $n = x/h$ — также вещественно в формулах (3.36), а операторы L_j становятся разностными на всей прямой $\mathbb{R}$. Пусть T — оператор сдвига на h, действующий на функциях, определенных на всей числовой оси; рассмотрим следующий оператор:

$$\exp\left(h\frac{d}{dx}\right) = I + h\frac{d}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \cdots ,$$

где I — тождественный оператор. Тогда с точностью до $o(h)$

$$\exp\left(h\frac{d}{dx}\right) = I+h\frac{d}{dx}+o(h) = I+h\left(\frac{T-I}{h}+o(1)\right)+o(h) = T+o(h). \quad (3.40)$$

Таким образом, с точностью до $o(h)$ оператор сдвига T совпадает с оператором $\exp(h\frac{d}{dx})$.

Предложение 3.8 *В случае $r = 2$, $s = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2$ операторы $L_j + \frac{\alpha_j}{2}$, построенные по решениям (3.36) при $\varepsilon = -1$, $q = \exp(-\frac{\alpha}{8}h^2)$, слабо сходятся к гармоническому осциллятору:*

$$\left(L_{1,2} + \frac{\alpha_1}{2}\right)\psi(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha_1^2}{4}x^2\right)\psi(x) + o(1) \quad \textit{для всех } \psi \in C^2(\mathbb{R}).$$

Доказательство.

Имея ввиду равенство (3.40), согласно (3.39) с точностью до $o(h)$ получаем, что

$$L_j + \frac{\alpha_j}{2} = \left(a_jT^{-1}(b_j)\right)T^{-1} + (a_j^2 + b_j^2 - \alpha_j) + \left(T(a_j)b_j\right)T + \frac{\alpha_j}{2} =$$
$$= a_j(x)b_j(x-h)\exp\left(-h\frac{d}{dx}\right)+a_j^2(x)+b_j^2(x)-\frac{\alpha_j}{2}+a_j(x+h)b_j(x)\exp\left(h\frac{d}{dx}\right) =$$
$$= A(x,h) + hB(x,h)\frac{d}{dx} + h^2C(x,h)\frac{d^2}{dx^2} + \cdots , \quad (3.41)$$

где

$$A(x,h) = a_j^2(x) + b_j^2(x) + a_j(x+h)b_j(x) + a_j(x)b_j(x-h) - \frac{\alpha_j}{2},$$

$$B(x,h) = a_j(x+h)b_j(x) - a_j(x)b_j(x-h),$$

$$C(x,h) = \frac{1}{2}(a_j(x+h)b_j(x) + a_j(x)b_j(x-h)).$$

Используя формулы (3.36), разложим функции a_j и b_j, где $j = 1, 2$, в ряд по h в окрестности нуля, откуда получим следующее:

$$a_j^2(x) = \frac{1}{h^2} - \frac{\alpha_j x}{2h} + \left(\frac{\alpha_j^2 x^2}{16} - \frac{\alpha\varphi}{4} + \frac{1-4\tau^2}{16x^2}\right) + O(h)$$

$$b_j^2(x) = \frac{1}{h^2} + \frac{\alpha_j x}{2h} + \left(\frac{\alpha_j^2 x^2}{16} + \frac{\alpha_j}{2} + \frac{\alpha\varphi}{4} + \frac{1-4\tau^2}{16x^2}\right) + O(h)$$

$$a_j(x+h)b_j(x) = -\frac{1}{h^2} + \left(\frac{\alpha_j^2 x^2}{16} - \frac{1-4\tau^2}{16x^2}\right) + O(h)$$

$$a_j(x)b_j(x-h) = -\frac{1}{h^2} + \left(\frac{\alpha_j^2 x^2}{16} - \frac{1-4\tau^2}{16x^2}\right) + O(h)$$

Теперь легко получить следующую асимптотику коэффициентов оператора L_j:

$$A(x,h) = \frac{\alpha_1^2}{4}x^2 + O(h), \quad B(x,h) = O(h), \quad C(x,h) = -\frac{1}{h^2} + O(1).$$

Таким образом, оператор $L_j + \frac{\alpha_j}{2}$ слабо сходится к гармоническому осциллятору, Q.e.d.

Аналогично можно показать, что и в случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$ оператор L_j сходится к

$$-\frac{d}{dx^2} + \frac{(\alpha_j + \alpha_{j+1})^2}{16}x^2 - \frac{\alpha_j}{2} - \frac{(\alpha_j - \alpha_{j+1})(\alpha_j + 3\alpha_{j+1})}{4(\alpha_j + \alpha_{j+1})^2 x^2},$$

где $\alpha_{j+2} = \alpha_j$, т.е. к оператору обычной цепочки Дарбу (1.12) при $r = 2$ (см. (1.17)).

3.3 Цепочки произвольной длины

Перейдем теперь к рассмотрению циклических q-цепочек Дарбу (3.1),(3.2) произвольной четной длины r со сдвигом $s = r/2$. При $r > 2$ явное решение соответствующей системы разностных уравнений (3.20) не известно; более того, a priori не ясно, существует ли это решение вообще: мы видели, что уже при $r = 2$ нахождение решения системы (3.27), которое принимает лишь положительные значения, требовало определенных усилий — не любым начальным данным соответствует решение? положительное на решетке $\mathbb{Z}$.

3.3.1 Формулировка основной теоремы

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1 *Для произвольных четного r, положительных $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $0 < q < 1$, задача (3.1),(3.2) при $s = r/2$ имеет r-параметрическое семейство решений. При этом для всех j оператор L_j ограничен и имеет только дискретный спектр $\{\lambda_{j,0}, \lambda_{j,1}, \dots\}$ в промежутке $[0, \|L_j\|)$, вычисляемый по схеме Дарбу:*

$$\lambda_{j,0} = 0, \quad \lambda_{j+1,k+1} = q(\lambda_{j,k} + \alpha_j), \quad \lambda_{j+r,k} = \lambda_{j,k}. \tag{3.42}$$

Для каждого j собственные функции операторов L_j, также вычисляемые по схеме Дарбу:

$$A_{j-1}\psi_{j,0} = 0, \quad \psi_{j+1,k+1} = A_j^+\psi_{j,k}, \tag{3.43}$$

образуют полное семейство в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.

Для произвольных четного r, отрицательных $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $q > 1$, задача (3.1),(3.2) при $s = r/2$ имеет r-параметрическое семейство решений. При этом для всех j оператор L_j ограничен и имеет только дискретный спектр $\{\lambda_{j,0}, \lambda_{j,1}, \dots\}$ в промежутке $[-\alpha_j, \|L_j\|)$, вычисляемый по схеме Дарбу:

$$\lambda_{j,0} = -\alpha_j, \quad \lambda_{j-1,k+1} = \frac{\lambda_{j,k}}{q} - \alpha_{j-1}, \quad \lambda_{j-r,k} = \lambda_{j,k}.$$

Для каждого j собственные функции операторов L_j, также вычисляемые по схеме Дарбу:

$$A_j^+\psi_{j,0} = 0, \quad \psi_{j-1,k+1} = A_{j-1}\psi_{j,k},$$

образуют полное семейство в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.

Доказательство этой теоремы будет разделено на несколько предложений. Прежде всего необходимо доказать существование хотя бы одного решения задачи (3.1),(3.2), а уже затем показать, что это решение может быть возмущено. Как показано в параграфе 3.1.4, исходная q-цепочка сводится к системе разностных уравнений (3.25). Вводя обозначения $\xi_j(n) = u_j^2(n+1)$, $\eta_j(n) = v_j^2(n)$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \xi_j(n-1) + \eta_j(n) = q(\xi_{j-1}(n) + \eta_{j-1}(n-1)) + \alpha_j \\ \xi_j(n)\eta_j(n-1) = q^2\xi_{j-1}(n-1)\eta_{j-1}(n) \end{cases}, \tag{3.44}$$

где j — циклический индекс, $j \in \mathbb{Z}_r$, а $\xi_j(n-1)$ и $\eta_j(n)$ определены лишь если $j + n$ четно. Таким образом, достаточно исследовать систему (3.44), считая, что $\xi_j(n)$ и $\eta_j(n)$ определены при всех n, и показать, что для произвольного r эта система имеет $2r$-параметрическое семейство решений, принимающих положительные значения на решетке $\mathbb{R}$.

Замечание 3.7 Как показано в параграфе 3.1.4, исходная q-цепочка сводится к системе разностных уравнений на переменные $u_j(n)$, $v_j(n)$, где $j+n$ четно; соответствующие операторы B_j вида (3.24) действуют на решетке $2\mathbb{Z} + (j+1)(\mathrm{mod}\, 2)$. Но в цепочке (3.23) эти операторы действуют на всей оси $\mathbb{Z}$; поэтому такая цепочка эквивалентна *двум независимым* цепочкам вида (3.1),(3.2). Это обстоятельство объясняет тот факт, что согласно теореме 3.1, исходная цепочка определяется r параметрами, в то время как решение системы (3.44), если считать переменные $\xi_j(n)$ и $\eta_j(n)$ определенными во всех целых точках, определяется $2r$ параметрами (как будет показано ниже).

Исследование свойств системы (3.44) для нечетного r (которое также проводится ниже) не имеет непосредственного отношения к доказательству теоремы 3.1; однако, оно представляет самостоятельный интерес: подобно тому, как в параграфе 3.2 исходная цепочка длины 2 записывалась в виде "мигающей" цепочки длины 1, произвольная цепочка вида (3.1),(3.2) длины $r = 4t+2$ может быть превращена в "мигающую" цепочку вида (3.23),(3.24) половинной длины $2t+1$. Действительно, доопределяя ξ_j и η_j в системе (3.44) с помощью формул

$$\begin{aligned} \xi_{2i+1}(2k+1) &= u^2_{2i+2t+2}(2k+2), &\qquad \xi_{2i}(2k) &= u^2_{2i+2t+1}(2k+1) \\ \eta_{2i+1}(2k) &= v^2_{2i+2t+2}(2k), &\qquad \eta_{2i}(2k+1) &= v^2_{2i+2t+1}(2k+1)' \end{aligned}$$

легко свести систему уравнений (3.25) к системе вида (3.44) с "мигающим" параметром

$$\gamma_j(n) = \frac{1}{2}\left((\alpha_j + \alpha_{j+t+1}) + (-1)^{n+j}(\alpha_j - \alpha_{j+t+1})\right).$$

Поэтому, если $\alpha_j = \alpha_{j+2t+1}$ для всех j, то исходная цепочка эквивалентна "немигающей" цепочке вида (3.23),(3.24) половинной длины, т.е. системе (3.44) нечетной длины. Такой выбор параметров представляет для нас особый интерес, потому что, как мы надеемся показать, в этом случае имеет место сходимость решений дискретной задачи к непрерывной (в том же смысле, в котором разностные операторы сходились к непрерывным в случае $r = 2$ — см. предложение 3.8).

Описанная выше процедура "наматывания" цепочки длины $r = 4t+2$ на цепочку половинной длины нам не потребуется при доказательстве теоремы. Тем не менее, она заслуживает отдельного упоминания, поскольку обобщает на случай цепочек длины $r = 4t+2$ тот технический трюк (3.26), который был использован Дынниковым при нахождении явного вида решения задачи для $r = 2$. Отметим также, что в случае $r = 4t$ такая конструкция невозможна поскольку половина $2t$ длины цепочки не взаимно проста с двойкой — "кратностью наматывания".

3.3.2 Существование решений

Предложение 3.9 *Система разностных уравнений (3.44), где* $j \in \mathbb{Z}_r$, $0 < q < 1$, $\alpha_j > 0$, *при всех* r *имеет* $2r$*-параметрическое семейство решений, положительных во всех точках целочисленной решетки.*

Доказательство.

Начнем с того, что получим явные формулы, позволяющие для каждого $j = 1, \dots, r$ выразить $(\xi_j(n), \eta_j(n))$ через $(\xi_i(n-1), \eta_i(n-1))$, $i = 1, \dots, r$. Исключая $\xi_j(n)$ из уравнений второй группы (3.44) и подставляя полученные выражения в уравнения первой группы, приходим к следующей линейной системе уравнений:

$$c_j \eta_j(n) - d_j \eta_{j-2}(n) = g_j, \quad \text{где } j \in \mathbb{Z}_r, \tag{3.45}$$

$$\begin{array}{l} c_j = \eta_{j-1}(n-1), \quad d_j = q^3 \xi_{j-2}(n-1) \\ g_j = \eta_{j-1}(n-1)(q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) + \alpha_j) \end{array}. \tag{3.46}$$

Таким образом, для произвольно выбранного набора начальных данных

$$(\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_r(0), \eta_1(0), \eta_2(0) \dots, \eta_r(0))$$

решение системы (3.44) с такими начальными данными однозначно продолжается на положительную “полуось”, если для всех натуральных n определитель матрицы линейной системы (3.45) отличен от нуля. Применяя формулы Крамера и записывая результат в более компактном виде, получаем следующее:

$$\eta_j(n) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \xi_j(n) = q^2 \frac{\xi_{j-1}(n-1)\eta_{j-1}(n)}{\eta_j(n-1)} = q^2 \frac{\xi_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-1)} \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta}, \tag{3.47}$$

где

$$\Delta_j = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{g_{j-2k}}{c_{j-2k}} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{d_{j-2i}}{c_{j-2i}} \right) \left(\prod_{i=1}^{r} c_i \right), \quad \Delta = \prod_{i=1}^{r} c_i - \prod_{i=1}^{r} d_i, \tag{3.48}$$

если r — нечетно, и

$$\Delta_j = \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \frac{g_{j-2k}}{c_{j-2k}} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{d_{j-2i}}{c_{j-2i}} \right) \left(\prod_{i=1}^{r} c_i \right) - \sum_{k=1}^{\frac{r}{2}} \frac{g_{j+2k}}{d_{j+2k}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{c_{j+2i}}{d_{j+2i}} \right) \left(\prod_{i=1}^{r} d_i \right), \tag{3.49}$$

$$\Delta = \left(\prod_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} c_{2i+1} - \prod_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} d_{2i+1} \right) \left(\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} c_{2i} - \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} d_{2i} \right), \tag{3.50}$$

если r — четно. В формулах (3.47)–(3.50) все индексы считаются циклическими, т.е. складываются и вычитаются по модулю r, а произведения $\prod$ считаются равными единице, если нижний предел оказался больше верхнего. Заметим, что в случае четного r выражение Δ_j можно разложить на множители:

$$\Delta_j = \left(\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} c_{j+2i+1} - \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} d_{j+2i+1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \frac{g_{j-2k}}{c_{j-2k}}\left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{d_{j-2k}}{c_{j-2k}}\right)\left(\prod_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} c_{j+2i}\right)\right),$$

т.е. выражения (3.49),(3.50) имеют общий множитель, который сокращается в формулах (3.48).

Перемножение всех уравнений второй группы системы (3.44) дает один "неавтономный" интеграл этой системы:

$$q^{-2rn}\frac{\xi_1(n)\xi_2(n)\cdots\xi_r(n)}{\eta_1(n)\eta_2(n)\cdots\eta_r(n)} = \kappa, \tag{3.51}$$

где κ — константа, определяемая начальными данными:

$$\kappa = \frac{\xi_1(0)\xi_2(0)\cdots\xi_r(0)}{\eta_1(0)\eta_2(0)\cdots\eta_r(0)}.$$

Кроме того, уравнения (3.44) обладают симметрией $\xi_j(n) \longleftrightarrow \eta_j(-n)$; поэтому, если искать симметричное решение $\xi_j(0) = \eta_j(0)$ для всех $j = 1,\dots r$, то достаточно доказать его существование и положительность лишь на "полуоси" $\mathbb{N}$. Более того, в силу (3.47) достаточно проверить положительность $\eta_j(n)$ для всех j (если уже известно, что $\xi_j(n-1)$ и $\eta_j(n-1)$ положительны).

Построим теперь решение системы (3.44), положительное на целочисленной решетке и удовлетворяющее условию $\xi_j(0) = \eta_j(0) = \rho > 0$ для всех $j = 1,\dots,r$ и некоторого ρ. Введем обозначение:

$$A_j(n) = q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) + \alpha_j.$$

Рассмотрим случай нечетного r; формулы (3.47)–(3.48) можно переписать (с использованием (3.46) и (3.51)) следующим образом:

$$\eta_j(n) = \frac{1}{1-q^{2nr+r}}\sum_{k=0}^{r-1} q^{3k} h_{j,j-2k}(n) A_{j-2k}(n), \tag{3.52}$$

где $h_{j,k}(n)$ — некоторые произведения дробей вида $\frac{\xi_{i-1}(n-1)}{\eta_i(n-1)}$ (нахождение точных выражений для этих произведений не представляет никакой трудности, но нам эти выражения не потребуются). Отметим лишь, что

$$h_{j,j}(n) = 1, \quad h_{j,j-2} = \frac{\xi_{j-2}(n-1)}{\eta_{j-1}(n-1)}, \tag{3.53}$$

и $h_{j,k}$ содержит более одного сомножителя при $k \neq j, j-2$. Таким образом, достаточно доказать положительность всех $A_j(n)$.

Легко видеть, что при нашем выборе начальных данных величины

$$A_j(1) = \rho(q-1) + \alpha_j$$

положительны, если потребовать, чтобы параметр ρ удовлетворял неравенству

$$0 < \rho < \frac{\alpha^*}{1-q}, \tag{3.54}$$

где $\alpha^* = \min_j \alpha_j$. Поэтому, $\xi_j(1) > 0$, $\eta_j(1) > 0$ для всех $j = 1, \ldots, r$. Далее, пользуясь формулами (3.47), получаем, что

$$A_j(2) = q\eta_{j-1}(1) - \xi_j(1) + \alpha_j = q\eta_{j-1}(1) - q^2\eta_{j-1}(1) + \alpha_j = \\ = q(1-q)\eta_{j-1}(1) + \alpha_j > \alpha_j > 0,$$

т.е. $\xi_j(2)$ и $\eta_j(2)$ также положительны для всех j.

Покажем теперь, что для всех $j = 1, \ldots, r$ и для всех $n \geqslant 3$ справедливо следующее равенство:

$$q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) = q\eta_{j-1}(n-1)\frac{A_j(n-2)}{\eta_j(n-2)}.$$

Действительно, рассматривая соответствующую разность и используя уравнения (3.44), получаем:

$$q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) - q\frac{\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-2)}(q\eta_{j-1}(n-3) - \xi_j(n-3) + \alpha_j) = \\ = q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) - q\frac{\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-2)}(\eta_j(n-2) - q\xi_{j-1}(n-2)) = \\ = -\xi_j(n-1) + q^2\frac{\xi_{j-1}(n-2)\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-2)} = 0.$$

Поэтому,

$$A_j(n) = q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) + \alpha_j = q\eta_{j-1}(n-1)\frac{A_j(n-2)}{\eta_j(n-2)} + \alpha_j > \alpha_j > 0,$$

при условии, что уже доказана положительность $\eta_{j-1}(n-1)$, $\eta_j(n-2)$ и $A_j(n-1)$. Таким образом, из индуктивных соображений следует, что если начальные данные удовлетворяют условию (3.54), то соответствующее симметричное решение положительно на всей целочисленной решетке.

Доказательство для случая четного r идейно не отличается от приведенного выше, хотя стоит отметить некоторые существенные детали. После сокращения общего множителя в числителе и в знаменателе в формулах (3.47) становится невозможным использование интеграла (3.51). Поэтому вместо формулы (3.52) появляется такая:

$$\eta_j(n) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} q^{3k} h_{j,j-2k}(n) A_{j-2k}(n)}{1 - q^{\frac{3r}{2}} \prod\limits_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\xi_{j+2i+1}(n-1)}{\eta_{j+2i}(n-1)}}. \tag{3.55}$$

Таким образом, единственная разница по сравнению со случаем нечетного r состоит в том, что на каждом шагу нужно еще дополнительно проверять положительность знаменателя дроби (3.55). При $n = 1, 2$ (база индукции) это условие, очевидно, выполнено; если же $n > 2$, то по предположению индукции $A_j(n) > \alpha_j$, т.е. $q\eta_{j-1}(n-1) > \xi_j(n-1)$ для всех $j = 1, \ldots, r$. Поэтому,

$$\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\xi_{j+2i}(n-1)}{\eta_{j+2i-1}(n-1)} < \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\xi_{j+2i}(n-1)}{\frac{1}{q}\xi_{j+2i}(n-1)} = q^{\frac{r}{2}},$$

откуда следует, что знаменатель в формуле (3.55) положителен.

Итак, мы доказали, что при всех значениях $\alpha_j > 0$ система (3.44) имеет решение, положительное на всей целочисленной решетке и удовлетворяющее условию $\xi_j(0) = \eta_j(0) = \rho$, $j = 1, \ldots, r$, где параметр ρ ограничен неравенством (3.54), т.е. нам удалось построить однопараметрическое семейство решений системы (3.44).

Покажем теперь, что при малом возмущении каждого решения этого семейства свойство положительности во всех точках целочисленной решетки сохранится. Действительно, шаг индукции при доказательстве положительности не зависит от выбора начальных данных. Поэтому достаточно подобрать такие начальные данные, чтобы для них выполнялись условия базы индукции: $A_j(1) > 0$, $A_j(2) > 0$ для всех $j = 1, \ldots r$. Но эти условия задают открытое множество в $\mathbb{R}^{2r}$, которое, как мы уже доказали, непусто. Следовательно, при достаточно малых возмущениях построенного выше решения его положительность при $n > 0$ сохранится. Значит, в силу симметрии системы, при достаточно малых возмущениях решение будет оставаться положительным и во всех целых точках. Таким образом, мы построили $2r$-параметрическое семейство решений системы (3.44), которые положительны во всех точках "оси" $\mathbb{Z}$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Замечание 3.8 Легко заметить, что при четном r система уравнений (3.44) распадается в две независимые системы; действительно, одна группа уравнений связывает переменные $\xi_j(n)$ при нечетном $j+n$ с переменными $\eta_j(n)$ при четном $j+n$, а другая — наоборот: $\xi_j(n)$ при четном $j+n$ с $\eta_j(n)$ при нечетном $j+n$. Поэтому существование $2r$-параметрического семейства положительных решений решений системы (3.44) влечет существование r-параметрического решения задачи (3.1),(3.2). Отметим также, что при нечетном r система (3.44) не распадается на две независимых подсистемы.

3.3.3 Локальная асимптотика решений

Рассмотрим отображение F_n сдвига вдоль "траекторий" системы (3.44),

$$\begin{aligned} F_n: \ (\xi_1(n-1),\ldots,\xi_r(n-1),\eta_1(n-1),\ldots,\eta_r(n-1)) \mapsto \\ \mapsto (\xi_1(n),\ldots,\xi_r(n),\eta_1(n),\ldots,\eta_r(n)), \end{aligned} \tag{3.56}$$

определенное на множестве

$$\begin{aligned} \Bigg\{ (\xi_1(n-1),\ldots,\xi_r(n-1),\eta_1(n-1),\ldots,\eta_r(n-1)) \Bigg| \prod_{j=1}^{r} \eta_j(n-1) - \\ - q^{3r} \prod_{j=1}^{r} \xi_j(n-1) \neq 0 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Отображение F_n не зависит от n (см. явные формулы (3.47)–(3.50)); поэтому будем опускать зависимость от n у F_n и у координат: вместо $\xi_j(n-1)$ и $\eta_j(n-1)$ будем писать ξ_j и η_j соответственно и будем считать отображение F определенным в области (3.57) пространства $\mathbb{R}^{2r}$.

Предложение 3.10 *В области $\mathcal{D} = \{\eta_j \neq 0 \mid j = 1,\ldots,r\}$ отображение F имеет единственную неподвижную точку*

$$N = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{r}, \frac{\alpha_1 + q\alpha_r + \cdots + q^{r-1}\alpha_2}{1-q^r}, \frac{\alpha_2 + q\alpha_1 + \cdots + q^{r-1}\alpha_3}{1-q^r}, \ldots, \frac{\alpha_r + q\alpha_{r-1} + \cdots + q^{r-1}\alpha_1}{1-q^r} \right),$$

причем эта точка является притягивающей.

В области $\mathcal{E} = \{\xi_j \neq 0 \mid j = 1, \ldots, r\}$ отображение F имеет единственную неподвижную точку

$$S = \left(\frac{\alpha_1 + q\alpha_r + \cdots + q^{r-1}\alpha_2}{1-q^r}, \frac{\alpha_2 + q\alpha_1 + \cdots + q^{r-1}\alpha_3}{1-q^r}, \ldots, \right.$$
$$\left. \frac{\alpha_r + q\alpha_{r-1} + \cdots + q^{r-1}\alpha_1}{1-q^r}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r}\right),$$

причем эта точка является отталкивающей.

Доказательство.

Предположим, что $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_r)$ — неподвижная точка отображения F в области $\mathcal{D}$ и возьмем ее в качестве начальной. Тогда функция (3.51) постоянна при итерациях отображения F, что возможно лишь если $\kappa = 0$. Это в свою очередь влечет равенство нулю по крайней одного из ξ_j; без ограничения общности можно считать, что $\xi_1 = 0$. Рассматривая вторую группу уравнений системы (3.44), немедленно заключаем, что $\xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_r = 0$. Подставим теперь это в оставшиеся уравнения (3.44) и получим следующую линейную систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -q \\ -q & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -q & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & -q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix};$$

решая ее, приходим к искомым формулам для координат неподвижной точки N.

Докажем теперь, что эта неподвижная точка — притягивающая. Для этого потребуется вычислить якобиан отображения F в точке N. Пусть сперва r нечетно; тогда все слагаемые в формуле (3.52), кроме первых двух, не внесут никакого вклада в частные производные в точке N, поскольку содержат ξ_j в степени, большей единицы. Теперь нетрудно, воспользовавшись формулами (3.53), выписать матрицу Якоби отображения F в точке N:

$$dF\mid_N = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & \dots & * & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & * & q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 \end{array}\right)$$

(здесь символ $*$ означает, что соответствующий матричный элемент отличен от нуля, но его значение не играет роли). Ее характеристический многочлен, очевидно, имеет следующий вид:

$$\chi(\lambda) = (\lambda^r - q^{2r})(\lambda^r - q^r). \tag{3.58}$$

Таким образом, матрица Якоби $dF\mid_N$ имеет следующие собственные значения:

$$q\varepsilon_1, q\varepsilon_2, \dots, q\varepsilon_r, q^2\varepsilon_1, q^2\varepsilon_2, \dots, q^2\varepsilon_r,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_r$ — корни степени r из единицы. Случай четного r рассматривается аналогично: хотя явные формулы (3.49),(3.50),(3.55) и отличаются от формул (3.48),(3.52), после отбрасывания "несущественных" слагаемых (т.е. слагаемых, которые не вносят вклад в коэффициенты матрицы Якоби в точке N) остается то же самое, что и в случае нечетного r. Поэтому характеристический многочлен в этом случае тоже имеет вид (3.58).

В качестве нормы конечномерного линейного оператора можно взять максимум модуля его собственных значений, если его матрица диагонализуема; поэтому в силу непрерывности нормы в некоторой окрестности точки N имеет место неравенство $\|dF\| \le p < 1$. Таким образом, для всех точек X, достаточно близких к точке N, справедлива оценка

$$\|F(X) - F(N)\| = \|dF\mid_Y\| \cdot \|X - N\| \le p\|X - N\| < \|X - N\|,$$

где Y — некоторая промежуточная точка на отрезке, соединяющем точки X и N. Таким образом, точка N — притягивающая.

При симметрии $\xi_j(n) \longleftrightarrow \eta_j(-n)$ области $\mathcal{D}$ соответствует область $\mathcal{E}$; поэтому область $\mathcal{E}$ содержит единственную неподвижную точку S, симметричную точке N. Точка S является отталкивающей, поскольку N — притягивающая точка, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Предположим теперь, что

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r =: \hat{\alpha}. \tag{3.59}$$

Легко видеть, что решение системы (3.44), отвечающее начальным данным

$$\xi_1(0) = \cdots = \xi_r(0) =: \xi, \quad \eta_1(0) = \cdots = \eta_r(0) =: \eta, \tag{3.60}$$

обладает следующим свойством:

$$\xi(n) = \xi_1(n) = \cdots = \xi_r(n), \quad \eta(n) = \eta_1(n) = \cdots = \eta_r(n) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z};$$

при этом $\xi(n)$ и $\eta(n)$ удовлетворяют системе (3.27) (при $\alpha_1 = \alpha_2$) и потому имеют асимптотику (3.37),(3.38). Таким образом, для любых начальных данных вида (3.60), таких, что отвечающее им решение (см. параграф 3.2) положительно во всех точках целочисленной решетки, это решение стремится к неподвижной точке N при $n \to +\infty$ и к неподвижной точке S при $n \to -\infty$.

Будем говорить, что решение системы (3.44) имеет *правильную* асимптотику, если для соответствующих значений параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$

$$(\xi_1(n), \xi_2(n), \ldots, \xi_r(n), \eta_1(n), \eta_2(n), \ldots, \eta_r(n)) \to N \quad \text{при } n \to +\infty,$$
$$(\xi_1(n), \xi_2(n), \ldots, \xi_r(n), \eta_1(n), \eta_2(n), \ldots, \eta_r(n)) \to S \quad \text{при } n \to -\infty.$$

Прежде чем обсуждать вопрос о существовании решений системы (3.44) с правильной асимптотикой нам будет будет необходимо ввести несколько обозначений. Пусть

$$\mathfrak{A} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \mid \alpha_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, r\}$$

— пространство параметров, а

$$\mathbb{R}_+^{2r} = \{(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_r) \mid \xi_j > 0,\ \eta_j > 0,\ j = 1, 2 \ldots, r\}$$

— пространство начальных данных. Фиксируем некоторое положительное значение $\hat{\alpha}$ и рассмотрим точку $\hat{\mathfrak{a}} = (\hat{\alpha}, \hat{\alpha} \ldots, \hat{\alpha}) \in \mathfrak{A}$ в пространстве параметров. Рассмотрим плоскость

$$\{\xi_1 = \cdots = \xi_r =: \hat{\xi},\ \eta_1 = \cdots = \eta_r =: \hat{\eta}\}$$

и ее подмножество $\mathcal{T}_{\hat{\alpha}}$, состоящее из таких точек, что решение системы (3.27) с начальными данными $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ и параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = \hat{\alpha}$ положительно на всей "оси" $\mathbb{Z}$ (это подмножество состоит из бесконечного набора криволинейных треугольников — см. рис. 3.1). Пока нам известно лишь то, что решение системы (3.44) с параметрами $\hat{\mathfrak{a}}$ и начальными данными, удовлетворяющими условию (3.60), имеет правильную асимптотику для любого положительного $\hat{\alpha}$; более того, это решение положительно на целочисленной решетке, если начальные данные принадлежат множеству $\mathcal{T}_{\hat{\alpha}}$.

Предложение 3.11 *Если точка $(Y, \mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}$ принадлежит достаточно малой окрестности точки $(X, \hat{\mathfrak{a}})$, где $X \in \mathcal{T}_{\hat{\alpha}}$, то решение системы (3.44) с параметрами $\mathfrak{a}$ и начальными данными*

$$Y = (\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_r(0), \eta_1(0), \eta_2(0), \dots, \eta_r(0))$$

положительно на всей "оси" $\mathbb{Z}$ и имеет правильную асимптотику.

Доказательство.

Пусть $F_{\mathfrak{a}}$ — отображение сдвига вдоль "траекторий" системы (3.44) с параметром $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, определенное равенством (3.56); обозначим символом $F_{\mathfrak{a}}^{\circ k}$ композицию k итераций этого отображения. Тогда для любого $X \in \mathcal{T}_{\hat{\alpha}}$

$$F_{\hat{\mathfrak{a}}}^{\circ k}(X) \to N_{\hat{\mathfrak{a}}} \quad \text{при } k \to +\infty, \tag{3.61}$$

где $N_{\hat{\mathfrak{a}}}$ — притягивающая неподвижная точка отображения $F_{\hat{\mathfrak{a}}}$.

Фиксируем произвольную точку $(X, \hat{\mathfrak{a}}) \in \mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}$. Точка $N_{\hat{\mathfrak{a}}}$ является притягивающей; поэтому найдется такая ее 2ε-окрестность в пространстве $\mathbb{R}_+^{2r}$, что все ее точки при итерациях отображения $F_{\hat{\mathfrak{a}}}$ сходятся к точке $N_{\hat{\mathfrak{a}}}$ (отметим, что глобальную сходимость (3.61) к этой неподвижной точке мы можем гарантировать лишь для точек множества $\mathcal{T}_{\hat{\alpha}}$). Поскольку координаты притягивающей неподвижной точки $N_{\mathfrak{a}}$ непрерывно зависят от параметра $\mathfrak{a}$, то найдется такое $\delta_1 > 0$, что для любого $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ из δ_1-окрестности точки $\hat{\mathfrak{a}}$ в $\mathfrak{A}$ все точки из ε-окрестности точки $N_{\mathfrak{a}}$ в $\mathbb{R}_+^{2r}$ сходятся к $N_{\mathfrak{a}}$ при итерациях отображения $F_{\mathfrak{a}}$. Поэтому, для доказательства того, что асимптотика решения при $n \to +\infty$ — правильная, достаточно показать, что найдется такое $\delta > 0$, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| F_{\mathfrak{a}}^{\circ k}(Y) - N_{\mathfrak{a}} \right\|_{\mathbb{R}_+^{2r}} < \varepsilon \quad \forall (Y, \mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A} : \ \|(Y, \mathfrak{a}) - (X, \hat{\mathfrak{a}})\|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}} < \delta,$$

где символ $\| \cdot \|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}}$ обозначает норму в пространстве $\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}$.

Поскольку точка $N_{\mathfrak{a}}$ непрерывно зависит от параметра $\mathfrak{a}$, найдется такая δ_2-окрестность точки $(N_{\hat{\mathfrak{a}}}, \hat{\mathfrak{a}}) \in \mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}$, что для любой ее точки $(N_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a})$ выполнено

$$\|(N_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}) - (N_{\hat{\mathfrak{a}}}, \hat{\mathfrak{a}})\|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу сходимости (3.61) найдется такое $K \in \mathbb{N}$, что

$$\left\| F_{\hat{\mathfrak{a}}}^{\circ k}(Y), \hat{\mathfrak{a}}) - (N_{\hat{\mathfrak{a}}}, \hat{\mathfrak{a}}) \right\|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

для любого $k > K$. Фиксируем такое k; тогда, поскольку отображение $F_{\mathfrak{a}}$ непрерывно и непрерывно зависит от параметра $\mathfrak{a}$, найдется такое $\delta_3 > 0$, что для любого $(Y, \mathfrak{a})$ из δ_3-окрестности точки $(X, \hat{\mathfrak{a}})$ будет выполнено неравенство

$$\left\| (F_{\mathfrak{a}}^{\circ k}(Y), \mathfrak{a}) - (F_{\hat{\mathfrak{a}}}^{\circ k}(X), \hat{\mathfrak{a}}) \right\|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому при $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

$$\begin{aligned}
\left\| F_{\mathfrak{a}}^{\circ k}(Y) - N_{\mathfrak{a}} \right\|_{\mathbb{R}_+^{2r}} &= \left\| (F_{\mathfrak{a}}^{\circ k}(Y), \mathfrak{a}) - (N_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}) \right\|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}} \leqslant \\
&\leqslant \left\| (F_{\mathfrak{a}}^{\circ k}(Y), \mathfrak{a}) - (F_{\hat{\mathfrak{a}}}^{\circ k}(X), \hat{\mathfrak{a}}) \right\|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}} + \\
&+ \left\| (F_{\hat{\mathfrak{a}}}^{\circ k}(X), \hat{\mathfrak{a}}) - (N_{\hat{\mathfrak{a}}}, \hat{\mathfrak{a}}) \right\|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}} + \\
&+ \left\| (N_{\hat{\mathfrak{a}}}, \hat{\mathfrak{a}}) - (N_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}) \right\|_{\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, малое возмущение начальных данных $X \in \mathcal{T}_{\hat{\alpha}}$ в пространстве $\mathbb{R}_+^{2r}$ и параметров $\mathfrak{a}$ в пространстве $\mathfrak{A}$ не нарушает правильности асимптотики решения (аналогичные рассуждения можно провести и для асимптотики решения при $n \to -\infty$).

Покажем теперь, что эту δ-окрестность в $\mathbb{R}_+^{2r} \times \mathfrak{A}$ можно выбрать столь малой, что при возмущении начальных данных и параметров решения остаются положительными. Поскольку асимптотика решения правильная, а все координаты точки N положительны, то $\xi_j(n)$ и $\eta_j(n)$ также положительны при большом n (для всех $j \in \mathbb{Z}_r$). Положительность решения в остальных точках достигается достаточным уменьшением δ-окрестности точки $(X, \hat{\mathfrak{a}})$, поскольку отображение $F_{\mathfrak{a}}$ непрерывно, а решение, соответствующее $(X, \hat{\mathfrak{a}}$, положительно на целочисленной решетке, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Таким образом, для любого четного r при малом возмущении параметров (3.59), можно построить операторы $L_1, \ldots, L_r$, удовлетворяющие периодической цепочке (3.1),(3.2) и такие, что их коэффициенты при $T^{\pm 1}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, а сами эти операторы эквивалентны операторам умножения на константу при $n \to \infty$.

3.3.4 Асимптотика решений для произвольных параметров α_j

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что описанное выше асимптотическое поведение коэффициентов операторов цепочки сохраняется не только при малых возмущениях параметров α_j, но и для произвольных положительных значений этих параметров, т.е. нам необходимо доказать, что для произвольного набора положительных чисел α_j найдется такое r-параметрическое семейство начальных данных, что соответствующим им решения будут положительными во всех целочисленных точках и будут задавать решения q-цепочки (3.1),(3.2) с правильным асимптотическим поведение коэффициентов.

Зафиксируем некоторое стартовое значение $(X, \hat{\mathfrak{a}}) \in \mathbb{R}^{2r}_+ \times \mathfrak{A}$ параметров и начальных данных

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r =: \hat{\alpha}, \quad \xi_1(0) = \cdots = \xi_r(0) = \eta_1(0) = \cdots = \eta_r(0),$$

удовлетворяющие условию (3.54); соответствующее решение будет положительным и будет иметь нужную асимптотику. Рассмотрим теперь кривую $\mathfrak{a}(t)$ в пространстве параметров $\mathfrak{A}$, такую, что $\mathfrak{a}(0) = \hat{\mathfrak{a}}$ и все координаты $\alpha_j(t)$ являются монотонно возрастающими функциями параметра t. Очевидно, что при этом решение системы (3.44), с параметрами $\mathfrak{a}(t)$ будет оставаться положительным во всех целых точках. Легко видеть, что точки в пространстве параметров, которым соответствует положительное решение с "правильной" асимптотикой, образуют открытое множество; пусть $\mathcal{A}$ — связная компонента этого множества, содержащая "стартовую" точку $\hat{\mathfrak{a}}$. Предположим, что в некоторый момент (без ограничения общности можно считать, что при $t = 1$) кривая $\mathfrak{a}(t)$ вышла на границу множества $\mathcal{A}$, т.е. мы обнаружили некоторый предельный набор параметров $\mathfrak{a}(1) = (\alpha_1(1), \ldots, \alpha_r(1))$, для которого наше решение с зафиксированными начальными данными не имеет правильной асимптотики и докажем, что такая ситуация невозможна.

Предложение 3.12 *Если $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathcal{A}$, то соответствующие операторы q-цепочки $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ компактны и ограничены.*

Доказательство.

Наличие правильной асимптотики у решения системы (3.44) свидетельствует о том, что коэффициенты соответствующих операторов L_j при $T^{\pm 1}$ стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$. Поэтому все коэффициенты "сдвинутого" оператора $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$. А это означает, что оператор $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ можно приблизить сходящейся (по норме) последовательностью конечномерных разностных операторов вида $c_{j,m}T^{-1} + d_{j,m} + f_{j,m}T$, где $c_{j,m}(n) = d_{j,m}(n) = f_{j,m}(n) = 0$ при $|n| > m$. Значит, операторы $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ компактны.

Оператор L_j имеет вид $c_jT^{-1}+d_j+f_jT$ (Не путать с обозначениями предыдущего абзаца!), причем если $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$, то все его коэффициенты c_j, d_j и f_j

ограничены; пусть

$$C_j = \sup_{n\in\mathbb{Z}}\{|c_j(n)|, |d_j(n)|, |f_j(n)|\}.$$

Тогда для произвольного $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ имеем:

$$\begin{aligned}
\|L_j\psi\| &= \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(c_j(n)\psi(n-1)+d_j(n)\psi(n)+f_j(n)\psi(n+1)\Big)^2} \leqslant \\
&\leqslant C_j\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big(\psi(n-1)+\psi(n)+\psi(n+1)\Big)^2} \leqslant \\
&\leqslant C_j\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi^2(n-1)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi^2(n)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi^2(n+1)\right) = 3C_j\cdot\|\psi\|
\end{aligned}$$

(в последней оценке мы воспользовались неравенством Минковского). Поэтому оператор L_j ограничен, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Следствие 3.1 *В условиях предложения 3.12 собственные векторы каждого из операторов L_j образуют полное семейство в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.*

Следствие 3.2 *В условиях предложения 3.12 норма оператора L_j равна $\frac{\omega_j}{1-q^r}$.*

Первое из следствий получается применением теоремы Гильберта–Шмидта к самосопряженному компактному оператору $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$, а второе немедленно вытекает из первого. Действительно, поскольку оператор L_j диагонализуем в базисе из собственных векторов, его норма равна супремуму модулей собственных значений; в предложении 3.12 мы показали, что оператор L_j — ограничен, а потому согласно предложению 3.2, его дискретный спектр исчерпывается сериями (3.6). Поэтому, $\|L_j\| = \omega_j/(1-q^r)$.

Рассмотрим точку $\mathfrak{a}(1) = (\alpha_1(1),\ldots,\alpha_r(1))$ на границе множества $\mathcal{A}$; для краткости, в дальнейшем будем опускать аргументы (1). Выберем произвольную монотонно возрастающую последовательность точек $\{t_m\}$ интервала $[0,1]$, стремящуюся к 1. Тогда $\{\mathfrak{a}(t_m)\}$ — последовательность точек множества $\mathcal{A}$, сходящаяся к граничной точке $\mathfrak{a}$. Для каждого $j\in\mathbb{Z}_r$ рассмотрим последовательность $L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}$ операторов q-цепочки (3.1),(3.2), построенных по решению системы (3.44) с параметрами $\mathfrak{a}$, и предельный оператор $L_j^{\mathfrak{a}}$, соответствующий граничной точке $\mathfrak{a}$. Сформулируем и докажем несколько простых предложений относительно свойств этих операторов.

Предложение 3.13 *Для каждого $j \in \mathbb{Z}_r$ коэффициенты предельного оператора $L_j^{\mathfrak{a}}$ ограничены.*

Доказательство.

Предположим противное: пусть для некоторого $j \in \mathbb{Z}_r$ оператор $L_j^{\mathfrak{a}}$ неограничен, т.е. для любого $M \in \mathbb{R}_+$ найдется коэффициент $d_j^{\mathfrak{a}}(n) > M$ (ясно, что доказательство не изменится, если предположить, что это — коэффициент при T или при T^{-1}). Легко заметить, что значения всех коэффициентов разностного оператора вида $cT^{-1} + d + fT$ во всех целочисленных точках не превосходят норму этого оператора (достаточно взять вектор $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$, у которого все координаты за исключением одной, равной единице, нулевые). Поэтому для каждого $j \in \mathbb{Z}_r$ и для всех натуральных m в силу покоординатной монотонности последовательности $\mathfrak{a}(t_m)$ выполнено следующее неравенство:

$$\left|d_j^{\mathfrak{a}(t_m)}(n)\right| \leqslant \left\|L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}\right\| = \frac{\omega_j^{\mathfrak{a}(t_m)}}{1-q^r} < \frac{\omega_j^{\mathfrak{a}}}{1-q^r}.$$

Но, поскольку отображение $F_{\mathfrak{a}}$ непрерывно зависит от начальных данных и параметров, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер K, что $|d_j^{\mathfrak{a}(t_m)}(n) - d_j^{\mathfrak{a}}(n)| < \varepsilon$ при $m > K$. Таким образом, легко получить противоречие, взяв

$$M > \frac{\omega_j^{\mathfrak{a}}}{1-q^r} \quad \text{и} \quad \varepsilon < M - \frac{\omega_j^{\mathfrak{a}}}{1-q^r}$$

Значит, все коэффициенты каждого из операторов $L_j^{\mathfrak{a}}$ ограничены, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Предложение 3.14 *Последовательность разностных операторов $L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}$ слабо сходится к оператору $L_j^{\mathfrak{a}}$ на пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ для каждого $j \in \mathbb{Z}_r$.*

Доказательство.

Возьмем произвольный вектор $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ и разложим его в сумму $\psi = \psi_k' + \psi_k''$, где ψ_k' — финитный, т.е. такой, что все его координаты с номерами, по модулю большими k, равны нулю. Согласно предложению 3.13 все коэффициенты предельного оператора $L_j^{\mathfrak{a}}$ ограничены; поэтому определено число

$$M = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|L_j^{\mathfrak{a}} - L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}\right\|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное k, что $\|\psi_k''\| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Поскольку коэффициенты операторов непрерывно зависят от параметров, для достаточно больших m справедливо неравенство $\left\|\left(L_j^{\mathfrak{a}} - L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}\right)\right\| < \varepsilon$. Поэтому,

$$\left\|L_j^{\mathfrak{a}}\psi - L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}\psi\right\| \leqslant \left\|\left(L_j^{\mathfrak{a}} - L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}\right)\psi_k'\right\| + \left\|\left(L_j^{\mathfrak{a}} - L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}\right)\psi_k''\right\| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left\|L_j^{\mathfrak{a}} - L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}\right\| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность операторов $L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}$ слабо сходится к оператору $L_j^{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Предложение 3.15 $\|L_j^{\mathfrak{a}}\| = \frac{\omega_j}{1-q^r}$ *для всех* $j = 1, \ldots, r$.

Доказательство.

Очевидно, что $\left\|L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}\right\| \leqslant \frac{\omega_j^{\mathfrak{a}}}{1-q^r}$ для всех j, m; кроме того, ясно, что если некоторая последовательность операторов в гильбертовом пространстве слабо сходится и нормы всех этих операторов ограничены некоторой константой, то норма предельного оператора также будет ограничена этой константой. Поэтому в силу предложения 3.14 норма оператора $L_j^{\mathfrak{a}}$ тоже не превосходит $\frac{\omega_j}{1-q^r}$. Но, с другой стороны, согласно предложению 3.2, спектр предельного оператора содержит точки (3.6); поэтому $\|L_j^{\mathfrak{a}}\| \geqslant \frac{\omega_j^{\mathfrak{a}}}{1-q^r}$, т.е. справедливо обратное неравенство. Таким образом, $\|L_j^{\mathfrak{a}}\| = \frac{\omega_j}{1-q^r}$ для всех $j = 1, \ldots, r$, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Предложение 3.16 *Предельный оператор* $L_j^{\mathfrak{a}}$ *имеет чисто дискретный спектр.*

Доказательство.

Спектр оператора A в гильбертовом пространстве обычно подразделяют на *предельный* $\Pi(A)$, который состоит их таких точек λ спектра, что образ оператора $A - \lambda$ не отделен от нуля (при этом если этот образ содержит нуль, то λ, очевидно, является собственным значением, т.е. дискретный спектр $\Pi_0(A)$ является частью предельного) и *спектр сжатия* $\Gamma(A)$, который состоит из таких λ, что замыкание образа оператора $A - \lambda$ не совпадает со всем пространством. Множество $\Gamma(A) - \Pi_0(A)$ называется *остаточным спектром.* Известно (см. [19], стр. 48), что остаточный спектр всякого нормального оператора (а, значит, в частности и любого самосопряженного) пуст. Таким образом, нам достаточно доказать, что оператор $L_j^{\mathfrak{a}} - \lambda$ ограничен снизу для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Предположим противное, т.е. пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой вектор $\psi \in \mathcal{L}_2(Z)$, равный по модулю единице, что

$$0 < \left\|\left(L_j^{\mathfrak{a}} - \lambda\right)\psi\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. В силу предложения 3.14

$$\left\|(L_j^{\mathfrak{a}(t_m)} - \lambda)\psi\right\| \to \|(L_j^{\mathfrak{a}} - \lambda)\psi\|$$

при $m \to +\infty$; поэтому для всех достаточно больших m выполнено неравенство

$$\left|\|(L_j^{\mathfrak{a}} - \lambda)\psi\| - \left\|(L_j^{\mathfrak{a}(t_m)} - \lambda)\psi\right\|\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда $\left\|(L_j^{\mathfrak{a}(t_m)} - \lambda)\psi\right\| < \varepsilon$. Значит, при достаточно больших m операторы $L_j^{\mathfrak{a}(t_m)} - \lambda$ не ограничены снизу. В силу предложения 3.2 все операторы $L_j^{\mathfrak{a}(t_m)}$ имеют чисто дискретный спектр для достаточно больших m; поэтому число λ должно являться собственным значением одновременно для всех этих операторов, что невозможно т.к. спектр каждого из них имеет вид (3.6). Таким образом, предельный оператор $L_j^{\mathfrak{a}}$ тоже имеет чисто дискретный спектр, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Предложение 3.17 *Оператор* $K_j^{\mathfrak{a}} := L_j^{\mathfrak{a}} - \|L_j^{\mathfrak{a}}\|$ *компактен для всех* $j \in \mathbb{Z}_r$.

Доказательство.

Самосопряженный оператор $K_j^{\mathfrak{a}}$ имеет чисто дискретный спектр, состоящий из изолированных точек, причем каждое собственное значение имеет кратность 1. Поэтому (см. [19], стр. 92) оператор $K_j^{\mathfrak{a}}$ — компактный, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Легко заметить, что если разностный оператор вида $L = cT_{-1} + d + fT$ компактен, то все его коэффициенты стремятся к нулю:

$$c(n) \to 0, \quad d(n) \to 0, \quad f(n) \to 0 \quad \text{при } n \to \pm\infty.$$

Действительно, если предположить, что, например, $c(n) \not\to 0$ при $n \to +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно выделить подпоследовательность $c(n_k)$, обладающую тем свойством, что $|c(n_k)| > \varepsilon$ для всех $k \in \mathcal{N}$. Тогда векторы ψ_{n_k}, все координаты которых нулевые, за исключением координаты с номером n_k, которая равна 1 лежат в единичном шаре, а их образы образуют счетное семейство изолированных точек в образе оператора, что противоречит предкомпактности этого образа. Поэтому, все коэффициенты такого оператора обязаны стремится к нулю.

Таким образом, все коэффициенты каждого из операторов $K_j^{\mathfrak{a}}$ стремятся к нулю, откуда следует, что $a_j^{\mathfrak{a}}$ и $b_j^{\mathfrak{a}}$ имеют правильную асимптотику при $n \to \pm\infty$. Поэтому предельная точка $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, т.е. множество $\mathfrak{A}$ одновременно и открыто и замкнуто в области $\mathbb{R}_+^r$. Значит, $\mathfrak{a} = \mathbb{R}_+^r$, т.е. для произвольного набора положительных параметров α_j построенное r-параметрическое

Рис. 3.2: Потенциал гармонического осциллятора.

семейство решений, положительных во всех целых точках, состоит из решений с правильной асимптотикой. Отсюда в силу теоремы Гильберта-Шмидта следует, что система собственных векторов каждого из операторов q-цепочки полна в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.

Итак, мы показали, что для произвольного набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ положительных параметров существует решение системы (3.44), положительное во всех точках целочисленной решетки и обладающее правильной асимптотикой при $n \to \pm\infty$ и требуемыми в условии спектральными свойствами. Использование симметрии (3.16) немедленно сводит случай $q > 1$, $\alpha_j < 0$ к уже разобранному выше. Это завершает доказательство теоремы.

3.3.5 О сходимости к непрерывной модели при $r \geqslant 4$

В параграфе 3.2.3 было показано, что операторы циклической q-цепочки длины $r = 2$ со сдвигом $s = r/2 = 1$ сходятся к гармоническому осциллятору при $\alpha_1 = \alpha_2$ и к операторам одевающей цепочки длины r при $\alpha_1 \neq \alpha_2$, если положить $q = \exp^{-\frac{\alpha h^2}{8}}$, где h — шаг решетки, на которой определены разностные операторы циклической q-цепочки; при этом наличие подобной сходимости является следствием явного вида решений уравнений q-цепочки при $r = 2$ (и возможности выписать явное решение уравнений одевающей цепочки при $r = 1, 2$). Однако, для цепочек большей длины нам не удалось построить явного решения (мы лишь располагаем теоремой существования и можем указать начальные данные, для которых это решение существует); поэтому

Рис. 3.3: Потенциал (с особенностью) оператора Шредингера, построенного по решению одевающей цепочки длины $r = 2$.

говорить можно лишь о сходимости (в каком-либо смысле) дискретных уравнений (3.44) к непрерывным (1.15) или о разумной постановке численного эксперимента.

В работе [7] Веселовым и Шабатом была сформулирована гипотеза о том, что потенциал оператора Шредингера, построенного по решению одевающей цепочки, имеет “осцилляторо-подобную” асимптотику:

$$u(x) = \frac{\alpha^2 x^2}{4r^2} + O(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Типичные графики потенциала, полученные в непрерывном случае в результате численного счета для случаев $r = 1, 2, \dots, 6$ и заимствованные из работ [7, 1], представлены на рис. 3.2–3.7. Для четных r, как и в простейшем интегрируемом случае $r = 2$, у потенциалов видна особенность в нуле; для нечетных r решение, по-видимому, является неособым.

Будем считать, что операторы цепочки заданы на решетке с шагом h; тогда согласно (3.40) $\exp(T\frac{d}{dx}) = T + o(h)$. Как и в параграфе (3.2.3) положим $q = \exp(-\frac{\alpha}{8}h^2)$; используя разложение (3.41), получаем, что величина

$$A(x,h) = a_j^2(x) + b_j^2(x) + a_j(x+h)b_j(x) + a_j(x)b_j(x-h) - \alpha_j,$$

должна сходиться к потенциалу оператора L_j из циклической q-цепочки. Проведенный численный эксперимент показывает, что при $r = 6$, $s = r/2 = 3$,

$\alpha_{j+s} = \alpha_j$ и достаточно малых h график $A(x,h)$ имеет вид (3.4), что указывает на наличие сходимости дискретной q-цепочки длины 6 к одевающей цепочке длины 3. Аналогичная ситуация имеет место и для случая $r = 2s = 10$, $\alpha_{j+s} = \alpha_j$ (график $A(x,h)$ имеет вид (3.6)). При $r = 2s = 6$ выбор различных параметров $\alpha_{j+s} \neq \alpha_j$ приводит к потенциалу вида (3.7).

Замечание 3.9 Тот обстоятельство, что при совпадении изоспектральных сдвигов через полупериод $\alpha_{j+s} = \alpha_j$ при нечетном s наблюдается сходимость к одевающей цепочке половинной длины, неудивителен, поскольку если $r = 4t + 2$, то q-цепочку можно "намотать" на цепочку половинной длины (см. параграф 3.3.1) с "мигающими" параметрами, а условие $\alpha_{j+s} = \alpha_j$ делает эти параметры постоянными. Таким образом, фактически мы имеем дело с цепочкой половинной длины (на уровне уравнений получается *в точности* та же разностная система вида (3.44), что и для цепочки половинной длины; единственная разница заключается в том, что при таком "наматывании" шаг решетки становится в два раза меньше).

Попытки теоретического обоснования наличия какой-либо сходимости дискретной модели к непрерывной даже в самом слабом смысле "континуального" предела (см. [11]), не говоря уже о строгой сходимости по норме в смысле функционального анализа, немедленно сталкиваются со следующей проблемой. Можно показать, что если найдутся гладкие функции ξ_j, η_j, $j \in \mathbb{Z}_r$, определенные на всей числовой оси, принимающие лишь положительные значения и удовлетворяющие системе разностных уравнений

$$\begin{cases} \xi_j(x-h) + \eta_j(x) = q(\xi_{j-1}(x) + \eta_{j-1}(x-h)) + \alpha_j \\ \xi_j(x)\eta_j(x-h) = q^2\xi_{j-1}(x-h)\eta_{j-1}(x) \end{cases}, \tag{3.62}$$

где $q = e^{-\lambda h^2}$, а h — достаточно мало, то имеет место равенство

$$\sqrt{\xi_j(x)} + \sqrt{\eta_j(x)} = f_j(x) + o(1) \quad \text{при } h \to 0,$$

f_j — решение одевающей цепочки 1.15. Однако, для наличия такого "континуального" предела необходимо доказать существование гладкого и положительного на всей *непрерывной* прямой $\mathbb{R}$ решения системы (3.62), в то время как мы пока обосновали лишь существование положительного решения подобной системы, определенного лишь на *дискретной* прямой $\mathbb{Z}$. (Здесь следует отметить, что описанная в теореме (3.1) возможность возмутить положительное решение системы (3.62), вообще говоря, не обеспечивает непрерывности решения на всех числовой оси.)

Рис. 3.4: Потенциал оператора Шредингера, построенного по решению одевающей цепочки длины $r = 3$.

Рис. 3.5: Потенциал (с особенностью) оператора Шредингера, построенного по решению одевающей цепочки длины $r = 4$.

Рис. 3.6: Потенциал оператора Шредингера, построенного по решению одевающей цепочки длины $r = 5$.

Рис. 3.7: Потенциал (с особенностью) оператора Шредингера, построенного по решению одевающей цепочки длины $r = 6$.

3.4 Интегрируема ли циклическая q-цепочка?

Естественным следствием очень бурного развития теории интегрируемых систем в семидесятых и восьмидесятых годах прошлого века стало появление соответствующей дискретной теории; были найдены дискретные аналоги открытых и хорошо изученных за это время непрерывных интегрируемых систем, предпринимались попытки построения дискретного лагранжева формализма и определения дискретной интегрируемости. В этой связи необходимо отметить прежде всего работу Веселова [6], в которой критерием интегрируемости некоторого отображения $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ служило наличие нетривиального примера отображения, коммутирующего с данным. В терминах дискретных систем это может быть интерпретировано следующим образом.

3.4.1 Одномерный случай

Рассмотрим одномерное разностное уравнение первого порядка $x_n = f(x_{n-1})$, задающее итерации некоторого отображения f (в данном случае не имеет значения, элементами какого множества являются "поля" x_n). Предположим, что есть коммутирующее отображение g, $f \circ g = g \circ f$, такое, что множества итераций f и g не пересекаются и положим $y_n := g(x_n)$ для всех натуральных n. Тогда

$$f(y_{n-1}) = f(g(x_{n-1})) = g(f(x_{n-1})) = g(x_n) = y_n;$$

таким образом, наличие коммутирующего отображения задает дискретную симметрию исходного разностного уравнения. Это обстоятельство может служить мотивировкой такого определения интегрируемости, поскольку в непрерывном случае наличие у гамильтоновой системы достаточного количества непрерывных симметрий в инволюции говорит о ее интегрируемости (см.[20]).

Кроме того, важным для дальнейшего изложения является то обстоятельство, что наличие коммутирующего отображения в этом простейшем случае позволяет построить корректно определенную разностную систему на двумерной решетке, в которой сдвиг по одному направлению задается отображением f, а по другому — отображением g (см. рис. (3.8)).

Для иллюстрации описанного подхода Веселова к интегрируемости отображений рассмотрим цепочку Дарбу (3.27) длины 2; наличие явного решения дает возможность построить не только отображение, коммутирующее с отображением

$$F : (\xi_{n-1}, \eta_{n-1}) \mapsto (\xi_n, \eta_n), \tag{3.63}$$

и поток, коммутирующий с потоком "вдоль траекторий" этого отображения: на плоскости параметров (φ, τ) отображению (3.63), очевидно, соответствует сдвиг $\varphi \mapsto \varphi + 1$; при этом поток "вдоль траекторий" задается сдвигом

Рис. 3.8: Интегрируемое отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$\varphi \mapsto \varphi + t$, а коммутирующий поток — сдвигом $\tau \mapsto \tau + s$. Явные формулы для коммутирующего потока достаточно громоздки и мы не будем их здесь приводить; отметим лишь, что в случае $\alpha_1 = \alpha_2$ (в приведенных ниже формулах индексы опущены) отображение F имеет вид

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{q^2 x(qy - x + \alpha)}{y - q^3 x}, \frac{y(qy - x + \alpha)}{y - q^3 x} \right),$$

а коммутирующее с ним отображение выглядит так: $(x, y) \mapsto (Cx, Cy)$, где

$$C := \frac{(1 - q^{\varphi - \tau - \frac{1}{2}})(1 - q^{\varphi + \tau + \frac{3}{2}})}{(1 - q^{\varphi - \tau + \frac{1}{2}})(1 - q^{\varphi + \tau + \frac{1}{2}})}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \left(\log_q \frac{x}{y} - 1 \right), \tag{3.64}$$

$$\tau = \frac{1}{\ln q} \operatorname{arch} \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} - (1 - q) \frac{y\sqrt{y}}{\alpha\sqrt{x}} \left(1 - \frac{x}{qy} \right) \left(1 - \frac{qx}{y} \right) \right) \right). \tag{3.65}$$

При этом функция $\tau = \tau(x, y)$ является интегралом системы (3.27), а динамика отображения F происходит вдоль кривых $\tau(x, y) = \mathrm{const}$.

3.4.2 Трехмерная совместность разностных уравнений на двумерной решетке

Подход к интегрируемости разностных уравнений, связанный с наличием коммутирующего потока, получил дальнейшее развитие в недавних работах Адлера, Бобенко и Суриса [27, 22] и Найхофа [32]. Воспроизведем основную идею.

Рассмотрим двумерную прямоугольную решетку на плоскости и будем считать, что каждой ее вершине A_{ij} приписано некоторое “поле” x_{ij} (вообще говоря, элемент некоторой ассоциативной алгебры), а каждому ребру — некоторый параметр, причем значения параметров на противоположных ребрах

Рис. 3.9: Элементарный квадрат в двумерной решетке.

любого элементарного квадрата совпадают. Предположим, что на этой решетке задано разностное уравнение, связывающее “поля” в вершинах каждого элементарного квадрата; поскольку это соотношение локальное, для сокращения обозначений рассмотрим квадрат, в вершинах которого сосредоточены “поля” x, x_1, x_2, x_{12} (см. рис. 3.9). Тогда разностное соотношение имеет вид

$$Q(x, x_1, x_2, x_{12}, \alpha, \beta) = 0. \tag{3.66}$$

Предположим дополнительно, что уравнение (3.66) является линейным в следующем смысле:

$$Q(x, u, y, v, \alpha, \beta) = a_1 xuyv + a_2 xuy + a_3 xuv + a_4 xyv + a_5 uyv + \cdots + a_{16}, \tag{3.67}$$

где коэффициенты $a_1, \ldots, a_{16}$ зависят от параметров α, β. Пусть кроме этого уравнение (3.66) инвариантно относительно группы симметрий квадрата:

$$Q(x, u, y, v, \alpha, \beta) = \varepsilon Q(x, v, y, u, \beta, \alpha) = \sigma Q(u, x, y, v, \alpha, \beta), \tag{3.68}$$

где $\varepsilon, \sigma = \pm 1$.

Рассмотрим трехмерную прямоугольную решетку, каждой из вершин которой приписано некоторое “поле”, а каждому ребру — некоторый параметр, причем значения параметров на противоположных ребрах любой грани каждого элементарного куба совпадают (см. рис. 3.10). Будем считать, что “поля”, приписанные вершинами каждой грани элементарного куба, связаны соотношением (3.66) для соответствующих параметров (инвариантность уравнения (3.66) относительно группы симметрий квадрата позволяет не задумываться о выборе ориентации на каждой грани куба). Тогда уравнения на трех гранях, примыкающих к вершине x, позволяют вычислить значения x_{12}, x_{23} и x_{13} для произвольного выбора начальных данных x, x_1, x_2 и x_3. После этого на каждой из трех оставшихся граней "поля" в трех вершинах из четырех оказываются заданными, т.е. уравнение (3.66) позволяет вычислить значение x_{123} тремя различными способами. Будем говорить, что уравнение (3.66) на двумерной решетке обладает свойством *трехмерной совместности*, если для любых начальных данных x, x_1, x_2 и x_3 и произвольного дополнительно параметра γ значение x_{132} корректно определено, т.е. три способа его вычисления дают одно и то же.

Легко видеть, что свойство трехмерной совместности легко может быть "поднято" и на более высокие размерности: d-мерное дискретное уравнение обладает свойством $(d+1)$-*мерной совместности*, если оно может быть совместным образом наложено на все d-мерные подрешетки $(d+1)$-мерной решетки. Будем называть разностное уравнение на d-мерной прямоугольной решеткой *интегрируемым*, если оно обладает свойством $(d+1)$-мерной совместности. Мотивировкой такого подхода к интегрируемости разностных уравнений может служить то обстоятельство, что $(d+1)$-мерная совместность есть не что иное как возможность включить "поток", порождаемый исходным разностным уравнением, в семейство коммутирующих потоков. Поэтому, предложенное в [27, 22, 32] определение интегрируемости вполне согласуется с современными представлениями об интегрируемости по Лиувиллю (см. [20]) и с описанным выше определением Веселова интегрируемого отображения.

Дискретные уравнения (3.66) на двумерной решетке, где функция Q имеет вид (3.67) а "поля" комплекснозначны, инвариантные относительно группы симметрий квадрата и обладающие свойством трехмерной совместности, были классифицированы (при некотором дополнительном ограничении на функцию Q, которое здесь не имеет принципиального значения) в работе [22].

3.4.3 Случай q-цепочки

Возникает естественная идея посмотреть на циклическую q-цепочку (точнее, на разностную систему (3.44)) с точки зрения трехмерной совместности. Первая проблема, с которой мы при этом сталкиваемся, — это невыполнение условия симметрии (3.68) для уравнений (3.44); но, поскольку это условие было необходимо в работах [27, 22], главным образом, для классификации интегрируемых уравнений, эту проблему можно считать несущественной. Более

Рис. 3.10: Трехмерная совместность двумерной цепочки.

принципиальным является, во-первых, то, что в уравнениях (3.44) есть только набор параметром α_j, которые можно приписать одной паре параллельных ребер элементарного квадрата, но нет никакого аналога набора параметров β_n, которые следовало бы приписывать другой паре параллельных ребер, а, во-вторых, то, что каждому элементарному квадрату должно соответствовать два совершенно различных по форме уравнения. Тем не менее, все эти проблемы можно довольно искусственным путем преодолеть (или, точнее, не заметить) и прийти к тому, что свойство трехмерной совместности для циклической q-цепочки оказывается, в некотором смысле, "почти выполненным".

Описанный выше подход Адлера, Бобенко и Суриса к интегрируемости разностных систем на решетке, основанный на свойстве d-мерной совместности, требует изучения лишь локальной структуры рассматриваемой модели (уравнение вида (3.66) связывает "поля" только в четырех вершинах каждого элементарного квадрата), в то время как любое циклическое замыкание является нелокальным условием, связывающим "поля", находящиеся "далеко".

Замечание 3.10 В недавней работе Адлера и Веселова [23] был построен довольно простой эффективный геометрический критерий того, является ли задача Коши для интегрируемой дискретной системы на двумерной решетке с начальными данными, заданными на некоторой дискретной "кривой", корректно определенной. Однако, если на систему дополнительно накладываются нелокальные условия типа циклического замыкания, вопрос о критерии корректности задачи Коши становится очень сложным. В частности, для циклической q-цепочки со сдвигом, отличным от нуля, r и $r/2$ задача Коши на цикле, перпендикулярном образующей цилиндра, может оказаться некорректной (см. замечание 3.4).

Таким образом, несмотря на то, что циклическую q-цепочку можно достаточно искусственным путем заставить быть “почти трехмерно совместной”, описанная выше принципиальная разница между локальными дискретными системами вида (3.66) и системами с каким-либо нелокальным условием показывает, что, на наш взгляд, подход, основанный на свойстве трехмерной совместности, на самом деле, неприменим к циклической q-цепочке.

Другая идея относительно интегрируемости циклической q-цепочки была высказана в работе [35]. Попробуем найти какие-нибудь величины, зависящие от динамических переменных $(\xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_r)$, которые сохраняются при итерациях сдвига вдоль траекторий разностной системы (3.44). Возьмем положительное решение системы (3.44) с правильной асимптотикой (см. параграф 3.3.3); предельные величины координат $\eta_j(n)$ при $n \to +\infty$ и координат $\xi_j(n)$ при $n \to -\infty$, безусловно, являются константами движения, однако, они не зависят от выбора начальных данных.

Идея, предложенная Дынниковым, состоит в том, чтобы рассмотреть предельные значения “импульсов” при $n \to \pm\infty$, которые, очевидно, также являются константами движения, но, в отличии от предельных значений координат, зависят от начальных данных.

Лемма 3.1 *Пусть $(\xi_1(n), \dots, \xi_r(n), \eta_1(n), \dots, \eta_r(n))$ — положительное решение системы (3.44) с правильной асимптотикой. Тогда для всех $j = 1, \dots, r$ имеют место следующие асимптотические соотношения:*

$$\frac{\xi_j(n)}{q^{2n}} = O(1), \qquad \frac{c_j - \eta_j(n)}{q^n} = O(1) \qquad \text{при } n \to +\infty,$$
$$\frac{\eta_j(n)}{q^{-2n}} = O(1), \qquad \frac{c_j - \xi_j(n)}{q^{-n}} = O(1) \qquad \text{при } n \to -\infty,$$

где $c_j = \frac{\alpha_j + q\alpha_{j-1} + \dots + q^{r-1}\alpha_{j+1}}{1-q^r}$, $j \in \mathbb{Z}_r$, — предельные значения координат.

Доказательство.

Покажем сперва, что что $\xi_j(n)$ имеет тот же порядок роста при $n \to +\infty$, что и q^{2n} при всех $j = 1, \dots, r$ (под символом $O(1)$ мы здесь вопреки стандартной терминологии будем понимать ограниченную последовательность, для которой 0 не является предельной точкой). Поскольку мы выбрали решение системы (3.44) с правильной асимптотикой, легко видеть, что

$$\frac{\xi_j(n)}{\xi_{j-1}(n-1)} = q^2 \frac{\eta_{j-1}(n)}{\eta_j(n-1)} \to q^2 \frac{c_{j-1}}{c_j}, \tag{3.69}$$

т.е. все последовательности ξ_j имеют одинаковый порядок роста. Вообще говоря, для каждой ξ_j возможны три варианта:

1. последовательность $\xi_j(n)/q^{2n}$ неограничена;

2. последовательность $\xi_j(n)/q^{2n}$ имеет 0 предельной точкой;

3. последовательность $\xi_j(n)/q^{2n}$ ограничена и отделена от нуля.

Предположим, что для некоторого $j \in \mathbb{Z}_r$ реализуется первый вариант; тогда согласно (3.69) все остальные последовательности $\xi_i(n)/q^{2n}$ тоже неограничены. Но в этом случае величина

$$\frac{1}{q^{2nr}}\frac{\xi_1(n)\cdots\xi_r(n)}{\eta_1(n)\cdots\eta_r(n)}$$

также неограничена, что невозможно в силу (3.51). Аналогично, если предположить, что для некоторого $j \in \mathbb{Z}_r$ последовательность $\xi_j(n)/q^{2n}$ имеет 0 своей предельной точкой, то и для всех остальных последовательностей $\xi_i(n)/q^{2n}$ точка 0 является предельной, что противоречит наличию интеграла (3.51) у системы (3.44). Таким образом, реализоваться может только третий вариант.

Теперь рассмотрим асимптотическое поведение величин $\zeta_j(n) := \eta_j(n) - c_j$; первое уравнение системы (3.44) можно привести к виду

$$\zeta_j(n) = q\zeta_{j-1}(n-1) + q\xi_{j-1}(n) - \xi_j(n-1), \tag{3.70}$$

где в силу уже доказанного “довесок” $q\xi_{j-1}(n) - \xi_j(n-1)$ имеет вид $q^{2n}O(1)$. Теперь легко заметить (например, разделив уравнение (3.70)) на q^n), что все последовательности $\zeta_j(n)$ имеют одинаковый порядок роста. При этом имеет место асимптотическое соотношение

$$\zeta_j(k+nr) = q^{nr}\zeta_j(k) + q^{nr}O(1),$$

которое получается повторным применением равенства (3.70) для произвольного k (последний член образован суммированием “довесков” из (3.70)). Отсюда легко видно, что величины $\zeta_j(n)$ растут как q^n. Обоснование асимптотического поведения величин $\xi_j(n)$ и $\eta_j(n)$ при $n \to -\infty$ аналогично, $\mathfrak{Q.e.d.}$

Рассмотрим простейший случай цепочки длины $r = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, она сводится к разностной системе (3.44) с двумя неизвестными функциями ξ и η и одним параметром α (все индексы здесь опущены). Из явных формул (3.36) следует, что существуют следующие пределы:

$$\begin{aligned} \rho: &= \lim_{n\to+\infty}\frac{c-\eta_n}{q^n} = \frac{\alpha}{1-q}q^{\varphi+\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(\tau\ln q), \\ \mu: &= \lim_{n\to-\infty}\frac{c-\xi_n}{q^{-n}} = \frac{\alpha}{1-q}q^{-\varphi-\frac{1}{2}}\operatorname{ch}(\tau\ln q), \end{aligned}$$

где φ и τ связаны с начальными данными $\xi_0 = x$, $\eta_0 = y$ с помощью формул (3.64),(3.65). Эти пределы, очевидно, не зависят от n и потому задают "неавтономные" первые интегралы системы (3.44):

$$\begin{gathered}\rho=\rho(n)=\frac{1}{q^n}\left(\frac{\alpha}{1-q}\left(1+\frac{\xi_n}{\eta_n}\right)-\eta_n\left(1-\frac{\xi_n}{q\eta_n}\right)\left(1-\frac{q\xi_n}{\eta_n}\right)\right)\\ \mu=\mu(n)=q^n\frac{\eta_n}{\xi_n}\left(\frac{\alpha}{1-q}\left(1+\frac{\xi_n}{\eta_n}\right)-\eta_n\left(1-\frac{q\xi_n}{\eta_n}\right)\left(1-\frac{\xi_n}{q\eta_n}\right)\right)\end{gathered},$$

которые, как нетрудно проверить, независимы для точки (ξ_n, η_n) общего положения. При этом величины

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n}{q^{2n}}=\frac{\alpha}{1-q}q^{2\varphi+1} \text{ и } \lim_{n\to-\infty}\frac{\eta_n}{q^{-2n}}=\frac{\alpha}{1-q}q^{-2\varphi-1}$$

оказываются зависимыми.

Если в цепочке длины $r = 2$ параметры α_1 и α_2 различны, то последовательности $(c_j - \eta_j(n))q^{-n}$ имеют по две предельные точки ρ_1 и ρ_2:

$$\frac{c_j-\eta_j(j+2k)}{q^{j+2k}}\to\rho_j,\quad \frac{c_j-\eta_j(j+2k+1)}{q^{j+2k+1}}\to\rho_{j+1}\quad \text{при } k\to+\infty.$$

Аналогично, существуют константы μ_1 и μ_2 такие, что

$$\frac{c_j-\xi_j(j+2k)}{q^{-(j+2k)}}\to\mu_j,\quad \frac{c_j-\xi_j(j+2k+1)}{q^{-(j+2k+1)}}\to\mu_{j+1}\quad \text{при } k\to-\infty.$$

Легко видеть, что в этом случае величины ρ_j, μ_j, где $j = 1, 2$, сохраняются при сдвиге "вдоль траекторий", т.е. тоже являются первыми интегралами системы (3.44). Явные формулы (3.32) для решений этой системы также позволяют получить явные выражения для интегралов ρ_j, μ_j.

Будем говорить, что числовая последовательность $z(n)$ *стремится к r-циклу $(\rho_1, \ldots, \rho_r)$ при $n \to +\infty$* если ее подпоследовательности $z(j + rn)$ стремятся к ρ_j при $n \to +\infty$ для всех $j = 1, \ldots, r$.

В случае цепочек большей длины мы не располагаем явными формулами для решений; однако, численный эксперимент показывает, что при $r = 3, 4$, например, последовательность $(c_1 - \eta_1(1 + n))q^{-n}$ стремится к некоторому r-циклу $(\rho_1, \ldots, \rho_r)$. При этом остальные последовательности $(c_j - \eta_j(j+n))q^{-n}$ тоже стремятся к этому r-циклу; более того последовательности $(c_j - \xi_j(j + n))q^n$ также стремятся к некоторому r-циклу. Эти результаты позволяют нам выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 3.1 *Пусть параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ положительны, а q удовлетворяет неравенству $0 < q < 1$. Тогда r последовательностей*

$$\frac{c_1 - \eta_1(1+n)}{q^n}, \frac{c_2 - \eta_2(2+n)}{q^n}, \ldots, \frac{c_r - \eta_r(r+n)}{q^n}$$

стремятся к одному и тому же r-циклу $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r)$ при $n \to +\infty$. Аналогично, r последовательностей

$$\frac{c_1 - \xi_1(1+n)}{q^{-n}}, \frac{c_2 - \xi_2(2+n)}{q^{-n}}, \ldots, \frac{c_r - \xi_r(r+n)}{q^{-n}}$$

тоже стремятся к некоторому r-циклу $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$. Более того, параметры $\rho_1, \ldots, \rho_r$, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ однозначно определяют решение системы (3.44).

Литература

[1] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Симметрийный подход к проблеме интегрируемости. *ТМФ*, **125**(3), 2000, 355–424.

[2] Н. М. Атакишиев, С. К. Суслов. Модель гармонического осциллятора на решетке. *Современный групповой анализ: методы и приложения.* Баку, Элм, 1989, 17–20.

[3] Н. М. Атакишиев, С. К. Суслов. Разностные аналоги гармонического осциллятора, *ТМФ*, **85** (1990), вып. 1, 64–73.

[4] Н. М. Атакишиев, С. К. Суслов. Об одной реализации q-гармонического осциллятора, *ТМФ*, **87** (1991), вып. 1, 154–156.

[5] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., Наука, 1966.

[6] А. П. Веселов. Интегрируемые отображения. *УМН*, **46** (1991), вып. 5(281), 3–45.

[7] А. П. Веселов, А. Б. Шабат. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера. *Функ. Анализ*, **27** (1993), вып. 2, 1–21.

[8] В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л., ГИТТЛ, 1941.

[9] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. *УМН*, **31** (1976), вып. 1 (187), 55–136.

[10] И. А. Дынников, С. В. Смирнов. Точно решаемые циклические q-цепочки Дарбу. *УМН*, **57** (2002), вып. 6(354), 183–184.

[11] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: метод обратной задачи. М., Наука, 1980.

[12] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1972.

[13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., Наука, 1974.

[14] Дж. Л. Лэм. Введение в теорию солитонов. М., Мир, 1983.

[15] С. П. Новиков, И. А. Дынников. Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях. *УМН*, **52** (1997), вып. 5(317), 175–234.

[16] С. В. Смирнов. Циклические q-цепочки Дарбу. *Алгебра и Анализ*, **13** (2003), вып. 5, 228–253.

[17] П. К. Суетин. Классические ортогональные многочлены. М., Наука, 1976.

[18] Функциональный анализ. Сер. Справочная Математическая Библиотека. М., Наука, 1964.

[19] П. Халмош. Гильбертово пространство в задачах. М., Мир, 1970.

[20] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Симметрии нелинейных цепочек. *Алгебра и Анализ*, **2** (1990), вып. 2, 183–208.

[21] V. E. Adler. Nonlinear chains and Painlevé equations. *Physica (D)*, **73** (1994), 335–351.

[22] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. *Comm. Math. Phys.*, **233** (2003), 513–543.

[23] V. E. Adler, A. P. Veselov. Cauchy problem for integrable discrete equations on quad-graphs. *Acta Applicandae Mathematicae*, **84**, 2004, 237–262.

[24] N. Atakishiyev, A. Frank, K. Wolf. A simple difference realization of the Heisenberg q-algebra. *J. Math. Phys*, **35**(7), 1994, 3253–3260.

[25] N. M. Atakishiyev, E. I. Jafarov, Sh. M. Nagiev, K. B. Wolf. Meixner oscillators. *Rev. Mex. Fis.*, **44** (1998), 235–244.

[26] L. C. Biedenharn. The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22** (1989), L873–878.

[27] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Notices*, **11** (2002), 573–611.

[28] M. Chaichian, H. Grosse, P. Presnajder. Unitary representations of the q-oscillator algebra. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27** (1994), 2045–2051.

[29] P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky. On the q oscillator and the quantum algebra $su_q(1,1)$. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23** (1990), L415-L419.

[30] A. Lorek, A. Ruffing, J. Wess. A q-deformation of the harmonic oscillator. *Z. Phys. C.*, **74**, (1997), 369–377

[31] A. J. Macfarlane. On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22** (1989), 4581–4588.

[32] F. W. Nijhoff. Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system. *Phys. Lett. A*, **297** (2002), 49–58.

[33] S. P. Novikov, I. A. Taimanov. Difference analogs of the harmonic oscillator. Appendix II in [34].

[34] S. P. Novikov, A. P. Veselov. Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations. *Solitons, Geometry, and Topology: on the Crossroad*, ed. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov. AMS Trans. Ser. 2, **179** (1997), 109–132.

[35] S. Smirnov. Exactly solvable periodic Darboux q-chains. *Proc. Vol. of the Fourth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, ed. I. Mladenov, G. Naber. Coral Press, Sofia, 2003, 296–302.

[36] V. Spiridonov, L. Vinet, A. Zhedanov. Difference Schrödinger operators with linear and exponential discrete spectra. *Lett. Math. Phys*, **129** (1993), 67–73.

[37] V. Spiridonov, A. Zhedanov, L. Vinet. Periodic reduction of the factorization chain and the Hahn polynomials. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27** (1994), L669–L675.

[38] V. Spiridonov, A. Zhedanov. Discrete reflectionless potentials, quantum algebras and q-orthgonal polynomials. *Ann. Phys.*, **237** (1995), 126–146.

[39] J. Weiss. Periodic fixed points of Bäcklund transformations and the KdV equation. *J. Math. Phys.*, **27**(11) (1986), 2647–2656.